２．平面二次元ソルバー Nays2Dの機能強化　（担当：岩崎理樹）

（１）はじめに

河川の流れ，河床変動，河岸侵食を計算する平面二次元ソルバーであるNays2Dは，これまでiRICの前身であるRIC-Naysの段階から同梱ソルバーとして公開されてきた．これまでのRIC-Nays，iRICの普及，講習会等の活動において広く紹介しているため，iRICに同梱されているソルバーの中でも特にユーザーや問い合わせが多いソルバーであるといえる．それゆえ，ソルバーに対する要望，問題点の指摘も数多く寄せられており，今後のiRICのより一層の発展のためには，さらなる機能強化に取り組み，より使いやすく，強力なソルバーを構築しておく必要がある．本章は，本年度に主として行った改良点である，

・混合粒径浮遊砂モデルの導入
・二次流の発達・減衰を考慮した二次流モデルの導入
・プログラムの並列化による計算効率の向上

について報告するものである．

（２）混合粒径浮遊砂モデルの導入

これまでのNays2Dでは，混合粒径の計算を行う場合は浮遊砂を考慮した計算を行うことが不可能であった．しかしながら，実河川において長区間を計算する場合や，上流から細粒径の土砂が多量に輸送される場合では，粒径範囲の広い土砂を対象として計算する必要があり，掃流砂－浮遊砂を合理的に計算できる必要がある．そこで，混合粒径土砂を対象とした浮遊砂モデル[1,2]を新たに導入することにより，混合粒径河床場においても掃流砂と浮遊砂を同時に考慮できるモデルを構築した．以下のその基礎式について説明する．

a）土砂連続式

河床の連続式は以下のようになる．

$$\frac{\partial(c_m E_m)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{z}{J}\right)+\frac{1}{1-\lambda_p}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sum q_{bk}{}^{\xi}}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sum q_{bk}{}^{\eta}}{J}\right)+\frac{\sum\left(q_{suk}-c_{bk}w_{fk}\right)}{J}\right]=0 \tag{1}$$

ここに，t：時間，ξ,η：一般座標，J：ヤコビアン，λ_p：河床空隙率，z：河床高，$q_{bk}{}^{\xi}, q_{bk}{}^{\eta}$：$k$ 階層粒子の掃流砂量のξ,η方向反変成分，q_{suk}：k 階層粒子の浮遊砂浮上量，c_{bk}：k 階層粒子の河床近傍浮遊砂濃度，w_{fk}：k 階層粒子の土砂粒子沈降速度，c_m：交換層の土砂濃度及びE_m：交換層厚である．

また，粒度連続式は次式で表される．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c_m E_m p_{mk}}{J}\right)+\left(1-\lambda_p\right)p_{bk}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{z}{J}\right)+\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{q_{bk}^{\xi}}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{q_{bk}^{\eta}}{J}\right)+\frac{q_{suk}-c_{bk}w_{fk}}{J}\right]=0$$

$$\begin{cases} p_{bk}=p_{tk}, & \dfrac{\partial z}{\partial t}\leq 0, \quad E_{sd}\geq E_{be}\dfrac{c_m}{1-\lambda} \\ p_{bk}=0, & \dfrac{\partial z}{\partial t}\leq 0, \quad E_{sd}< E_{be}\dfrac{c_m}{1-\lambda} \\ p_{bk}=p_{mk}, & \dfrac{\partial z}{\partial t}>0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_{d1}p_{d1k}}{J}\right)-p_{dk}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_{d1}}{J}\right)=0$$

$$\begin{cases} p_{dk}=0, & \dfrac{\partial z}{\partial t}<0 \\ p_{dk}=p_{mk}, & \dfrac{\partial z}{\partial t}>0 \end{cases} \tag{3}$$

ここに，p_{tk}：遷移層におけるk 階層粒子の占有率，p_{dmk}：交換層底面からm番目の堆積層におけるk 階層粒子の占有率，E_{sd}：土層厚及びE_{dm}：交換層底面からm番目の堆積層の厚さである．また，E_{be}は平衡交換層厚であり，ここでは次式により求める．

$$\frac{E_{be}}{d_m}=\frac{1}{c_m\cos\theta\left(\tan\phi-\tan\theta\right)}\tau_{*m} \tag{4}$$

ここに，θ：局所河床勾配，ϕ：河床土砂の安息角，τ_{*m}：中央粒径に対する無次元掃流力である．また，交換層厚は以下のように求める．

$$E_m=E_{be} \qquad E_{sd}\geq E_{be}\frac{c_m}{1-\lambda} \tag{5}$$

$$E_m=E_{sd}\frac{1-\lambda}{c_m} \qquad E_{sd}\leq E_{be}\frac{c_m}{1-\lambda} \tag{6}$$

b）掃流砂の計算

全掃流砂量は，勾配の影響を考慮した以下の芦田・道上式[3-5]により求める．

$$q_{bk}=17p_{mk}\tau_{*ek}^{1.5}\left(1-K_c\frac{\tau_{*ck}}{\tau_{*k}}\right)\left(1-\sqrt{K_c\frac{\tau_{*ck}}{\tau_{*k}}}\right)\sqrt{\Delta g d_k^3}\,r_b \tag{7}$$

ここに，q_{bk}：k 階層粒子の掃流砂量，p_{mk}：交換層におけるk 階層粒子の存在率，τ_{*ek}：k 階層粒子に対する有効無次元掃流力，τ_{*k}：k 階層粒子に対する無次元掃流力，τ_{*ck}：k 階層粒子に対する無次元限界掃流力，Δ：土粒子の水中重量，g：重力加速度及びd_k：k 階層粒子の粒径である．K_cは掃流砂移動に対する河床勾配の影響であり，次式で求める．

$$K_c=1+\frac{1}{\mu_s}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_s-\rho}+1\right)\cos\alpha\tan\theta_x+\sin\alpha\tan\theta_y\right] \tag{8}$$

ここに，αはx 軸からの河床近傍流速の偏差角は以下のように求める．

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v^b}{u^b}\right) \tag{9}$$

μ_sは静止摩擦係数，θ_xとθ_yはxとy方向における局所河床勾配であり，次式で計算する．

$$\theta_x = \arctan\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \quad \theta_y = \arctan\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \tag{10}$$

各粒径粒子に対する無次元限界掃流力の算定に対する遮蔽効果は，以下の浅田の式[6]により計算する．

$$\frac{\tau_{*ck}}{\tau_{*cm}} = \left[\frac{\log_{10} 23}{\log_{10}\left(21\dfrac{d_k}{d_m} + 2\right)}\right]^2 \tag{11}$$

ここに，d_m：交換層の中央粒径，τ_{*cm}：中央粒径の無次元限界掃流力で，岩垣の式[7]を用いて評価する．

掃流砂量のξ, η方向反変成分は次式により求める[8]．

$$q_{bk}{}^{\xi} = \xi_r q_{bk}\left[\frac{\tilde{u}_b^{\xi}}{V_b} - \gamma\left(\frac{\partial z}{\partial \tilde{\xi}} + \cos\theta \frac{\partial z}{\partial \tilde{\eta}}\right)\right] \tag{12}$$

$$q_{bk}{}^{\eta} = \eta_r q_{bk}\left[\frac{\tilde{u}_b^{\eta}}{V_b} - \gamma\left(\frac{\partial z}{\partial \tilde{\eta}} + \cos\theta \frac{\partial z}{\partial \tilde{\xi}}\right)\right] \tag{13}$$

ここに，$\tilde{}$は，物理空間における値，ξ_r, η_rは計算空間と物理空間の局所的な格子サイズの比を意味しており，次式で求める．

$$\xi_r = \frac{\Delta \xi}{\Delta \tilde{\xi}}, \quad \eta_r = \frac{\Delta \eta}{\Delta \tilde{\eta}} \tag{14}$$

また，γ は次式で評価する．

$$\gamma = \sqrt{\frac{\tau_{*ck}}{\mu_s \mu_k \tau_{*k}}} \tag{15}$$

ここに，μ_k：動摩擦係数である．

c）浮遊砂の計算

浮遊砂浮上量式として，以下のItakura and Kishi式[9]を用いる．

$$q_{suk} = p_{mk} K\left[a_* \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} \cdot \frac{g d_k}{u_*}\Omega_k - w_{fk}\right] r_b \tag{16}$$

$$\Omega_k = \frac{\tau_{*k}}{B_{*k}} \cdot \frac{\int_{a'}^{\infty} \xi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\xi^2\right] d\xi}{\int_{a'}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\xi^2\right] d\xi} + \frac{\tau_{*k}}{B_{*k}\eta_0} - 1 \tag{17}$$

$$a' = \frac{B_{*k}}{\tau_{*k}} - \frac{1}{\eta_0}, \quad \eta_0 = 0.5, \quad a_* = 0.14, \quad K = 0.008 \tag{18}$$

