

# 砂州の不安定性に対する土砂供給量の影響

## Effects of Sediment Supply on the Fluvial Bar Instability

泉 典洋<sup>1</sup>

Norihiro IZUMI

<sup>1</sup>北海道大学大学院 工学研究科 教授

### 要 旨

北海道をはじめとする日本全国の河川で砂州および流路の固定化に伴う河床低下が大きな問題となっている。その原因については、(1) 高水流量の減少に伴う植生の繁茂、(2) 大量の土砂採取、(3) 上流からの土砂供給量の減少などのいずれか、あるいはいくつかの複合であると考えられているが、河川によって支配的である要因やその程度は異なると考えられるものの、それを定量的に明らかにするには至っていないのが現状である。それぞれの要因が河川に及ぼす影響に関する一般的で普遍的な知見がまだまだ不足しているのが原因と言えるだろう。本研究では、それら要因の中でも土砂供給量が河床変動に与える影響を、より一般的、普遍的な理論解析を用いて明らかにする。

上流から供給される土砂量と、下流へ流下する土砂量が釣り合っている場合、河床は上昇も低下もしない平衡状態に達しており、河床勾配は一様となる。一方、上流から供給される土砂量と下流へ流下する土砂量が釣り合っていない非平衡状態では、河床上昇または低下が生じることになる。このとき河床勾配は一様ではなく、下流方向に変化するが、非平衡性が小さければ河床勾配の変化も微小となる。この非平衡性の強さを表すパラメータを導入し、WKBJ法を用いた弱非平衡状態における線形安定解析を行った。解析によれば、河床が上昇傾向にある場合、砂州発生に関わる臨界アスペクト比は一般に小さくなり、河床は不安定化することが明らかになった。逆に河床が低下傾向にある場合、臨界アスペクト比は大きくなり、砂州はできにくくなることが判った..

《キーワード: 砂州; 網状流路; 給砂量: 河床低下; 河床上昇》

## 1. はじめに

日本全国で河床の低下が問題となっている。明治以降の河川管理の大原則は河川をでき得る限り狭い領域に閉じ込めることであった。川幅を狭めると水深が増加し底面せん断力が大きくなる。掃流力を増加させることで土砂輸送量を増やし河床上昇を抑えると同時に、川幅水深比を減少させることで複列砂州の発生や河道の網状化を防ぐことができる。沖積河川は本質的に土砂を堆積させる働きを持つため河床は上昇する傾向にある。砂防や洪水調整施設の建設が未だ進んでおらず、河床上昇による天井川が問題になっていた高度経済成長期以前においては、河幅を狭めることが確かに合理的な河川の管理方法であった。ところが、砂防事業と洪水調整施設の建設が進んだ昨今、上流からの土砂供給量の減少と掃流力の増加によって河床は過度に低下する傾向にある。

河床低下に伴い滯筋の固定化やそれが原因で発生する砂州の樹林化等が問題となっている。河床が低下し滯筋が固定化すると当然砂州の更新は行われなくなり、樹林化が促進される。すなわち滯筋の固定化は河床の安定化による砂州の消滅と深い関係を有していることが予想される。もちろん樹林化には洪水調整施設によって洪水時の流量が減少したことも大きく関係しているが、この砂州の消滅を伴う滯筋の固定化も一つの要因となっていることは間違いない。

本研究では、河床低下傾向にある河川における河床の安定性について中規模河床形態である砂州を対象に線形安定解析を行う。河床低下（あるいは上昇）傾向にある河床において砂州の形成がどのような影響を受けるのかを理論的に明らかにする。

## 2. 河床低下と河床上昇

河道縦断形状は通常下に凸の形状をしている。縦断形状が下に凸の時、流れは減速傾向にあり土砂は堆積傾向にある。現在発達過程にある扇状地や河口デルタなどの沖積地上を流れる河川では、土砂を堆積させることで沖積地の発達が進む。その際、下流側境界の位置が継続的に移動するため、縦断形状も定常状態に達することはないが、下流端境界位置の移動は通常ゆっくりであるため、縦断形状はほぼ定常状態にあると考えてよい。堆積域が地殻変動によって沈降しているような場合、沈降と堆積が釣り合った時点で沖積地の発達が止まり、厳密な意味での定常な河川縦断形状が実現するが、その場合も下に凸の縦断形状となる。

ほぼ定常あるいは厳密に定常状態にある河道において、上流からの土砂供給量がある地点で突然減少した場合どのようなことが起きるであろうか。図-1は Gesler<sup>1)</sup>によって、加速度項や移流項を無視した簡易な理論を用いて計算された河床低下および河床上昇の例である。(a)が河床低下に、(b)が河床上昇に対応している。計算では計算領域上流端からの供給土砂量を与えられており、河道全体がその供給土砂量に応じた河床勾配になるまで変化を続ける様子がわかる。土砂供給量が減少した場合、上流端から供給土砂量に見合った勾配に減少し、その変化が徐々に下流に伝わって全体の勾配が小さくなっていく。土砂供給量が増加した場合、上流端の勾配が土砂供給量に応じて増加し、それが下流へと伝播して全体の勾配が大きくなっていく。

いずれの場合も問題を簡単にするため、一様粒径の土砂が深さ方向に無限に広がっているような状況を想定している。しかも計算は一次元でありしかも計算領域より上流側については考えていないため、上流端の河床高は上流の影響を受けずに低下・上昇している。実際は、河床低下の場合はアーサー化が進んだり、基盤岩が露出したりすることで計算結果ほどの河床低下は生じない。また、河床が上昇する場合も上流側や横断方向への土砂移動が生じ、図ほどの河床上昇は生じない場合がある。計算結果は定性的な傾向と捉えるべきであろう。

重要なのは河床低下の過程では全体的な勾配が小さくなるが、その過程で上に凸の縦断形状が現れることである。このような縦断形状が現れると流れは下流方向に加速されるため、土砂輸送量も下流に行くにしたがって大きくなる。そうすると河床上の流送土砂のバランスから河床は低下していくことになる。逆に河床上昇の過程では全体的な勾配が大きくなるが、その過程で下に凸の縦断形状が現れる。すると流れは下流方向に減速され、土砂輸送量も減少する。これによって河床は上昇していくことになる。

本研究でも河床低下や河床上昇は上流からの土砂供給量の多寡によって発生するとする。河床低下が進行しているある区間を考え、その間のある地点に着目する。考えている区間で河床が低下している場合は上に凸の縦断形状を考え(図-2(a)参照)、河床が上昇している場合は下に凸の縦断形状を仮定する(図-2(b)参照)。

また、問題を簡単にするため、一様な速度で河床低下・上昇しているような状況を考える。下流端や

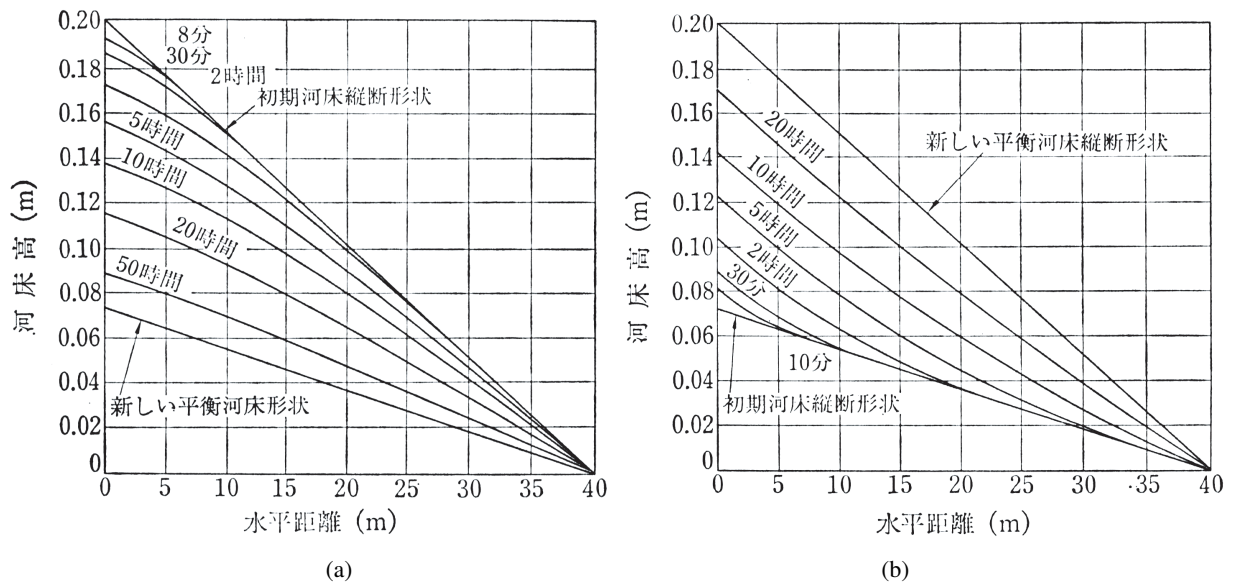


図-1 簡易な理論を用いて再現された、供給土砂量の急激な変化による (a) 河床低下過程と (b) 河床上昇過程。

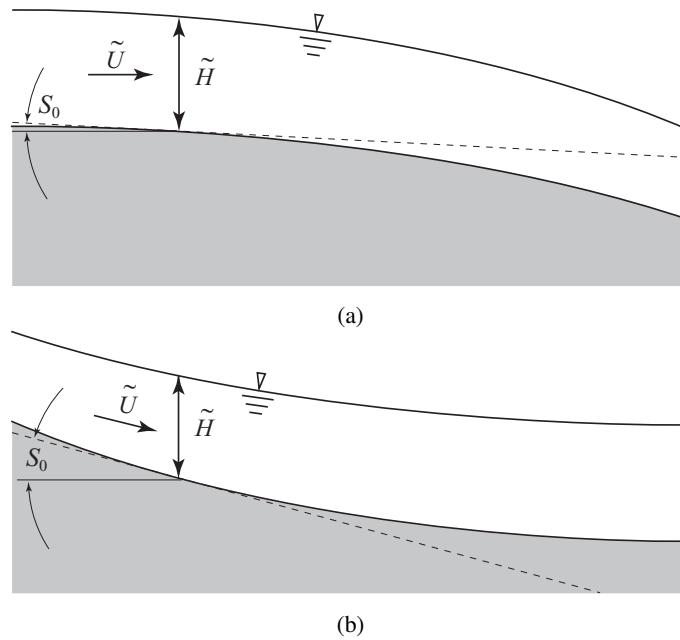


図-2 流れの概念図と変数の定義. (a) 河床低下の場合. (b) 河床上昇の場合.

上流端が固定されている場合、一様な速度で河床低下・上昇しているような状況はあり得ないが、考えている領域が下流端から十分遠く離れているような場合は下流端の影響はゆっくりしか現れないため、短期的に見るとほぼ一様に河床低下・上昇しているとみなしてよい。下流端が固定されている図-1の場合でも、河床低下・上昇が始まる初期と一定勾配に収束する終期を除けば、上流部分はほぼ一定の速度で一定の形状を維持しながら低下・上昇している様子がわかる。

さらに河床低下や上昇は通常の河床変動と比べると非常に長い時間かけて進行すると仮定する。すると河床勾配の場所的な変化は非常に小さく、ある区間を取り出して考えるとほぼ一様勾配な水路と考えて差しつかえない。すなわち河床勾配が有意に変化する距離に比べると砂州の波長の長さスケールは十分に小さいと仮定する。これによって河床勾配の変化のスケールを砂州の形成スケールと全く異なるオーダーと考えることが可能となる。以下ではこのような考え方から WKBJ 法や多重尺度法の考え方をを用いた二重展開を行うことで、河床低下・上昇の砂州の形成に与える影響を理論的に明らかにする。

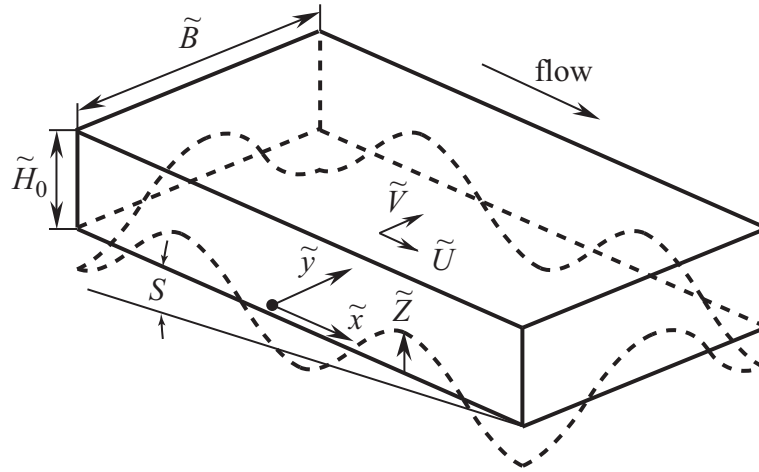


図-3 座標系と変数の定義.

### 3. 定式化

河道は川幅一定の開水路と仮定する．流れの時間変化が河床形状の時間変化に比較して圧倒的に早いと考える準定常の仮定を用いれば，開水路内の流れは次の浅水流方程式で表される．

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + V \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} - g \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{x}} + gS - \frac{\tilde{T}_{bx}}{\rho \tilde{H}} \quad (1)$$

$$U \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} + V \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{y}} - g \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\tilde{T}_{by}}{\rho \tilde{H}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{U} \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V} \tilde{H}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (3)$$

ここで  $\tilde{x}$  および  $\tilde{y}$  はそれぞれ流下方向および横断方向の座標， $\tilde{U}$  および  $\tilde{V}$  はそれぞれ  $\tilde{x}$  および  $\tilde{y}$  方向の流速成分， $g$  は重力加速度 ( $= 9.8 \text{ m/s}^2$ )， $\tilde{H}$  は水深， $\tilde{Z}$  は河床高さの平坦床基本状態からのずれ， $\tilde{T}_{bx}$  および  $\tilde{T}_{by}$  は底面せん断力のそれぞれ  $\tilde{x}$  および  $\tilde{y}$  方向成分， $\rho$  は水の密度 ( $= 1000 \text{ kg/m}^3$ ) を表している． $S$  は河床の平均勾配であるが，前述したように河床勾配は流下方向にゆっくりと変化するものと仮定する．したがって場所の関数であることに注意する．

底面せん断力は次のように表されるとする．

$$(\tilde{T}_{bx}, \tilde{T}_{by}) = \tilde{T}_b (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2)^{-1/2} (\tilde{U}, \tilde{V}) \quad (4)$$

ここで  $\tilde{T}_b$  は底面せん断力であり，抵抗係数  $C_f$  を用いて次のように表される．

$$\tilde{T}_b = \rho C_f (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2) \quad (5)$$

$C_f$  は相対水深（水深/粒径）の弱い関数であるが，ここでは問題を簡単にするため定数と仮定する．

河床の時間変化は土砂の連続式から次のように表される．

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{Q}_{bx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{Q}_{by}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (6)$$

ここで  $\lambda_p$  は土砂の空隙率である．また， $\tilde{Q}_{bx}$  および  $\tilde{Q}_{by}$  は土砂輸送量のそれぞれ  $\tilde{x}$  および  $\tilde{y}$  方向成分であり，ここでは掃流砂のみを考え次式で表されるものとする．

$$(\tilde{Q}_{bx}, \tilde{Q}_{by}) = \tilde{Q}_b (\cos \phi, \sin \phi) \quad (7)$$

ここで  $\tilde{Q}_b$  は掃流砂量の絶対値を表し、Meyer-Peter and Müller 式を用いて次のように表されるものとする。

$$\tilde{Q}_b = 8(\theta - \theta_c)^{3/2} (R_s g \tilde{d}_s^3)^{1/2} \quad (8)$$