B_{*k}は，混合粒径の場合は遮蔽効果を考慮した沖らの提案式[10]を用いる．

$$B_{*k} = \xi_k B_{*0}, \quad \xi_k = \frac{\tau_{*ck}}{\tau_{*ck0}}, \quad B_{*0} = 0.143 \tag{19}$$

τ_{*ck0}は粒径d_kの均一粒径の場合の限界無次元掃流力で岩垣式から算定する．

各粒径階の水深平均浮遊砂濃度c_kは以下の移流拡散方程式により計算する．なお，拡散項は省略した表記である．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c_k h}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{u^{\xi} c_k h}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u^{\eta} c_k h}{J}\right) = \frac{q_{suk} - w_{fk} c_{bk}}{J} \tag{20}$$

また，各粒径階の土砂沈降速度はRubeyの式[11]により求める．河床近傍の浮遊砂濃度は，濃度分布に指数関数を仮定して以下のように求める．

$$c_{bk} = \frac{\beta_{ck} c_k}{1 - \exp(-\beta_{ck})} \tag{21}$$

ここに，

$$\beta_{ck} = \frac{6 w_{fk}}{\kappa u_{*k}} \tag{22}$$

であり，κ：カルマン定数である．

（３）二次流の発達・減衰を考慮した二次流モデルの導入

二次流とは主流と直交した方向に生じる流れである．河川においては特に湾曲部において遠心力と圧力のアンバランスにより生じる第一種二次流が，湾曲部，蛇行流路の流れと河床変動に大きな影響を持つことが知られている．二次流は三次元的な流れ構造であり，平面二次元モデルにおいてこの影響を考慮するためには，何らかのモデルが必要となる．従来，二次流が河床変動に与える影響については，Engelund[12]が提案したような，一様湾曲水路における定常流場から導かれる二次流分布を用いて，掃流砂の移動方向を修正するモデルが用いられている場合が多く，Nays2Dにおいても同様の扱いがなされてきた．一方，流れの方程式に対して直接二次流の影響を考慮するモデル[13]や，二次流の発達・減衰を考慮したモデルも開発されている[14,15]．これらのモデルは河川における流れ，河床変動をより精度よく計算しようとするものであるが，モデル化の出発点は湾曲水路を対象としており，種々の条件においてどの程度の適用性があるかははっきりしない．特に，Nays2Dはフリーソフトとして広く一般に公開されているため，モデルがどのような場においてどのような結果を与えるかについて十分議論しておくことは，ユーザーがモデルを選択，使用する際に重要な指針となる．

本節では，二次流モデルをEngelundモデルから二次流の発達・減衰を考慮したモデルへと拡張し，その適用例として河川が潜在的に有する不安定現象である自由砂州を取り上げ，モデルの性質を実験結果と線形安定解析結果との比較を通じて議論する．

a）計算モデル

Nays2Dでは，デカルト座標系から一般座標に変換された基礎式を用いている．しかしここでは，解析の簡便さを考え，Nays2Dが持つモデルの特性を失わない程度に式を簡略化したうえで検討を行う．なお，流砂量式等もNays2Dに搭載されるモデルとは多少異なるが，ここで議論する点については，本質的には影響しない．

流れの方程式は以下に示すデカルト座標系における二次元浅水流方程式である．

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial uh}{\partial x}+\frac{\partial vh}{\partial y}=0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial x}-C_f\frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{h} \tag{24}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial H}{\partial y}-C_f\frac{v\sqrt{u^2+v^2}}{h} \tag{25}$$

ここに，x, y : デカルト座標，u, v : x, y方向の水深平均流速，H : 水位及びC_f : 河床抵抗係数で，マニング則を適用して次式で評価する．

$$C_f=\frac{gn_g^2}{h^{1/3}} \tag{26}$$

ここに，ng : マニングの粗度係数である．

掃流砂量式は，主流方向の全流砂量を線形化された[16]Kovacs and Parker式[4]，横断方向流砂量式を長谷川の式[17]で求める．なお，粒径は均一粒径であるとする．

$$\frac{q_{bs}}{\sqrt{\Delta gd^3}}=\frac{a^{1/2}}{\mu_k}\left[\tau_*-\tau_{*c}\left(1+\frac{1}{\mu_k}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\right]\left[\tau_*^{1/2}-\tau_{*c}^{1/2}\left(1+\frac{1}{2\mu_k}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\right]\Bigg/\left(1+\frac{1}{\mu_k}\frac{\partial z}{\partial s}\right) \tag{27}$$

$$q_{bn}=q_{bs}\left(\frac{u_n^b}{V^b}-\frac{1}{\mu_k}\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}}\frac{\partial z}{\partial n}\right) \tag{28}$$

ここに，s, n : 水深平均流速の局所流線直交座標軸，q_{bs}, q_{bn} : s, n方向の流砂量，u^b_n : 流線に直角方向の平均流速である．上付き添え字 b は河床近傍の値を意味する．Kovacs and Parker[4]は上記流砂量式の導出過程において，土粒子の動摩擦係数はほぼ一定で，かつ土粒子の静摩擦係数と大きく異ならないとしている．長谷川による横断方向流砂量式[17]には，土粒子の静摩擦係数と動摩擦係数が用いられているが，ここでは解析における土粒子の物性を示すパラメータを明確にするため，Kovacs and Parkerと同様に土粒子の静摩擦係数μ_sを動摩擦係数μ_kで近似した．また，a : 河床近傍の流速とせん断力の関係を示す係数であり，実際には流れと河床摩擦の関係より計算すべきであるが，本研究では芦田・道上式[3]にならい係数$a^{1/2}/\mu_k$ を17とおいた．これらをx, y方向に変換してx, y方向の流砂量を求め，それを基に以下のExner方程式により河床高さを更新する．

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{1}{1-\lambda_p}\left(\frac{\partial q_{bx}}{\partial x}+\frac{\partial q_{by}}{\partial y}\right)=0 \tag{29}$$

二次流の影響は式(28)のu_n^bに含まれており，これをどのように評価するかが問題となる．ここでは，まず従来Nays2Dで用いられてきたEngelund[12]による二次流モデルについて説明する．

Engelundは，一様湾曲水路における定常流解析から，二次流解を導いた．その時，二次流分布は六次関数で表現され，河床近傍の二次流流速は以下のように求めることができる．

$$u_b^n=u_b^s N_*\frac{h}{r} \tag{30}$$

ここに，N_*は二次流分布により決まる定数であり，Engelundによると7である．また，rは流線の曲率半径であり次式で求める．

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{V^3}\left[u\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+v\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{31}$$

ここに，u, v : x, y方向の水深平均流速，$\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$: 座標変換のマトリックスである．

一方，二次流の発達・減衰を考慮するためには，従来二次流を主流方向の渦度を考え，主流方向の水深積分渦度方程式と関連させる方法がとられており[14,15]，ここでも同様のモデルを用いる．水深積分された主流方向の渦度方程式は，主流と二次流の鉛直方向分布にEngelundモデルを用いると次式となる．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\lambda_v A_n\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(u^s u_n^s-u^b u_n^b\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v^s u_n^s-v^b u_n^b\right)\\&\qquad=\frac{1}{r}\left(u_s^2\,|^s-u_s^2\,|^b\right)=A_n\frac{V}{\chi_1^3 h}\left(\chi^2+\frac{7}{12}\chi+\frac{1}{12}\right)\end{aligned} \tag{32}$$

ここに，A_nは二次流強度であり，上付き添え字s, bはそれぞれ水面，底面の値を意味し，下付き添え字s, nはそれぞれ主流方向，主流と直交方向の軸を示す．また，式中の係数，流速は以下のようになる．

$$\lambda_v=-\frac{1}{\alpha\chi_1^3}\frac{V}{u_*}\left(\frac{1}{12}\chi^2+\frac{11}{360}\chi+\frac{1}{504}\right) \tag{33}$$

$$u_s^b=V\frac{\chi}{\chi_1},\quad u_s^s=V\frac{\chi+1/2}{\chi_1} \tag{34}$$

$$u_n^b=A_n\frac{\chi}{\alpha^2\chi_1^2}\left(\frac{2}{45}\chi+\frac{4}{315}\right) \tag{35}$$

$$u_n^s=-A_n\frac{1}{\alpha^2\chi_1^2}\left(\frac{7}{180}\chi^2+\frac{1}{56}\chi+\frac{1}{504}\right) \tag{36}$$

$$\chi_1 = \alpha \frac{V}{u_*}, \quad \chi = \chi_1 - \frac{1}{3}, \quad \alpha = \frac{\kappa}{6} \tag{37}$$