ここで  $\theta$  はシールズせん断力と呼ばれる無次元のせん断力、 $\theta_c$  は掃流限界でのシールズせん断力 (= 0.047) である。シールズせん断力  $\theta$  は次のように表される。

$$\theta = \frac{\tilde{T}_b}{\rho R_s g \tilde{d}_s} \quad (9)$$

ここで  $R_s$  は土砂の水中比重 (=  $\rho_s/\rho - 1$ ) であり通常は 1.65、 $\rho_s$  は土砂の密度、 $\tilde{d}_s$  は土砂の粒径を表す。 $\phi$  は流下方向 ( $x$  方向) からの土砂移動方向角であり、次のように表されるとする。

$$\sin \phi = \frac{\tilde{V}}{(\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2)^{1/2}} - \frac{r}{\theta^{1/2}} \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \tilde{y}} \quad (10)$$

ここで  $r$  は局所勾配の影響を表す無次元パラメータであり、Colombini et al.<sup>2)</sup>によると 0.3 程度の値を取るとする。ここでもこの値を用いることとする。

#### 4. 無次元化

次のような無次元化を導入する。

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{B}(x, y), \quad (\tilde{U}, \tilde{V}) = \tilde{U}_0(U, V) \quad (11, 12)$$

$$(\tilde{H}, \tilde{Z}) = \tilde{H}_0(H, Z), \quad \tilde{t} = \frac{(1 - \lambda_p) \tilde{H}_0 \tilde{B}}{(R_s g \tilde{d}_s^3)^{1/2}} t \quad (13, 14)$$

$$(\tilde{T}_{bx}, \tilde{T}_{by}) = \rho C_f \tilde{U}_0^2 (T_{bx}, T_{by}), \quad (\tilde{Q}_{bx}, \tilde{Q}_{by}) = (R_s g \tilde{d}_s^3)^{1/2} (Q_{bx}, Q_{by}) \quad (15, 16)$$

ここで  $\tilde{B}$  は川幅、 $\tilde{U}_0$  および  $\tilde{H}_0$  はそれぞれ注目している場所での等流流速および等流水深である。無次元化された底面せん断力ベクトル  $(T_{bx}, T_{by})$  は次のように書き表される。

$$(T_{bx}, T_{by}) = (U^2 + V^2)^{1/2} (U, V) \quad (17)$$

またシールズせん断力は次のように表される。

$$\theta = \theta_0 (U^2 + V^2) \quad (18)$$

ここで  $\theta_0$  は平坦床基本状態における  $\theta$  であり、次のように表される。

$$\theta_0 = \frac{\tilde{T}_{b0}}{\rho R_s g \tilde{d}_s} = \frac{C_f \tilde{U}_0^2}{R_s g \tilde{d}_s} = \frac{\tilde{H}_0 S_0}{R_s \tilde{d}_s} \quad (19)$$

ここで  $\tilde{T}_{b0}$  は注目している地点における平坦床基本状態における底面せん断力であり、 $S_0$  は河床勾配である。

無次元化された支配方程式は次のようになる。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + F^{-2} \frac{\partial D}{\partial x} + F^{-2} \frac{\partial Z}{\partial x} + \beta C_f \left( -\sigma + \frac{(U^2 + V^2)^{1/2} U}{D} \right) = 0 \quad (20)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + F^{-2} \frac{\partial D}{\partial y} + F^{-2} \frac{\partial Z}{\partial y} + \beta C_f \frac{(U^2 + V^2)^{1/2} V}{D} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial UD}{\partial x} + \frac{\partial VD}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{by}}{\partial y} = 0 \quad (23)$$

ここで  $\sigma$  は注目している地点での平均河床勾配  $S_0$  で正規化した河床勾配であり、次式で表される。

$$\sigma = \frac{S}{S_0} \quad (24)$$

また無次元の土砂輸送量  $Q_{bx}$  および  $Q_{by}$  は次のように表される。

$$(Q_{bx}, Q_{by}) = Q_b (\cos \phi, \sin \phi) \quad (25)$$

$$Q_b = 8 (\theta - \theta_c)^{3/2} \quad (26)$$

$$\sin \phi = \frac{V}{(U^2 + V^2)^{1/2}} - \frac{r}{\beta \theta^{1/2}} \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (27)$$

## 5. 完全平衡状態における砂州の線形安定性理論

まず河床が完全に平衡状態にある場合の砂州の線形安定解析について振り返ってみる。一次元では流れと河床高さの変化は次のように表される。

$$U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + F^{-2} \frac{\partial H_0}{\partial x} + \beta C_f \left( -\sigma + \frac{U_0^2}{H_0} \right) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial U_0 H_0}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t} + \frac{\partial Q_{bx0}}{\partial x} = 0 \quad (30)$$

ここで

$$Q_{bx0} = 8 (\theta_0 U_0^2 - \theta_c)^{3/2} \quad (31)$$

であり、添え字 0 は一次元基本解を表している。河床高さが増え変化しないとき

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t} = 0 \quad (32)$$

であり、式 (30) に代入すると次のようになる。

$$\frac{\partial Q_{bx0}}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

上式は流砂量の流下方向成分が一定であることを意味しており、次のように表される。

$$Q_{bx0} = 8 (\theta_0 U_0^2 - \theta_c)^{3/2} = \text{const.} \quad (34)$$

流砂量が一定であるとき流速および水深も一定となることから、結局式 (28), (29) の解は次の様になる。

$$U_0 = \sigma^{1/3}, \quad H_0 = \sigma^{-1/3}, \quad Z_0 = 0, \quad Q_{bx0} = 8 (\theta_0 \sigma^{2/3} - \theta_c)^{3/2} \quad (35)$$

$\sigma = 1$  であるから、結局次のようになる。

$$U_0 = 1, \quad H_0 = 1, \quad Z_0 = 0, \quad Q_{bx0} = 8 (\theta_0 - \theta_c)^{3/2} \quad (36)$$

この解に対し微小振幅を持った進行波擾乱を与え、次のように展開する。

$$(U, V, H, Z) = (U_0, 0, H_0, Z_0) + A (\hat{U}_1(y), \hat{V}_1(y), \hat{H}_1(y), \hat{Z}_1(y)) \exp i(kx - \omega t) \quad (37)$$

ここで  $A$  は擾乱の振幅であり，発達のごく初期を考え微小であるとする．添え字 1 は擾乱を表し， $k$  および  $\omega$  はそれぞれ擾乱の波数および角振動数である．時間発展を考える線形安定解析の場合， $\omega$  は複素数であると仮定する．支配方程式 (20)–(23) に代入し， $O(A)$  のオーダーの項のみ取り出すと次式が得られる．

$$ikU_0\hat{U}_1 + ikF^{-2}\hat{H}_1 + ikF^{-2}\hat{Z}_1 + \beta C_f (2U_0^2\hat{U}_1 - U_0^4\hat{H}_1) = 0 \quad (38)$$

$$ikU_0\hat{V}_1 + F^{-2}\frac{\partial\hat{H}_1}{\partial y} + F^{-2}\frac{\partial\hat{Z}_1}{\partial y} + \beta C_f U_0^2\hat{V}_1 = 0 \quad (39)$$

$$ikH_0\hat{U}_1 + ikU_0\hat{H}_1 + H_0\frac{\partial\hat{V}_1}{\partial y} = 0 \quad (40)$$

$$-i\omega\hat{Z}_1 + ikQ_1(U_0)\hat{U}_1 + Q_2(U_0)\frac{\partial\hat{V}_1}{\partial y} + Q_3(U_0)\frac{\partial^2\hat{Z}_1}{\partial y^2} = 0 \quad (41)$$

ここで

$$Q_1(U_0) = \left. \frac{\partial Q_{bx}}{\partial U} \right|_{U=U_0, V=0} = 24(\theta_0 U_0^2 - \theta_c)^{1/2} \theta_0 U_0 \quad (42)$$

$$Q_2(U_0) = \left. \frac{\partial Q_{by}}{\partial V} \right|_{U=U_0, V=0} = 8(\theta_0 U_0^2 - \theta_c)^{3/2} U_0^{-1} \quad (43)$$

$$Q_3(U_0) = \left. \frac{\partial Q_{by}}{\partial \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)} \right|_{U=U_0, V=0, \frac{\partial Z}{\partial y}=0} = -8(\theta_0 U_0^2 - \theta_c)^{3/2} \frac{r}{\beta \theta_0^{1/2} U_0} \quad (44)$$

擾乱の  $y$  に依存する部分  $\hat{U}_1$  および  $\hat{V}_1$ ， $\hat{H}_1$ ， $\hat{Z}_1$  は次の境界条件を満足する．

- $y = 0$  および 1 の側壁部を通過する流れのフラックスがゼロ．
- $y = 0$  および 1 の側壁部を通過する流砂フラックスがゼロ．

上の二つの条件から次式の成立が要求される．

$$\hat{V} = 0, \quad \frac{\partial \hat{Z}}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, 1 \quad (45)$$

上の境界条件を満足する式 (38)–(41) の解は次のような形を持つことが期待される．

$$(\hat{U}_1, \hat{H}_1, \hat{Z}_1) = (U_1, H_1, Z_1) \cos j\pi y, \quad \hat{V}_1 = V_1 \sin j\pi y \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (46)$$

ここで  $j$  は横断方向の波数を表し， $j = 1$  のとき単列砂州を， $j > 1$  のとき複列砂州を表している．上式を式 (38)–(41) に代入すると次式が得られる．

$$ikU_0U_1 + ikF^{-2}H_1 + ikF^{-2}Z_1 + \beta C_f (2U_0^2U_1 - U_0^4H_1) = 0 \quad (47)$$

$$ikU_0V_1 - j\pi F^{-2}H_1 - j\pi F^{-2}Z_1 + \beta C_f U_0^2V_1 = 0 \quad (48)$$

$$ikH_0U_1 + ikU_0H_1 + j\pi H_0V_1 = 0 \quad (49)$$

$$-i\omega Z_1 + ikQ_1(U_0)U_1 + j\pi Q_2(U_0)V_1 + (j\pi)^2 Q_3(U_0)Z_1 = 0 \quad (50)$$

行列を用いると次のように表される．

$$\mathbf{L}_e \mathbf{U}_1 = 0 \quad (51)$$

ここで

$$\mathbf{L}_e = \begin{bmatrix} ikU_0 + 2\beta C_f U_0^2 & 0 & ikF^{-2} - \beta C_f U_0^4 & ikF^{-2} \\ 0 & ikU_0 + \beta C_f U_0^2 & -j\pi F^{-2} & -j\pi F^{-2} \\ ikH_0 & j\pi H_0 & ikU_0 & 0 \\ ikQ_1(U_0) & j\pi Q_2(U_0) & 0 & -i\omega + (j\pi)^2 Q_3(U_0) \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{U}_1 = [U_1, V_1, H_1, Z_1]^T \quad (53)$$

式 (51) が自明でない解を持つための条件は次式で表される．

$$|\mathbf{L}_e| = 0 \quad (54)$$

上式を解くと  $\omega$  が次のような一般形で得られる．

$$\omega = f(k, \beta; j, F, C_f, \theta_0) \quad (55)$$

## 6. 弱非平衡状態の線形安定性理論

### (1) 一次元基本状態

いま河床高がゆっくりと低下・上昇しているとし、河床の低下・上昇速度を  $\epsilon\gamma$  と表す。  $\epsilon$  で微小な河床低下・上昇速度の大きさを表し、河床が低下しているとき  $\gamma = -1$ 、上昇しているとき  $\gamma = 1$  とする。そのとき次式が成立する。

$$\frac{\partial Z_0}{\partial t} = \epsilon\gamma \quad (56)$$

上式を式 (30) に代入して次式が得られる。

$$\frac{\partial Q_{bx0}}{\partial x} = -\epsilon\gamma \quad (57)$$

上式を解くと次のような解が得られる。

$$8(\theta_0 U_0^2 - \theta_c)^{3/2} = -\epsilon\gamma x + C \quad (58)$$

いま注目している地点を  $x$  座標の原点とすると  $x = 0$  で  $U_0 = 1$  となる。したがって上式は次のようになる。

$$8(\theta_0 U_0^2 - \theta_c)^{3/2} = 8(\theta_0 - \theta_c)^{3/2} - \epsilon\gamma x \quad (59)$$

上式を  $U_0$  について解けば次のような解が得られる。

$$U_0 = \left\{ \left[ \left(1 - \frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^{3/2} - \frac{\epsilon\gamma x}{8\theta_0^{3/2}} \right]^{2/3} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right\}^{1/2} \quad (60)$$

式 (29) を積分すると流量一定の条件から  $U_0 H_0 = 1$  が得られる。これを用いれば水深  $H_0$  について次のような解が得られる。

$$H_0 = \left\{ \left[ \left(1 - \frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^{3/2} - \frac{\epsilon\gamma x}{8\theta_0^{3/2}} \right]^{2/3} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right\}^{-1/2} \quad (61)$$

さらに式 (28) の  $x$  微分項を無視し、局所的にせん断力と重力の流下方向成分が釣り合っているとす等流近似の仮定が成り立っているとすると  $\sigma$  は次のように導かれる。

$$\sigma = \frac{U_0^2}{H_0} = \left\{ \left[ \left(1 - \frac{\theta_c}{\theta_0}\right)^{3/2} - \frac{\epsilon\gamma x}{8\theta_0^{3/2}} \right]^{2/3} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right\}^{3/2} \quad (62)$$

このように流速  $U_0$  および水深  $H_0$ 、正規化された河床勾配  $\sigma$  はゆっくりと  $x$  方向に変化し、その変化のスケールは  $\epsilon^{-1}$  であることが判る。すなわち  $x$  が  $\epsilon^{-1}$  だけ変化して初めて有意な変化が発生することになる。

そこで  $\epsilon$  を微小パラメータとした **WKBJ 法**<sup>3),4)</sup> を用いて河床勾配を再計算してみる。多重尺度法では砂州のスケール程度の長さスケールを表す流下方向座標  $x_0$  の他に、河床低下・上昇速度に対応した河床勾配の変化を表す長さスケール  $x_1$  を導入する。  $x_0$  および  $x_1$  はそれぞれ次のように定義される。

$$x_0 = x, \quad x_1 = \epsilon x \quad (63)$$

すると  $x$  微分は次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (64)$$

これに応じて全ての変数についても  $\epsilon$  で展開する。すなわち次のような展開を導入する。

$$U = U_{00}(x_1) + \epsilon U_{01}(x_1) \quad (65)$$



$$H = H_{00}(x_1) + \epsilon H_{01}(x_1) \quad (66)$$

$$\sigma = \sigma_0(x_1) + \epsilon \sigma_1(x_1) \quad (67)$$

ここで  $U_{00}$  を初めとする全ての変数は流下方向にゆっくりと変化しており、 $x_0$  のスケールで見ると一定であるが、 $x_1$  のスケールで見ると変化していると考えられる。すなわち  $x_0$  の関数ではないが、 $x_1$  の関数ではあるとする。

式 (64)–(67) を式 (28)–(30) に代入し  $\epsilon$  のオーダーで整理すると  $\epsilon$  の各オーダーでそれぞれ次のような結果が得られる。

**a)  $O(\epsilon^0)$ :**

$\epsilon$  の 0 次で次式が得られる。

$$-\sigma_0 + \frac{U_{00}^2}{H_{00}} = 0 \quad (68)$$

$$U_{00}H_{00} = 1 \quad (69)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left[ 8(\theta_0 U_{00} - \theta_c)^{3/2} \right] = 0 \quad (70)$$

上式中 3 番目の式 (70) は  $x_0$  のスケールで見れば、流速も流砂量も一定であることを意味している。

**b)  $O(\epsilon^1)$ :**

$\epsilon$  の 1 次で次式が得られる。

$$U_{00} \frac{\partial U_{00}}{\partial x_1} + F^{-2} \frac{\partial H_{00}}{\partial x_1} + \beta C_f (-\sigma_1 + 2U_{00}^2 U_{01} - U_{00}^4 H_{01}) = 0 \quad (71)$$

$$U_{00}H_{01} + U_{01}H_{00} = 0 \quad (72)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ 8(\theta_0 U_{00}^2 - \theta_c)^{3/2} \right] = -1 \quad (73)$$

式 (73) より次式が得られる。

$$U_{00} = \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{\theta_c}{\theta_0} \right)^{3/2} - \frac{x_1}{8\theta_0^{3/2}} \right]^{2/3} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right\}^{1/2} \quad (74)$$