式（32）の水深平均渦度方程式を用いて二次流強度の時空間変動を計算し，これを式（34）の第一式に代入することで，二次流の発達・減衰を考慮した底面付近の二次流流速を求めることができる．この二次流流速は，Engelundモデルにおける式（30）と対応しており，以下の関係にある．

$$u_s^b N_* \frac{h}{r} = A_n \frac{u_s^b}{V} \frac{1}{\alpha^2 \chi_1} \left(\frac{2}{45}\chi + \frac{4}{315} \right) \tag{38}$$

二次流強度は一様湾曲流における平衡状態の二次流を考えれば，

$$A_n = V \frac{h}{r} \tag{39}$$

であるから，N_*は以下のように求まる．

$$N_* = \frac{1}{\alpha^2 \chi_1} \left(\frac{2}{45}\chi + \frac{4}{315} \right) \tag{40}$$

このようにN_*は二次流の分布形より決定される係数であり，流速係数等により変化するが，Engelundはα=0.077とし，実用的な近似としてN_*=7を与えている．式（32）に示す主流方向渦度の発展方程式を解き，これを二次流強度と結びつけることにより，二次流の発達や減衰といった非平衡的な二次流の挙動を近似的に表現できると考えられる．すなわち，式（32），（34）を用いることは，従来用いられていた式（30）と二次流分布形はほぼ同じ相似形を仮定し，二次流強度によって，掃流砂の移動方向に対して二次流の発達減衰を考慮しているということになる．

このような二次流の発達・減衰を考慮することは，特に波長の短い流線湾曲に対する二次流の見積もりに効果的である．すなわち，波長が短い流線湾曲に対して二次流は十分に発達することができないため，掃流砂移動に対する二次流の影響は小さい．しかし，そのような波長の短い局所的な流線湾曲に対して, Engelundモデルのような平衡状態の二次流を仮定すると, その影響を過大評価することになる．水深平均渦度方程式を利用し，二次流の発達・減衰を考慮することで，波長の短い流線曲りに対する平衡状態に達しない二次流の影響を合理的に考慮することができるようになり，過剰に二次流効果が作用しなくなることが期待される．

表1　数値計算で対象とする渡邊・桑村[18]による砂州形成実験S-50の実験条件

流量 (l/s)	水路幅 (m)	水路勾配	土粒子粒径 (mm)	等流水深 (m)
10.35	0.9	1/80	0.76	0.0202

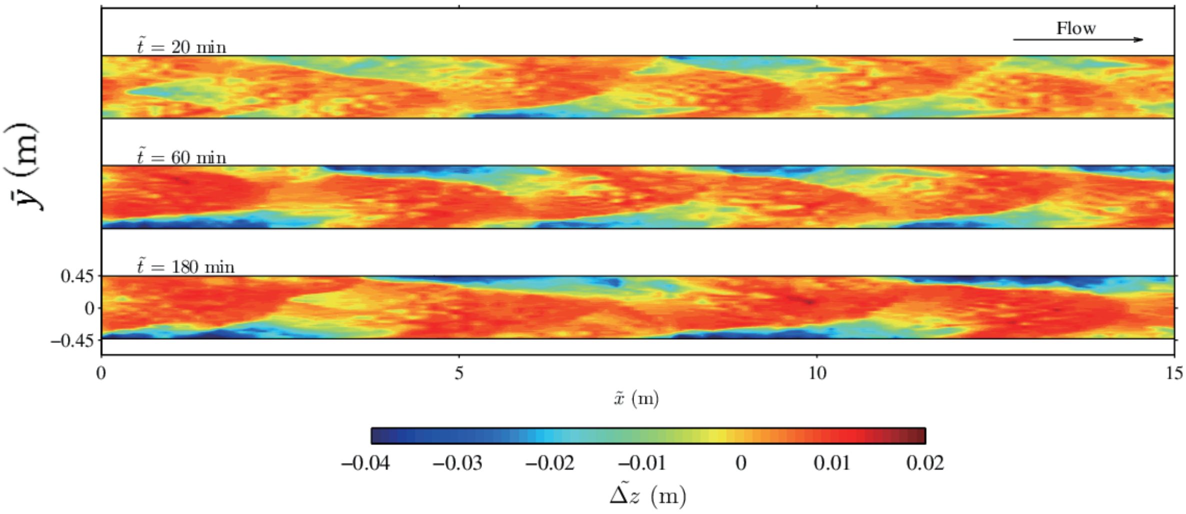


図1　渡邊・桑村18)による砂州形成実験S-50における砂州形状の時間変化

b）計算条件と計算ケース

以上説明したモデルを渡邊・桑村[18]により行われた定常砂州形成実験S-50に適用してモデルの性能を評価する．対象実験は，長さ50mの水路において**表1**に示す条件のもと行われ，**図1**のような砂州の変化が得られている．図より，実験通水初期から明確な交互砂州が発達していることがわかる．また，本ケースでは初期に発達した交互砂州は次第に波長を伸ばしながら発達していく様子が確認できる．ここでは，二次流モデルの違いにより以下のようにモデルを定義し，それらの結果を比較する．

・Model 1: 二次流を考慮しないモデル

・Model 2: Engelund による一様湾曲流から導かれる二次流解を用いて流砂移動方向を補正するモデル

・Model 3: 水深平均渦度方程式を解き，二次流の発達・減衰を考慮して流砂移動方向を補正するモデル

以上のモデルを**表1**と同一の水理条件に適用する．本研究では砂州発生のトリガーとしては，初期河床には擾乱を与えず, 上流端の流量に対して0.1% 程度のランダムな擾乱を横断方向に与え続けることとした．その結果，砂州発生に要する水路長が実験よりも長くなったため，水路長を120mと設定した．なお，計算格子幅は両方向ともに0.025mと設定している．

c）計算結果

図2～4に，Model 1～3により得られた砂州の形成・発達過程を示す．なお，可視化している区間は，上流端から80～95m の区間であり，砂州形態の変化が顕著な時点を抽出している．まず，砂州の定性的な発達過程と砂州モードについて着目する．Model 1による結果を見ると初期にモード1の河床擾乱が発達し，それが次第に交互砂州へと成長していく様子がわかる．一方，Model 2では，初期に8 列程度の擾乱が発達するものの，その後有意な波高を持つ複列砂州に移行し，最終的には明確な交互砂州が形成されている．Model 3では，計算初期にはモード2 の砂州が発達するが，これは直ちに交互砂州へと移行した．これらの結果より，採用する二次流モデルによって初期に発達する砂州の卓越モードが変化することがわかる．これは，二次流モデルの差異が流れ－砂面間の不安定現象である自由砂州の初期発達に影響を及ぼすことを示している．