上式を式 (69) および (68) に代入すると次式が得られる。

$$H_{00} = \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{\theta_c}{\theta_0} \right)^{3/2} - \frac{x_1}{8\theta_0^{3/2}} \right]^{2/3} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right\}^{-1/2} \quad (75)$$

$$\sigma_0 = \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{\theta_c}{\theta_0} \right)^{3/2} - \frac{x_1}{8\theta_0^{3/2}} \right]^{2/3} + \frac{\theta_c}{\theta_0} \right\}^{3/2} \quad (76)$$

$\sigma_1$  を導くためには  $O(\epsilon^2)$  の式の一部を使う必要がある。式 (30) より  $O(\epsilon^2)$  では次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ 24(\theta_0 U_{00}^2 - \theta_c)^{1/2} \theta_0 U_{00} U_{01} \right] = 0 \quad (77)$$

上式は  $\epsilon$  の一次のオーダーにおける流砂量の修正量を表している。 $\epsilon$  の一次のオーダーにおける河床低下量・上昇量がゼロであるとき、流砂量の修正量もゼロとなるはずである。したがって上式より次式が得られる。

$$24(\theta_0 U_{00}^2 - \theta_c)^{1/2} \theta_0 U_{00} U_{01} = 0 \quad (78)$$

よって

$$U_{01} = 0 \quad (79)$$

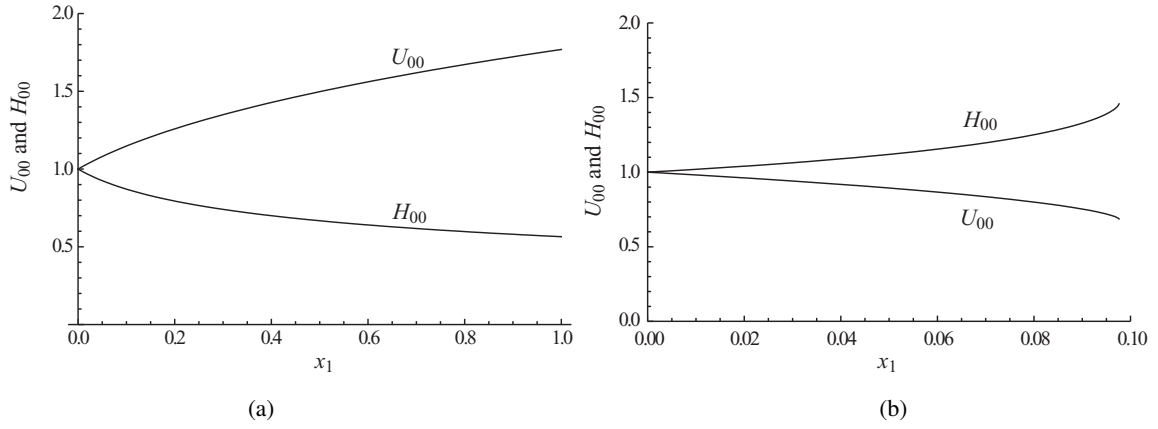


図-4 一次元基本状態における流速  $U_{00}$  および  $H_{00}$ .  $\theta_0 = 0.1$ . (a) 河床が低下傾向にある場合 ( $\gamma = -1$ ). (b) 河床が上昇傾向にある場合 ( $\gamma = 1$ ).

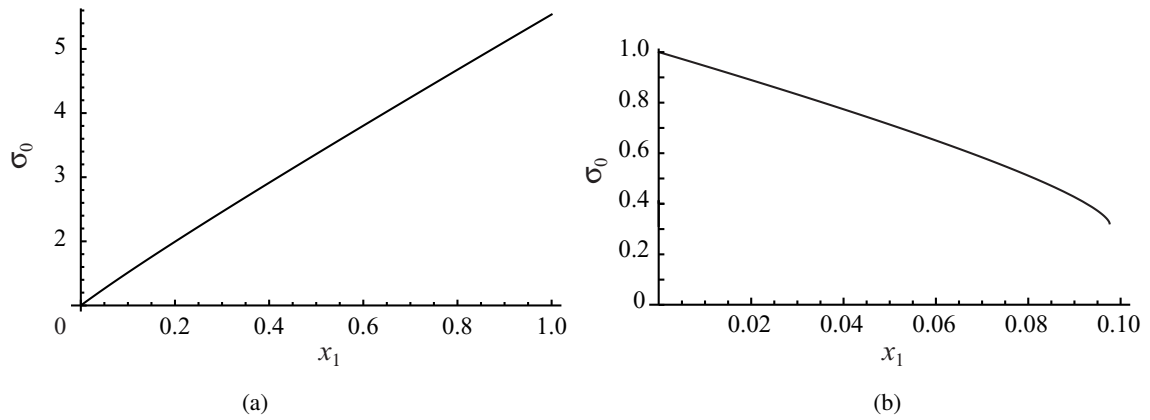


図-5 一次元基本状態における正規化された河床勾配  $\sigma_0$ .  $\theta_0 = 0.1$ . (a) 河床が低下傾向にある場合 ( $\gamma = -1$ ). (b) 河床が上昇傾向にある場合 ( $\gamma = 1$ ).

となる. そのとき式 (72) より次式が得られる.

$$H_{01} = 0 \quad (80)$$

上式を式 (71) に代入すれば次式が得られる.

$$\sigma_1 = \beta^{-1} C_f^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{U_{00}^2}{2} + F^{-2} H_{00} \right) \quad (81)$$

図-4 に  $U_{00}$  および  $H_{00}$  の流下方向変化を示した. 河床が低下傾向にある (a) のケースでは, 流れは下流方向に加速され, それに伴って水深が小さくなっている様子がわかる. また河床が上昇している (b) では逆に流速は流下方向に小さくなり水深が増加している. また (b) のケースでは  $x_1 = 0.1$  付近で  $\theta_0 U_{00}^2 < \theta_c$  となり, 土砂の掃流限界に達し土砂輸送量がゼロとなるため, それより下流では解が存在しなくなることに注意する必要がある.

図-5 に  $\sigma_0$  の流下方向変化を示した. 河床低下が生じている (a) のケースでは河床勾配は流下方向に増加するが, 河床上昇が生じている (b) のケースでは流下方向に減少する. 図-4 と同様に河床が上昇する場合, やはり  $x_1 = 0.1$  付近で掃流限界に達するため, それより下流では  $\sigma_0$  も存在しない.

図-6 に  $\sigma_1$  の流下方向分布を示す. 式 (81) から判るように  $\sigma_1$  は  $\beta$  および  $C_f$  に依存する. ここでは  $d_s = 0.02$  とし,  $\beta = 50$  および  $100$  のケースについて図示した. 河床上昇が生じる (b) のケースでは  $x_1 = 0.1$  付近で特異性が生じるため  $\sigma_1$  の値も急激に大きくなる様子がわかる. ただし, 実際に解析の対象となるのは  $x_1 = 0$  近傍であるため, この特異性は問題にならない.

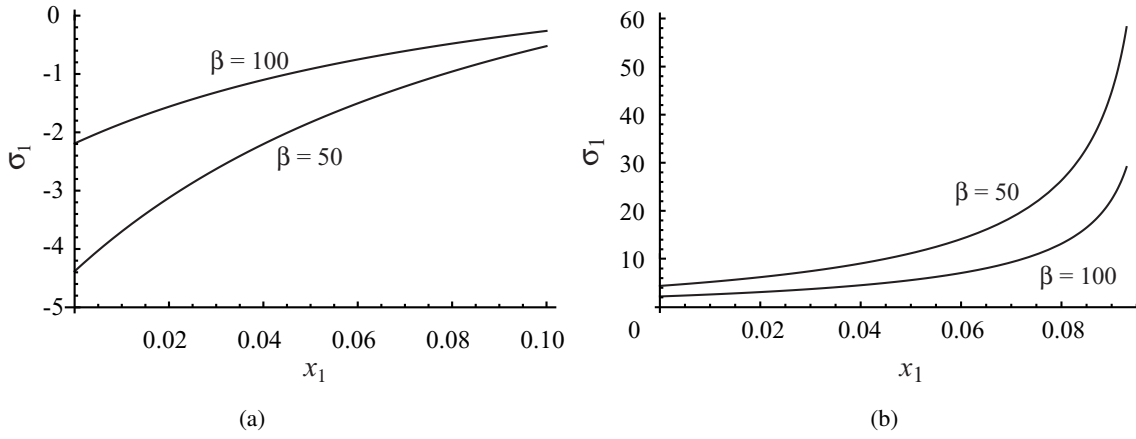


図-6 一次元基本状態における正規化された河床勾配  $\sigma_1$ .  $d_s = 0.02$ ,  $\theta_0 = 0.1$ . (a) 河床が低下傾向にある場合 ( $\gamma = -1$ ). (b) 河床が上昇傾向にある場合 ( $\gamma = 1$ ).