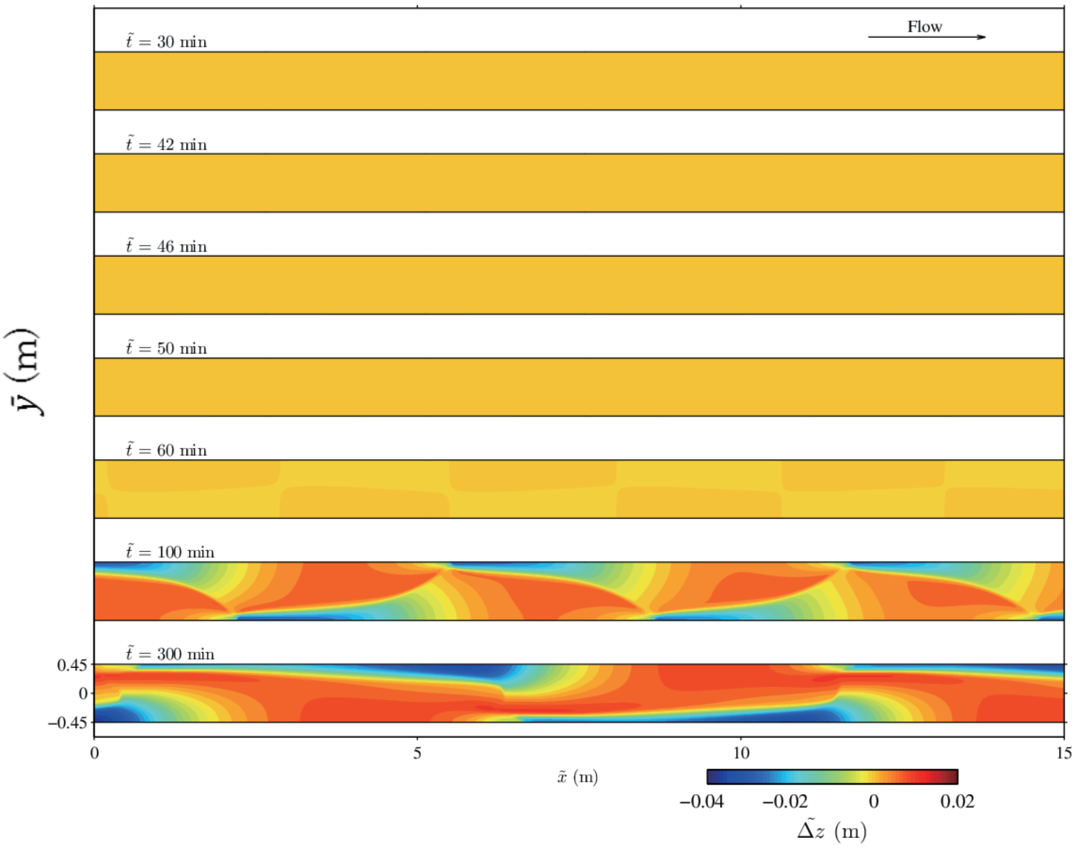


図2　Model 1による地形変動量の計算結果．格子幅は両方向ともに0.025m である．

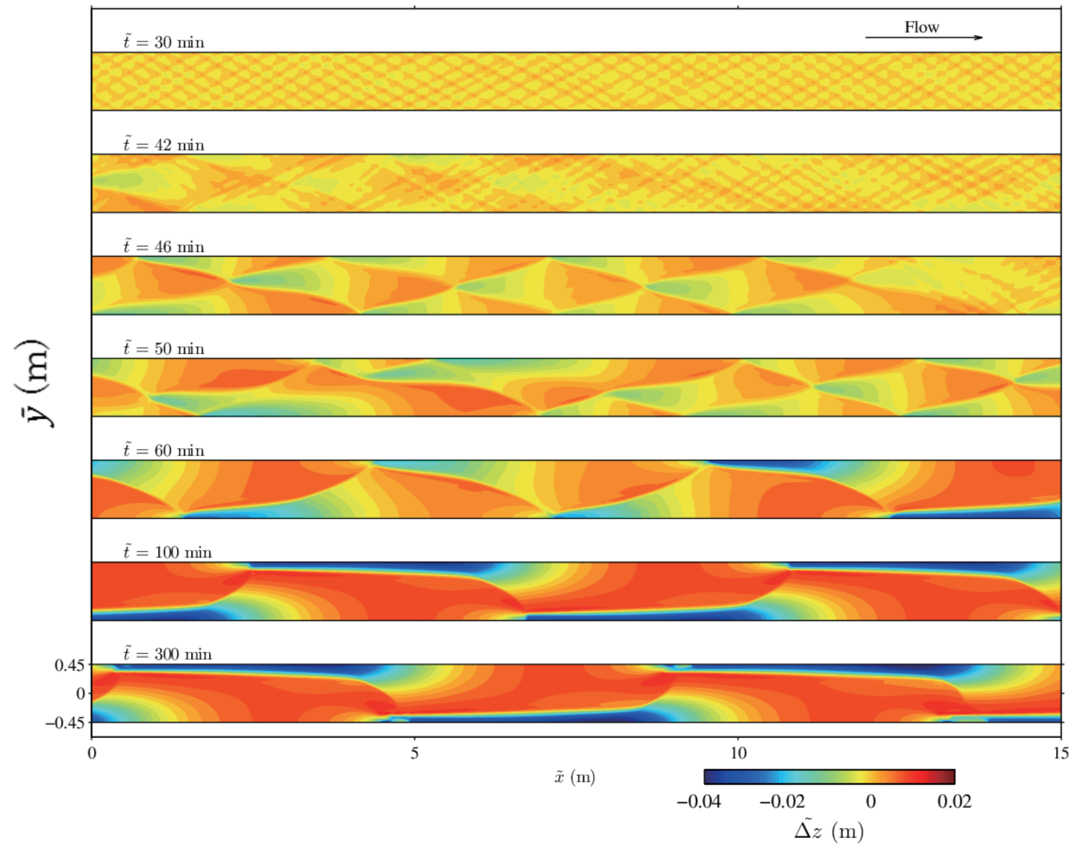


図3　Model 2による地形変動量の計算結果．格子幅は両方向ともに0.025m である．

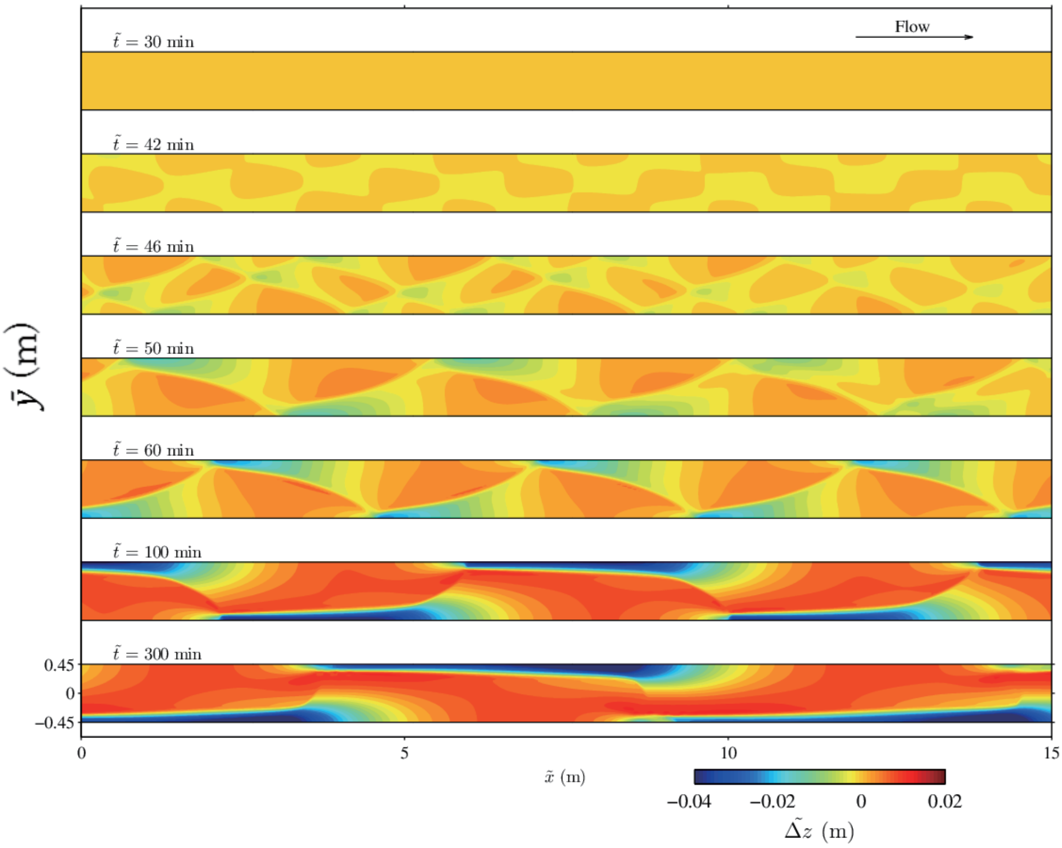


図4　Model 3による地形変動量の計算結果．格子幅は両方向ともに0.025m である．

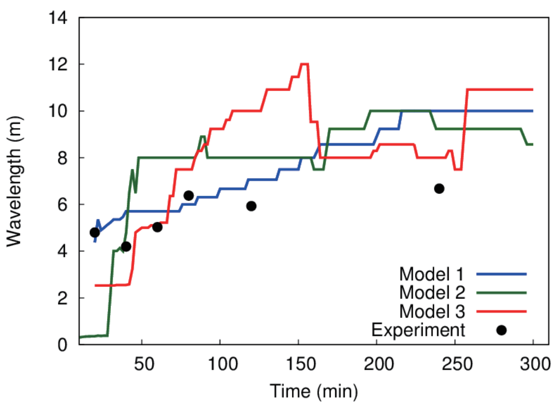


図5　数値計算と実験における砂州波長の比較

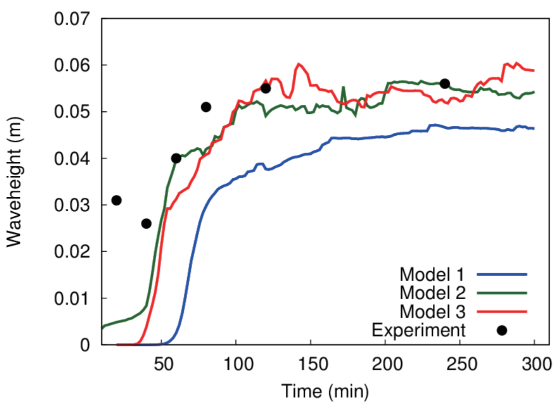


図6　数値計算と実験における砂州波高の比較

次に，実験と数値計算により得られた砂州波長と波高について比較する．砂州波長は左岸と右岸の河床変動量に対して高速フーリエ変換を行い，最大のパワーを示す波長を両者で平均することで求めている．一方波高については，まず平衡領域の値を抽出するために，上流端から60〜110mの範囲の河床変動量に対して，ゼロアップクロス法により砂州の一波長を求める．この一波長内の最大と最小の河床位の差を波高と定義し，これを領域内で平均することで砂州波高を算出している．**図5**は，実験と各モデルにより得られた砂州波長の変化を示したものである．計算結果を見ると，コンター図に示したように初期に発達した波長の短い砂州が，波長を徐々に伸ばしていく様子がわかる．計算における最終的な砂州波高は8〜10m程度であり，実験値を過大評価している傾向にある．また，計算における砂州波長は最終的にただ一つの波長とはならず，周期的に変動しているように見えるが，概ね平衡状態に至っていると