## (2) 二次元摂動問題

完全平衡状態の場合の線形安定解析に倣って，河床に対して流下方向にサイン型の進行波擾乱を与える．また前節に倣って，弱非平衡性を表す微小パラメータ  $\epsilon$  を用いて摂動量も展開するすなわち，次のような摂動展開を導入する．

$$\begin{bmatrix} U \\ H \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{00}(x_1) + \epsilon U_{01}(x_1) \\ H_{00}(x_1) + \epsilon H_{01}(x_1) \\ 0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} U_{10}(x_1) + \epsilon U_{11}(x_1) \\ H_{10}(x_1) + \epsilon H_{11}(x_1) \\ Z_{10}(x_1) + \epsilon Z_{11}(x_1) \end{bmatrix} \exp i(kx_0 - \omega t) \cos j\pi y \quad (82)$$

$$V = A [V_{10}(x_1) + \epsilon V_{11}(x_1)] \exp i(kx_0 - \omega t) \sin j\pi y \quad (83)$$

また複素角周波数  $\omega$  も次のように展開する．

$$\omega = \omega_0(x_1) + \epsilon \omega_1(x_1) \quad (84)$$

ここで  $\omega_0$  および  $\omega_1$  は後述するようにいずれも  $x_1$  の関数である．上式を式 (20)–(23) に代入し  $\epsilon$  および  $A$  を微小パラメータとしてそのオーダーで整理するとそれぞれのオーダーで次のような結果が得られる．

a)  $O(\epsilon^0 A^1)$ :

$O(\epsilon^0 A^1)$  では次式が得られる．

$$ikU_{00}U_{10} + ikF^{-2}H_{10} + ikF^{-2}Z_{10} + \beta C_f (2U_{00}^2 U_{10} - U_{00}^4 H_{10}) = 0 \quad (85)$$

$$ikU_{00}V_{10} - j\pi H_{10} - j\pi Z_{10} + \beta C_f U_{00}^2 V_{10} = 0 \quad (86)$$

$$ikH_{00}U_{10} + ikU_{00}H_{10} + j\pi H_{00}V_{10} = 0 \quad (87)$$

$$-i\omega_0 Z_{10} + ikQ_1(U_{00})U_{10} + j\pi Q_2(U_{00})V_{10} + (j\pi)^2 Q_3(U_{00})Z_{10} = 0 \quad (88)$$

上式は次のように書き直すことができる．

$$\mathbf{L}U_{10} = 0 \quad (89)$$

ここで

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} ikU_{00} + 2\beta C_f U_{00}^2 & 0 & ikF^{-2} - \beta C_f U_{00}^4 & ikF^{-2} \\ 0 & ikU_{00} + \beta C_f U_{00}^2 & -j\pi F^{-2} & -j\pi F^{-2} \\ ikH_{00} & j\pi H_{00} & ikU_{00} & 0 \\ ikQ_1(U_{00}) & j\pi Q_2(U_{00}) & 0 & -i\omega_0 + (j\pi)^2 Q_3(U_{00}) \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$U_{10} = [U_{10}, V_{10}, H_{10}, Z_{10}]^T \quad (91)$$

完全平衡状態の場合と同様に式 (89) が自明な解以外の解を持つためには次式が成立する必要がある。

$$|\mathbf{L}| = 0 \quad (92)$$

ただし  $\mathbf{L}$  中の  $U_{00}$  および  $H_{00}$ ,  $Z_{00}$  は  $x_1$  の関数であるので,  $\omega_0$  も  $x_1$  の関数となる. すなわち  $\omega_0$  は次のような関数形となる.

$$\omega_0 = f_0(k, \beta; j, F, C_f, \theta_0, x_1) \quad (93)$$

b)  $O(\epsilon^1 A^1)$ :

$O(\epsilon^1 A^1)$  では次式が得られる.

$$ikU_{00}U_{11} + ikF^{-2}H_{11} + ikF^{-2}Z_{11} + \beta C_f (2U_{00}^2 U_{11} - U_{00}^4 H_{11}) = -(U_{00}U_{10})' - F^{-2}(H_{10} + Z_{10})' \quad (94)$$

$$ikU_{00}V_{11} - j\pi H_{11} - j\pi Z_{11} + \beta C_f U_{00}^2 V_{11} = -U_{00}V_{10}' \quad (95)$$

$$ikH_{00}U_{10} + ikU_{00}H_{10} - j\pi H_{00}V_{10} = -(U_{00}H_{10})' - (U_{10}H_{00})' \quad (96)$$

$$-i\omega_0 Z_{11} + ikQ_1(U_{00})U_{11} + j\pi Q_2(U_{00})V_{11} + (j\pi)^2 Q_3(U_{00})Z_{11} = i\omega_1 Z_{10} - (Q_1(U_{00})U_{10})' \quad (97)$$

ここで  $'$  は  $x_1$  による微分を表す. 上式は次のように書くことができる.

$$\mathbf{L}\mathbf{U}_{11} = \mathbf{N} \quad (98)$$

ここで

$$\mathbf{U}_{11} = [U_{11}, V_{11}, H_{11}, Z_{11}]^T \quad (99)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -(U_{00}U_{10})' - F^{-2}(H_{10} + Z_{10})' \\ -U_{00}V_{10}' \\ -(U_{00}H_{10})' - (U_{10}H_{00})' \\ i\omega_1 Z_{10} - (Q_1(U_{00})U_{10})' \end{bmatrix} \quad (100)$$

$\mathbf{L}$  は特異行列であるので, 式 (98) が解を持つためには行列  $\mathbf{L}$  の列の一つを  $\mathbf{N}$  と交換した行列の行列式がゼロとならなければならない. すなわち次式が成り立つ必要がある.

$$\begin{vmatrix} ikU_{00} + 2\beta C_f U_{00}^2 & 0 & ikF^{-2} - \beta C_f U_{00}^4 & -(U_{00}U_{10})' - F^{-2}(H_{10} + Z_{10})' \\ 0 & ikU_{00} + \beta C_f U_{00}^2 & -j\pi F^{-2} & -U_{00}V_{10}' \\ ikH_{00} & j\pi H_{00} & ikU_{00} & -(U_{00}H_{10})' - (U_{10}H_{00})' \\ ikQ_1(U_{00}) & j\pi Q_2(U_{00}) & 0 & i\omega_1 Z_{10} - (Q_1(U_{00})U_{10})' \end{vmatrix} = 0 \quad (101)$$

上式を解けば  $\omega_1$  が次のような形で得られる.

$$\omega_1 = f_1(k, \beta; j, F, C_f, x_1) \quad (102)$$

ただし, 式 (101) を解くためには  $U_{10}$  および  $V_{10}$ ,  $H_{10}$ ,  $Z_{10}$  とそれらの  $x_1$  微分を求める必要がある.  $U_{10}$  および  $V_{10}$ ,  $H_{10}$ ,  $Z_{10}$  は式 (89) を解いて得られる. またそれらの  $x_1$  微分は次のようにして得られる.  $O(\epsilon^0 A^1)$  の式 (89) を  $x_1$  で微分すると次式が得られる.