みなすことができる．

図6は，実験と各モデルにより得られた砂州波高の変化を示したものである．数値計算では，河床や流れに対する擾乱が実際よりも小さいために，波高の成長時刻は実験よりは遅いことがわかるが，次第に発達していき概ね平衡値となることが確認できる．各モデルの結果を比較すると，Model 1 の平衡砂州波高がModel2，3 よりも小さくなっており，二次流の考慮により平衡砂州波高が大きくなる従来の知見と同様の結果が得られている．平衡砂州波高については動摩擦係数の値にも影響を受け，μ_kが大きいほど河床勾配の影響が小さくなり，平衡砂州波高は大きく算定される傾向にある．本研究では，動摩擦係数の評価を静摩擦係数である土粒子の安息角のタンジェントで近似している．動摩擦係数は静摩擦係数より小さいと考えるべきであるから，本研究で設定している安息角35 °に相当する動摩擦係数は，物理的に適切な値の範囲内，もしくは多少過大評価しているといえるだろう．そのような値の範囲であっても，二次流を考慮しないModel 1が平衡砂州波高を過小評価していることは，砂州波高の再現性に対する二次流モデルの重要性を示すものとも考えられる．このような事実を踏まえるとModel 3 に示す二次流の発達・減衰を考慮したモデルを用いることは，平衡砂州波高の再現性という観点から合理的であると考えられる．

d）計算結果と線形安定解析の比較による数値計算モデルの評価

数値計算結果より，採用する二次流モデルにより，砂州の初期発達過程や砂州波長・波高に影響を与えることが示された．数値計算結果と実験結果を比較することにより，再現性に関する検討は可能であるが，計算モデルの方程式自体が持つ性質を明確に示すことは簡単ではない．そこで，方程式に対して線形安定解析[16,19,20]を行い，二次流モデルが自由砂州の初期形成過程に与える影響について明らかにする．まず，流れの方程式に準定常近似を適用して時間微分項を無視したうえで，変数に対して以下の無次元化を導入する．

$$\left(x^*, y^*, r^*\right) = B\left(x, y, r\right) \tag{41}$$

$$\left(u^*, v^*\right) = u_0\left(u, v\right) \tag{42}$$

$$\left(h^*, z^*\right) = h_0\left(h, z\right) \tag{43}$$

$$A_n^* = \frac{u_0}{\beta} A_n \tag{44}$$

$$\left(q_{bx}^*, q_{by}^*\right) = q_{b0}\left(q_{bx}, q_{by}\right) \tag{45}$$

$$t^* = \left(1 - \lambda_p\right)\frac{h_0 B}{q_{b0}} t \tag{46}$$

$$q_{b0} = \frac{a^{1/2}}{\mu_k}\left(\tau_{*0} - \tau_{*c}\right)\left(\tau_{*0}^{1/2} - \tau_{*c}^{1/2}\right)\sqrt{\Delta g d^3} \tag{47}$$

$$\beta = \frac{B}{h_0},\ \tau_{*0} = \frac{C_{f0} u_0}{\Delta g d},\ C_{f0} = \frac{g n_g^2}{h_0^{1/3}} \tag{48}$$

ここに，B：水路半幅であり，下付き添え字0は等流状態の値を示し，上付き*は無次元変数を意味する．方程式を無次元化後，以下の線形化を行う．

$$\left(u^*, v^*, h^*, z^*, A_n^*\right) = \left(1,0,1,-i_b \beta x^*, 0\right) + \left(u_1^*, v_1^*, h_1^*, z_1^* A_{n1}^*\right) \tag{49}$$

ここに，i_b：水路勾配である．無次元化と線形化により，結果として以下の線型方程式が得られる．

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial h_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} = 0 \tag{50}$$

$$F_r^2 \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} = -\frac{\partial h_1^*}{\partial x^*} - \frac{\partial z_1^*}{\partial x^*} - C_{f0} F_r^2 \beta \left(2u_1^* - \frac{4}{3} h_1^*\right) \tag{51}$$

$$F_r^2 \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} = -\frac{\partial h_1^*}{\partial y^*} - \frac{\partial z_1^*}{\partial y^*} - C_{f0} F_r^2 \beta v_1^* \tag{52}$$

$$\frac{\partial z_1^*}{\partial t^*} + \theta_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} + \left(1 + i_b \gamma_0\right) \frac{\partial v_1^*}{\partial y^*} - \frac{\theta_1}{6} \frac{\partial h_1^*}{\partial x^*} + \frac{\chi_1}{\chi} \frac{C_{nb}}{\beta} \frac{\partial A_{n1}^*}{\partial y^*} = \frac{\theta_2}{2\mu_k \beta} \frac{\partial^2 z_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\Theta^{1/2}}{\mu_k \beta} \frac{\partial^2 z_1^*}{\partial y^{*2}} \tag{53}$$

$$\frac{1}{\chi_1 \beta}\left[\left(\chi + \frac{1}{2}\right) C_{ns} - \chi C_{nb}\right] \frac{\partial A_{n1}^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\chi_1^2}\left(\chi + \frac{1}{4}\right) \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} - C_s A_{n1}^* = 0 \tag{54}$$

ここに，

$$F_r = \frac{u_0}{\sqrt{g h_0}},\ \Theta = \frac{\tau_{*c}}{\tau_{*0}},\ \gamma_0 = \frac{1}{\mu_k} \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_{*0}}} \tag{55}$$

$$\theta_1 = \frac{3 + \Theta^{1/2}}{1 - \Theta},\ \theta_2 = \frac{2 + \Theta^{1/2} + \Theta}{1 - \Theta} \tag{56}$$

$$C_{nb} = -\frac{\chi_1}{\alpha^2}\left(\frac{2}{45}\chi + \frac{4}{315}\right),\ C_{ns} = -\frac{\chi_1}{\alpha^2}\left(\frac{7}{180}\chi^2 + \frac{1}{56}\chi + \frac{1}{504}\right),\ C_s = \frac{1}{\chi_1^3}\left(\chi^2 + \frac{7}{12}\chi + \frac{1}{12}\right) \tag{57}$$

である．これらの線型方程式に対して，1次の擾乱を以下のようにおく．

$$\begin{aligned} \left(u_1^*, h_1^*, z_1^*\right) &= e^{\Omega t} E_1 S_m \left(U_1, H_1, Z_1\right) + c.c \quad (m = even) \\ &= e^{\Omega t} E_1 C_m \left(U_1, H_1, Z_1\right) + c.c \quad (m = odd) \end{aligned} \tag{58}$$

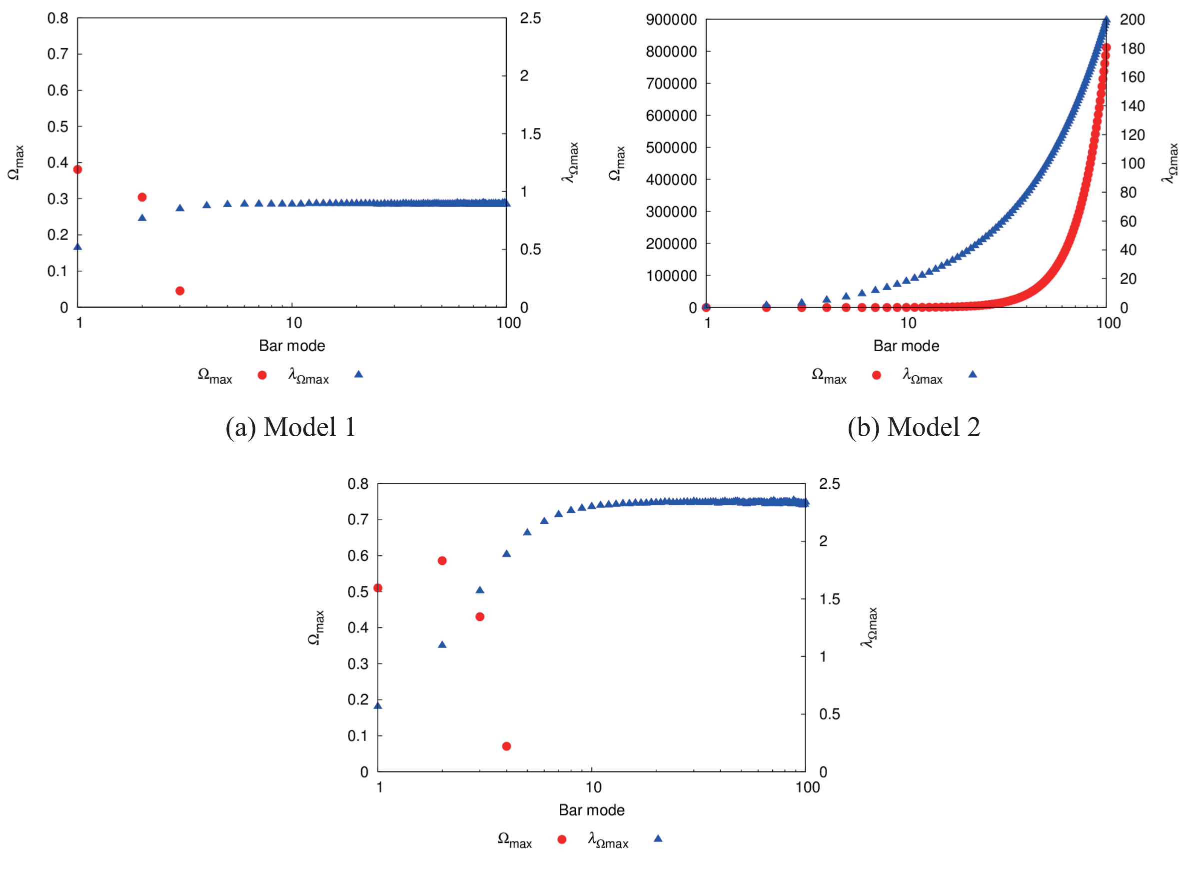
$$\begin{aligned} \left(v_1^*, A_{n1}^*\right) &= e^{\Omega t} E_1 C_m \left(V_1, A_1\right) + c.c \quad (m = even) \\ &= e^{\Omega t} E_1 S_m \left(V_1, A_1\right) + c.c \quad (m = odd) \end{aligned} \tag{59}$$

ここに，

$$E_1 = e^{i\left(\lambda x^* - \omega t^*\right)},\ S_m = \sin\left(m \frac{\pi}{2} y^*\right),\ C_m = \cos\left(m \frac{\pi}{2} y^*\right) \tag{60}$$

であり，Ω：砂州増幅率，ω：角速度，λ：無次元波数，m：砂州モードである．また，$c.c$は複素共役

数である．擾乱を線型方程式に代入して，ノーマルモード解析によって砂州不安定性について明らかにすることができる．

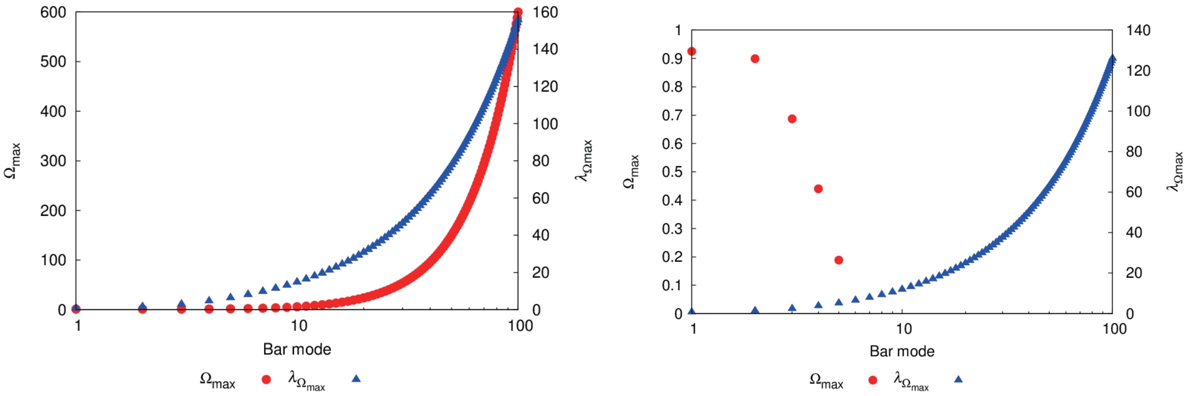


(a) Model 1　(b) Model 2　(c) Model 3

図7 (a) Model 1, (b) Model 2, (c) Model 3の各砂州モードにおける最大増幅率Ω_{max}とその時の無次元波数λ_{max}の関係．F_r=1.27，Θ = 0.17，β = 22.2，i_b=0.0125

図7は，それぞれのモデルにより得られる各砂州モードでの砂州増幅率の最大値Ω_{max}と最大増幅率の時の無次元波数λ_{max}である．図において増幅率が正の場合，そのモードの砂州不安定を持つことを意味し，その中でも増幅率が最大となるモードとそれに対応する無次元波数を持つ砂州が河床面に現れると考えられる．二次流の影響を考慮しないModel 1では，最大増幅率を持つ横断方向モードは1であり，交互砂州に相当する不安定性を持っていることがわかる．一方，一様湾曲水路における二次流解により土砂移動方向を補正したModel 2では，横断方向モードが大きいほど，最大増幅率が大きくなる．図よりすべてのモードにおいて最大増幅率が正であるため，この結果は最も成長率が大きい砂州モードが無限大になることを意味している．すなわち，高次モードの砂州ほど初期に発達しやすいことになり，Model 2は高波数領域の不安定性が強いモデルであることがわかる．最後に，水深平均渦度方程式を解くことにより，二次流の発達・減衰を考慮したModel 3における理論解析結果を見ると，モード2の砂州が最大増幅率を持つことがわかる．Model 1と比較して，卓越砂州モードが変化すること，モード4でも不安定性を持つという違いがあることがわかるが，Model 2にみられるような高次の砂州モードほど増幅率が最大となる問題に関しては解決されていることがわかる．これは波長の短い擾乱に起因する二次流が発達しえないことが，物理的に考慮されたためと考えられる．

このように線形安定解析から示された卓越砂州モードは，Model 2以外では計算結果と一致している．Model 2においては，卓越砂州モードが無限大になるため，数値計算では使用した格子で解像可能なモードである8列の砂州が形成されたと考えられる．このようにModel 2の二次流の取り扱いは，微小な砂州不安定性を励起する不安定なモデルであると同時に，初期砂州発達過程に対する格子解像度依存性が大きいモデルであることがわかる．このような高次の砂州モードが実際に現れているか否かを示す実験データは存在しないため，Model 2の不安定性が非物理的であるかどうかは本研究からは不明であるが，自由砂州の再現という観点からは，Model 2のような二次流の取り扱いは極力避けるべきと考えられる．



(a) $\mu_k = 0.7$　　(b) $\mu_k = 0.58$

図8　Model 2 の線形増幅率に及ぼすμ_kの影響．水理条件は，*Fr*=0.8，Θ=0.43，β = 22.5，i_b=0.005 である．

ここで，Model 2が持つ自由砂州に対する不安定性について考察する．**図7(b)**に示す各モデルによる砂州不安定性の比較より，二次流を考慮することで，高次モードの自由砂州の不安定性が励起されるようである．一方で，従来Nays2Dで採用されているModel 2においても，本研究で示されたような高次モードの砂州不安定性がみられない場合も多い．これは，水理条件によっては二次流による砂州不安定性が顕在化しないことを示している．横断方向流砂量式より，土砂の移動方向には二次流による流速だけでなく，横断方向の河床勾配が大きく影響する．この横断方向河床勾配の影響は，線形レベルでは式（53）の右辺第2 項に示す横断方向の拡散項に現れ，河床を平坦にしようとする安定成分であることがわかる．従って，流砂移動方向に対する横断方向河床勾配の影響が強い場合，二次流による不安定性が抑制される可能性がある．そこで横断方向河床勾配の影響について以下に簡単な検討を行う．

局所勾配項の大きさに影響を持つのは，土粒子の動摩擦係数μ_kと規格化限界シールズ数Θである．そこで，ある水理条件においてμ_kの値を変化させ，Model 2 における各砂州モードの最大砂州増幅率とその時の無次元波数を比較したものを**図8**に示す．**図8(a)**より，μ_kが相対的に大きく，河床勾配の影響が小さい場合，**図7(b)**と同様に，高次モードの砂州ほど増幅率が大きくなり，それに対応して無次元波数も大きくなっている．一方，**図8(b)**に示すようにμ_kが相対的に小さく，河床勾配の影響が大きい場合の結果を見ると，増幅率が正となる砂州モードは5 までであり，それ以上のモードを持つ砂州は安定である．この結果より，Model 2 においてもμ_kが小さく横断方向河床勾配の影響が大きくなるケースでは，最大増幅率を持つ卓越砂州モードが無限大にならない場合もあることがわかる．一方で，本研究で対象とした実験はシールズ数が比較的大きくΘが小さいため，横断方向河床勾配の影響が小さく，横断方向河床勾配に起因する河床の拡散作用が小さいために，二次流による不安定性が結果に大きく現れたものと考えられる．横断方向流砂量式には，数多くのモデルが提案されているが，その多くは式（28）と同様に，土粒子の摩擦係数に起因する係数とΘのべき乗に依存する式形となっている．摩擦係数が小さければ，