$$\mathbf{L}'\mathbf{U}_{10} = -\mathbf{L}'\mathbf{U}_{10} \quad (103)$$

ここで

$$\mathbf{L}'\mathbf{U}_{10} = \begin{bmatrix} (ikU_{00}' + 4\beta C_f U_{00}U_{00}')U_{10} - 4\beta C_f U_{00}^3 U_{00}'H_{10} \\ (ikU_{00}' + 2\beta C_f U_{00}U_{00}')V_{10} \\ ikH_{00}'U_{10} + j\pi H_{00}'V_{10} + ikU_{00}'H_{10} \\ ikQ_1'(U_{00})U_{10} + j\pi Q_2'(U_{00})V_{10} + (-i\omega_0' + (j\pi)^2 Q_3'(U_{00}))Z_{10} \end{bmatrix} \quad (104)$$

再び特異行列  $\mathbf{L}$  の線形代数方程式系が非同次項を有している. 前述したようにこのような方程式が解を持つためには  $\mathbf{L}$  の一つの列を  $\mathbf{L}'\mathbf{U}_{10}$  で取り替えた行列  $\mathbf{M}$  の行列式がゼロとならなければならない.

$$|\mathbf{M}| = 0 \quad (105)$$

ここで

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} ikU_{00} + 2\beta C_f U_{00}^2 & 0 & ikF^{-2} - \beta C_f U_{00}^4 & -(ikU'_{00} + 4\beta C_f U_{00} U'_{00})U_{10} + 4\beta C_f U_{00}^3 U'_{00} H_{10} \\ 0 & ikU_{00} + \beta C_f U_{00}^2 & -j\pi F^{-2} & -(ikU'_{00} + 2\beta C_f U_{00} U'_{00})V_{10} \\ ikH_{00} & j\pi H_{00} & ikU_{00} & -ikH'_{00}U_{10} - j\pi H'_{00}V_{10} - ikU'_{00}H_{10} \\ ikQ_1(U_{00}) & j\pi Q_2(U_{00}) & 0 & -ikQ'_1(U_{00})U_{10} - j\pi Q'_2(U_{00})V_{10} - ((j\pi)^2 Q'_3(U_{00}) - i\omega'_0)Z_{10} \end{bmatrix} \quad (106)$$

$U'_{10}$  および  $V'_{10}$ ,  $H'_{10}$ ,  $Z'_{10}$  は次の方程式の解として得られる.

$$\mathbf{M}U'_{10} = 0 \quad (107)$$

## 7. 結果と考察

### (1) $\epsilon$ の大きさ

前節までに展開した理論では河床低下・上昇の大きさを表すパラメータ  $\epsilon$  が 1 より十分小さいと仮定して解析を進めた. ここで典型的な河川の場合, 具体的に  $\epsilon$  の値がどの程度となるかについて考えてみる. 有次元の河床低下・上昇速度  $\tilde{\epsilon}$  は次のように表される.

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{H}_0}{\tilde{T}} \epsilon \quad (108)$$

ここで  $\tilde{T}$  は河床変動の時間スケールであり, 次式で表される.

$$\tilde{T} = \frac{(1 - \lambda_p)\tilde{H}_0\tilde{B}}{(R_s g \tilde{d}_s^3)^{1/2}} \quad (109)$$

いま, 粒径を  $\tilde{d}_s = 5 \text{ mm}$ , 等流水深を  $\tilde{H}_0 = 1 \text{ m}$ , 河幅を  $\tilde{B} = 100 \text{ m}$ , 空隙率を  $\lambda_p = 0.4$  とすると, 河床変動の時間スケールは次のように計算される.

$$\tilde{T} = \frac{(1 - \lambda_p)\tilde{H}_0\tilde{B}}{(R_s g \tilde{d}_s^3)^{1/2}} = 4.2 \times 10^4 \text{ (sec)} = 12 \text{ (hour)} \quad (110)$$

すなわち水深程度の河床変動が生じるのに必要な時間は 12 時間程度であることになる. 河床低下・上昇に要する時間はこれより十分長いとする. たとえば, 年間 10–100 cm 程度の河床低下・上昇が生じているとしよう. 低水路満杯に近い流量で流れる頻度を年間 1 週間とすると,  $\tilde{\epsilon}$  は次のようになる.

$$\tilde{\epsilon} = \frac{0.1-0.5}{7 \times 24 \times 3600} = 1.7-17 \times 10^{-7} \text{ (m/s)} \quad (111)$$

そのとき  $\epsilon$  は次のようになる.

$$\epsilon = 0.0070-0.070 \quad (112)$$

### (2) 河床低下・上昇が砂州の不安定性に及ぼす影響

図-7 に安定性ダイアグラムを示す. 縦軸をアスペクト比  $\beta$ , 横軸を波数  $k$  とし, 増幅率  $\omega_0 + \epsilon\omega_1 = 0$  となる中立曲線が描かれている. 中立曲線より上側で成長率は正となり, 平坦床は不安定となって砂州が形成されることを意味している. いずれも太い実線 ( $\epsilon = 0$ ) が河床低下・上昇の影響がない場合の中立曲線であり,  $\epsilon$  が大きくなるにつれて河床低下・上昇の影響が大きくなることを意味している.

図-7(a) および (b) は  $d_s = 0.02$ ,  $\theta_0 = 0.1$  であり, 単列砂州 ( $j = 1$ ) の場合の安定性ダイアグラムであり, (a) は河床低下 ( $\gamma = -1$ ) の場合を, (b) は河床上昇 ( $\gamma = 1$ ) の場合を示している. (a) を見ると判るように, 河床低下が大きくなればなるほど, 波数の大きい領域で河床が安定化している様子がわかる. また, 河床低下の影響が大きくなると  $\epsilon = 0.02$  辺りまでは臨界アスペクト比 (不安定となる最小のアスペクト比) が大きくなる様子がわかる. この領域では河床は安定となり砂州が形成されにくくなることを