勾配の影響が大きくなり，特に波長の短い砂州を拡散させるような作用が強くなる．また，Θのべき乗数は0.25〜1 程度の式が多いが[17, 21, 22]，べき乗数が小さいほど，シールズ数の増加に対する河床勾配項の減少度合が緩やかとなる．Θのべき乗数が小さく，局所勾配の影響が相対的に大きく考慮される式形の方が，河床を安定させる効果が大きく，二次流モデルの相違が砂州モードに及ぼす影響が小さくなると予想される．

次に線形安定解析から得られる波長と数値計算結果の比較を行う．なお，数値計算における初期に発達した砂州のモードと波長の判定は，**図6**に示す砂州波高が水深の1%程度の時点で行うこととした．理論値と計算値の比較を**表2**に示す．表よりModel 1，3については卓越モードは理論値と一致し，砂州波長については線形安定解析より得られる卓越砂州波長と近い値であることがわかる．高速フーリエ変換における有限数のデータから波長を推定することによる精度を考えると，理論値と計算値は良好に一致しているといえる．また，Model 2においてもモード8 の理論卓越波長は0.2m程度であり，格子解像度の影響を考えれば，理論との整合性は良好である．このように，本研究で用いた数値計算モデルは理論解析から示される方程式系が持つ砂州不安定性を良好に表現していることがわかる．

最後に，砂州の発達過程について波長と波高の変動より調べていく．Model 1では，初期に発達したモード1の河床擾乱が次第に交互砂州に発達していくが, その波長と波高の変動過程は他モデルの結果と比較して緩やかである．つまり, Model 1ではあくまでも初期に発達した交互砂州をベースとして砂州が発達している．一方，Model 2，3では，最終的な砂州形状は交互砂州であるが，計算初期には高次の砂州モードが現れる．Model 3では, 複列砂州から交互砂州に移行するモード減少が起こることで, 砂州波長, 波高ともに段階的に変化していることがわかる．Model 2については，まず砂州モードが8→2 に急激に変化したのち，Model 3 と同様の過程で砂州モードが変化する．8→2 への変化については，よく知られている砂州モードの減少過程とは幾分異なる．すなわち，モード8の砂州状の不安定成分は，初期増幅率が最大であっても，その波高が大きくない．泉・Pornprommin[16]は，

表2　線形安定解析による理論卓越砂州モードと波長，及び数値計算における初期の卓越砂州モードと波長の比較．

	理論卓越砂州モード	理論卓越砂州波長 (m)	数値計算における初期の砂州モード	数値計算における初期の砂州波長 (m)
Model 1	1	5.49	1	5.72
Model 2	∞ (8)	- (0.205)	8	0.31
Model 3	2	2.58	2	2.55

数値計算における卓越モードと波長の判定は，図6に示す波高が水深の1%に達した時点で行った．なお，Model 2の理論卓越砂州モードは無限大であるが，数値計算で得られる砂州との比較を行うために，モードが8 の砂州波長についても明記してある．

振幅展開法を適用した弱非線形解析により，交互砂州のみならず多列砂州の理論波高を求め，高次の砂州ほど波高が低いことを示している．従って，波高の低い高次モードの砂州不安定性は，低次モードの砂州に対しては単に発達のトリガーとなる擾乱成分のように振る舞い，最終的な結果に対する影響が大きくなかったものと考えられる．しかしながら，Model 2の取り扱いでは，格子解像度により解像し得る砂州モードが異なる．そのため格子解像度によっては表現可能な最大モードがそれほど大きくならずに，波高が比較的大きな砂州が計算されてしまう場合も起こり得る．実現象としては例えば，多列砂州

から網状流路に至る過程においては，初期に発達した砂州が浮洲化することで流路網にいたるため[23, 24]，モデルの選択には注意が必要である．

e）まとめ

本節は，平面二次元浅水流方程式と平衡流砂量を基本とした地形変動モデルにおいて，二次流のモデル化の違いが自由砂州の計算に与える影響について，線形安定解析，数値計算及び実験との比較を通じて検討を行ったものである．得られた結論を以下に示す．

・線形安定解析により，底面近傍の横断方向流速に一様湾曲流を仮定した二次流解を適用した場合，水理条件によっては卓越砂州モードが無限大になる場合があることが示された．特に，横断勾配の影響が相対的に小さい条件では二次流による砂州不安定性が顕在化する場合がある．
・二次流の発達減衰を考慮したモデルを用いることにより，卓越砂州モードが無限大になる不安定性を物理的に抑制することができる．ただし，二次流を考慮しない場合とは卓越砂州モードが異なる場合がある．
・二次流の発達・減衰を考慮することで，二次流モデルの適用に起因する高次モードの砂州不安定性を抑制しつつ，二次流による砂州波高増大効果を物理的に取り込むことができる．
・二次流モデルの組み込みにより，自由砂州の卓越砂州モードと波長は変化する場合があるため，多列砂州やこれを起源とした網状流路の計算を行う際にはモデルの選択に注意を払う必要がある．

ここでは，二次流モデルが自由砂州の形成・発達に及ぼす影響を明確に示すために，直線水路において検討を行ったが，自由砂州は流体 - 砂面間に生じる不安定現象であり，本研究で示した知見は平面二次元モデルによる移動床の計算に対して広く適用可能であると考えられる．特に，平面二次元モデルによる蛇行流路の河床変動計算においては，二次流のモデル化は必須である．本研究で示した二次流の発達・減衰を考慮したモデルは，自由砂州の発生に対して高次モードの砂州の発達を抑制しつつ，二次流による内岸側の固定砂州の形成と外岸側の洗掘を表現するのに有効であると考えられる．

（４）プログラムの並列化による計算効率の向上

数値計算を行う上で一つの大きな問題は計算時間である．近年の計算機と数値計算法の発達により，二次元計算も実用的に実施可能な状況にある．しかし，観測技術の進歩に伴い，計算に入力可能なデータはますます大規模化，高精度化が進むと考えられる．このようなデータを積極的に利用しようとする場合，計算領域の拡大や高解像度格子の使用により，著しく計算機負荷が増加し，実用的な計算時間で解析を行うことが難しい場合も多いと考えられる．一方，発熱量等の問題からCPUクロック数の大幅な増加が見込めず，単一CPUを使った場合の計算時間の短縮が難しい中，現在は複数コアを用いた並列計算によって計算効率を上げる方法が主流である．本節では，Nays2Dを共有メモリ型のコンピュータによる計算を対象として，比較的容易に実装可能であるOpenMP[25]を用いて並列化し，並列化による計算時間の短縮，コア数の変化による計算効率の変動並びにそれらに及ぼす計算規模の影響について説明する．

a）検討条件

計算効率の比較としては単純場として，波長10m，幅0.9m，最大蛇行角30°，水路勾配0.005のsine-generated curve水路を対象とした．計算条件は，流量6.4 l/s，マニング粗度0.0135，河床材料粒径0.76mmを設定した．この条件で，横断方向格子数を32，一波長あたりの格子数を65で固定し，波数を増加させることで格子数を増やし，計算のスピードアップについて検討した．ただし，連続式と運動方程式の繰

り返しは行わず，完全陽解法とした．上記の検討には，Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2687w (2 Processor，物理コア数16，クロック数3.1GHz)，メモリ32GB，64bitシステムを有する計算機を用いた．ここで，並列化の計算性能を評価するために，以下のスピードアップ(Speed up)と計算効率(Efficiency)を定義する．

$$\text{Speed up} = \frac{1\text{コア使用時の計算時間}}{n\text{コア使用時の計算時間}} \tag{63}$$

$$\text{Efficiency}(\%) = \frac{\text{Speed up}}{\text{使用コア数}(n)} \times 100 \tag{64}$$

この定義より，Speed upは並列計算することにより1コアの計算より何倍計算が速いかを示し，計算効率は，Speed upが使用コア数に対する効率度を意味している．

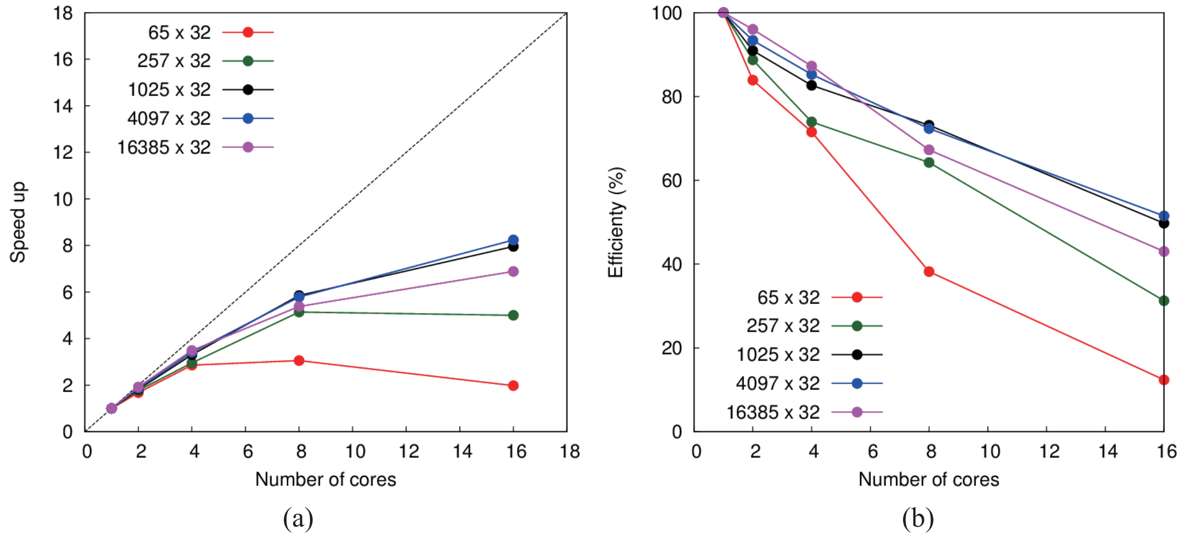


図9 並列化による(a)Speed up,(b)計算効率の検討結果．
(凡例は格子数(i方向×j方向)を示しており，各ケース間で格子数が4倍程度異なるように設定．)

b）結果と考察

各格子数におけるSpeed upと計算効率の推移を**図9**に示す．図より，計算格子数が少ない場合は，コア数を増やした場合の計算効率低下が顕著である．特に，16コアを使用した場合は，8コア時よりもSpeed upは低下し，逆に計算時間がかかる．これは，計算に対して並列化可能な部分が小さいためである．例えば，全計算時間100に対して，90が並列化でき，それ以外が10とした場合，並列化をして、たとえ90が0となったとしても，並列化できない部分が10残るため，いくらコア数を増やしてもSpeed upは最大でも10にしかならない．それどころか，計算に用いるコア数を増やすと，並列化をすること自体で発生する処理時間が顕在化して，余計な時間がかかる．これにより，格子数が少ない場合で，計算効率が低下していると考えられる．このように，並列計算に用いるコア数はむやみに増やすと計算効率の低下を招く場合があり，かえって計算機資源を無駄にする．使用コア数は，使用用途と計算規模によって適切に選択することが，計算時間を最小化させることにつながる．

格子数を増加させると計算効率は大きく向上し，コア数が少ない場合は用いたコア数に近いSpeed upが得られ，コア数が最大の16の場合でも最大で8倍程度のSpeed upとなっている．これは格子数の増加に伴い，全計算時間に占める並列可能な部分が増加したためである．一方，格子数が最大のケースでは，コア数が多い場合にSpeed upが低下し，計算効率が悪くなっていることがわかる．これは，先ほども述

べたように，並列化に伴う処理時間のためであると考えられる．格子数が大きくなれば，その分、並列化することによる処理時間を必要とする．これは特にメモリの同期とアクセス時間によるものと考えられる．この点については，共有メモリを用いた並列化の限界であるとも考えられるが，コーディングにも依存する部分であるため，今後も検討を要する．

c）まとめ

本節では，Nays2DにOpenMPを用いた並列化を導入し，その効果について単純な検討を行った．結果より，コア数が比較的少ない場合は，計算効率も良く，使用したコア数に見合った計算速度の向上が得られている．一方で，格子数が少ない場合，また逆に多い場合は，コアを多くするに従い，計算効率は低下する．これは，計算機資源を失っていることを意味している．従って，並列計算を行う場合は，一つの計算を速く終わらせるのか，多数の計算全体の計算時間を削減するかを考える必要がある．すなわち，計算効率を考慮して各計算に使用するコア数を決めることで，全体として効率的な計算が可能になるといえる．

（５）本章のまとめ

本章では，本年度実施したNays2Dの機能強化について報告した．今回の改良は，これまでユーザーから寄せられた要望に基づくものもあり，ユーザーの利用満足度の向上につながると同時に，今後新たなユーザーの獲得につながると期待される．一方, 機能を充実させせることによる操作の煩雑さについては，ユーザーの反応を見ながら修正やマニュアルの充実により対応する必要がある．また，機能を追加したことにより，適用範囲や対象も広がるといえるが，同時に新たな課題も見えてくると考えられるため，適用事例などを踏まえて、さらなる機能強化を行う必要がある．

参考文献（第２章分）

1) 竹林洋史：河川中・下流域の河道地形，ながれ，第24巻，pp.27-36，2005.
2) Iwasaki, T., Akahori, R., Giri, S. and Shimizu, Y. : Numerical study on the flow and the sedimentation during 2008 flood in the Koshi River in Nepal, Advances in River Sediment Research -Fukuoka et al. (eds)-, pp.2063-2073, 2013.
3) 芦田和男・道上正規：移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究，土木学会論文集，第206号，pp.59-69，1972.
4) Kovacs, A. and Parker, G. : A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol.267, pp.153-183, 1994.
5) Liu, B.Y. : Study on Sediment Transport and Bed Evolution in Compound Channels. Thesis presented to Kyoto University, 1991.
6) 浅田宏・石川晴雄：水流による河床砂礫の分級機構に関する研究（III），電力中央研究所報告，第71015号，1972.
7) 岩垣雄一：限界掃流力の流体力学的研究，土木学会論文集，第41号，pp.1-21. 1956.
8) 渡邉明英・福岡捷二・安竹悠・川口広司：河道湾曲部における河床変動を抑制する樹木群水制の配置方法,河川技術論文集，第7巻，pp.285-290，2001.
9) Itakura, T. and Kishi, T.：Open channel flow with suspended sediments. Proc. of ASCE, HY8, pp.1325-1343, 1980.
10) 沖健・黒木幹男・岸力：混合床上の浮遊砂量算定式の検討，土木学会第40回年次学術講演会講演概要集，pp.415-416，1985.

11) Rubey, W. W.：Settling velocity of gravel, sand and silt particles, Amer. Jour. Sci, Vol.25, pp.325-338, 1933.
12) Engelund, F. : Flow and Bed Topography in Channel Bend, Journal of Hydraulic Division ,ASCE, Vol.100. HY11, pp.1631-1648, 1974.
13) Kalkwijk, J.P. and de Vriend, H.J. : Computation of the flow in shallow river bends, Journal of Hydraulic Research, Vol. 18, No. 4, pp. 327-342, 1980.
14) Johannesson, H., and Parker, G. : Secondary flow in mildly sinuous channel, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 115, No. 3, pp.289-308, 1989.
15) 細田尚・長田信寿・岩田通明・木村一郎：一般座標系での主流と二次流の遅れを考慮した平面二次元モデル，水工学論文集，第44巻，pp.587-592，2000.
16) 泉典洋・Pornprommin, A. : 振幅展開法を用いた砂州の弱非線形解析，土木学会論文集，第712/II-60，pp.73-86，2002.
17) Hasegawa, K. : Universal bank erosion coefficient for meandering rivers, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 115, No. 6, pp.744-765, 1989.
18) 渡邊康玄，桑村貴志:複列砂州のモード減少過程に関する水理実験，水工学論文集，第48巻，pp997-1002，2004.
19) Colombini, M., Seminara, G. and Tubino, M. : Finite amplitude alternate bars, Journal of Fluid Mechanics, Vol.181, pp.213-232, 1987.
20) Lanzoni, S. : Experiments on bar formation in a straight flume 1. Uniform sediment, Water Resources Research, Vol. 36, No. 11, pp.3337-3349, 2000.
21) 芦田和男・江頭進治・劉炳義：蛇行流路における流砂の分級および河床変動に関する数値解析，水工学論文集，第35 巻，pp.383-390，1991.
22) Sekine, M. and Parker, G. : Bed-load transport on transverse slope I, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol.118, No.4, pp.513-535, 1992.
23) Fujita, Y. : Bar and channel formation in braided streams, in River Meandering, edited by S. Ikeda and G. Parker, Water Resources Monograph, AGU, pp.500-560, 1989.
24) 島絵梨子，渡邊康玄：流路網形成過程とそれに伴って形成される蛇行流路における砂州と平面不安定の影響，土木学会論文集B1 (水工学)，Vol. 69，No. 4，pp.I_1105-I_1110，2013.
25) 例えば，牛島省：OpenMPによる並列プログラミングと数値計算法，丸善，2006.