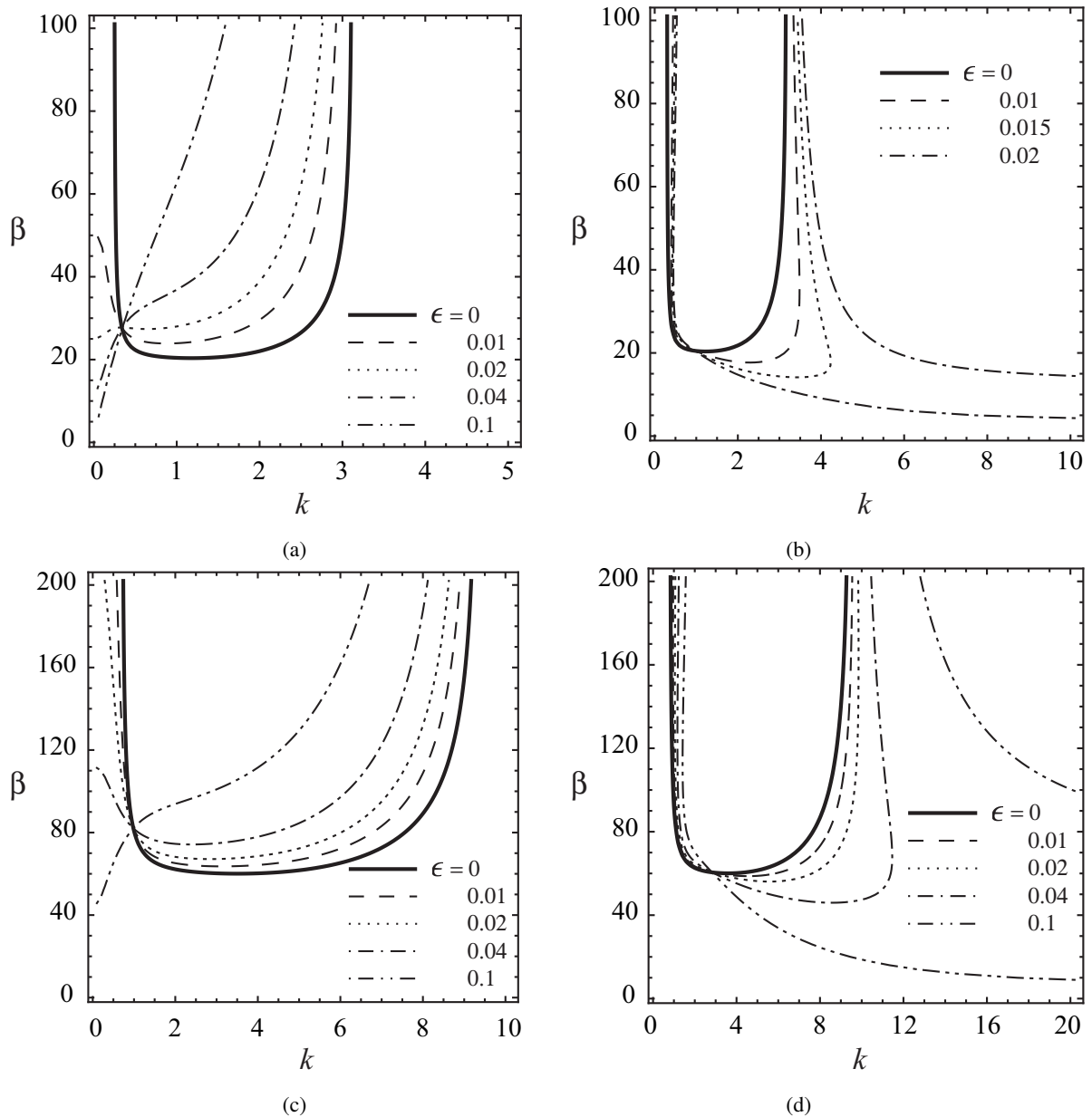


図-7 安定性ダイアグラム.  $d_s = 0.02$ . (a) 単列砂州 ( $j = 1$ ) で河床が低下傾向にある場合 ( $\gamma = -1$ ).  $\theta_0 = 0.1$ . (b) 単列砂州 ( $j = 1$ ) で河床が上昇傾向にある場合 ( $\gamma = 1$ ).  $\theta_0 = 0.1$ . (c) 複列砂州 ( $j = 3$ ) で河床が低下傾向にある場合 ( $\gamma = -1$ ).  $\theta_0 = 0.1$ . (d) 複列砂州 ( $j = 3$ ) で河床が上昇傾向にある場合 ( $\gamma = 1$ ).  $\theta_0 = 0.1$ .

意味している。さらに河床低下が大きくなって  $\epsilon$  が 0.02 を超えると波数の小さくアスペクト比の小さい領域で河床は不安定化する様子が見られる。一方、(b) によれば、河床上昇が激しくなり  $\epsilon$  が大きくなると、波数の大きい領域で不安定領域が拡大し、臨界アスペクト比が小さくなる様子が見られる。この領域では河床は不安定となり、砂州が形成されやすくなることを意味している。

図-7(c) および (d) は  $d_s = 0.02$ ,  $\theta_0 = 0.1$  であり、複列砂州 ( $j = 3$ ) の場合の安定性ダイアグラムである。(c) が河床低下の場合を、(d) が河床上昇の場合を示している。単列砂州の場合と同様に、(c) の河床低下の場合、やはり波数の大きい領域で河床は安定化し、砂州が形成されにくくなる様子が見られる。(d) の河床上昇の場合では、波数の大きい領域で河床は不安定となり波数の大きい (波長の小さい) 砂州が形成されやすくなることを意味している。単列砂州の場合と比べると、若干河床低下・上昇の影響が小さく現れている。複列砂州の場合、若干、河床低下・上昇の影響を受けにくいことを意味している。

図-7(e) および (f) は他のケースと同様に  $d_s = 0.02$  であるが、シールズ数が大きい  $\theta_0 = 0.5$  の場合の安定性ダイアグラムである。(e) および (f) はそれぞれ河床低下および河床上昇の場合を表している。(e)

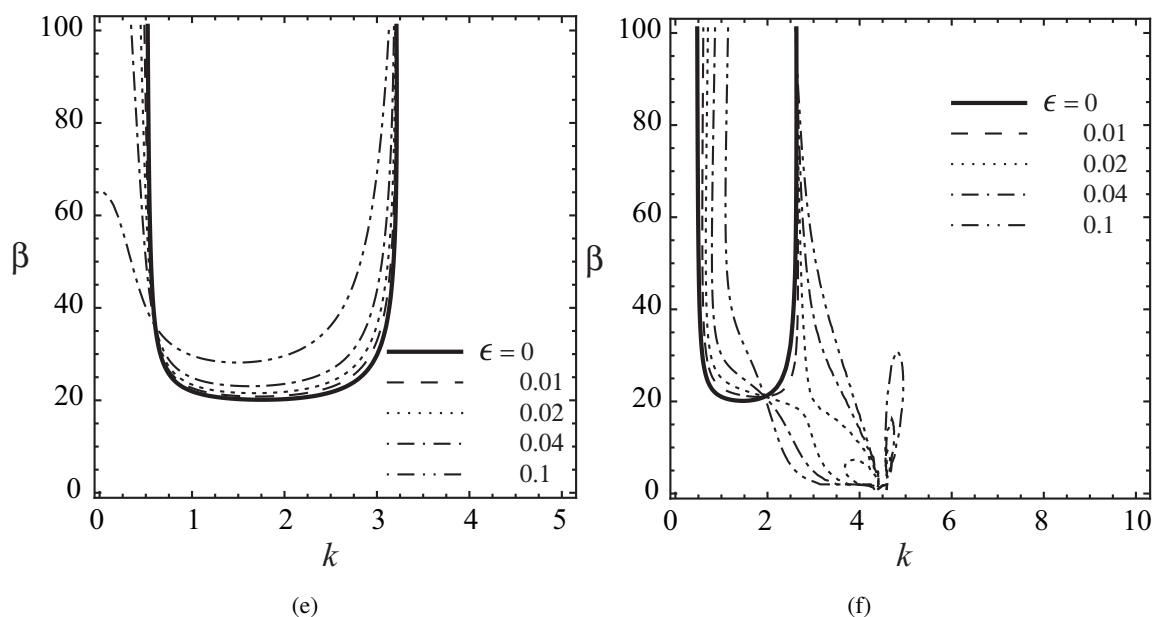


図-6 安定性ダイアグラム.  $d_s = 0.02$ . (e) 単列砂州 ( $j = 1$ ) で河床が低下傾向にある場合 ( $\gamma = -1$ ).  $\theta_0 = 0.5$ . (f) 単列砂州 ( $j = 1$ ) で河床が上昇傾向にある場合 ( $\gamma = 1$ ).  $\theta_0 = 0.5$ .

によると河床低下の場合、いずれの波数領域でも河床の安定化が見られ、臨界アスペクト比が大きくなることからわかる。また河床上昇の場合、(f)によれば他の場合と比較して不安定領域が波数の大きい領域に広がって行かず、波数の僅かに大きい領域で臨界アスペクト比の著しい低下が進む様子がわかる。河床低下・上昇、いずれの場合もその影響があまり大きく現れない。シールズ数が大きい場合、もともと増幅率の絶対値が大きいため、河床低下や上昇の影響を受けにくいことが予想される。

## 8. 結論

本研究では、土砂供給量の減少や増加によって河床が低下や上昇しているような場合、河床の安定性や砂州の形成がどのような影響を受けるのかを明らかにするために、河床上昇・低下の無次元速度を微小パラメータとし、WKB法を用いた線形安定解析を行った。その結果次のようなことが明らかとなった。

- 河床低下傾向にある場合、河床は一般に安定化し、砂州はできにくくなる傾向にある。特に波数の大きい領域で安定となる傾向にあり、波数の小さい（波長の長い）砂州ができやすくなる傾向にある。
- 河床上昇傾向にある場合、河床は一般に不安定化し、砂州はできやすくなる。その際、特に波数の大きい領域で不安定領域が広がり、波数の大きい（波長の小さい）砂州ができやすくなる傾向にある。
- 単列砂州より複列砂州の方が、河床低下や上昇の影響を受けにくい。またシールズ数の大きい場合の方が河床低下や上昇の影響を受けにくい。

## 参考文献

- 1) Gessler, J.: Agradation and degradation, River Mechanics, Edited by H. W. Shen, Chapter 8, Water Resources Publications, USA, 1971.
- 2) Colombini, M., G. Seminara and M. Tubino: Finite-amplitude alternate bars, *J. Fluid Mech.*, 181, 213–232, 1987.
- 3) Seminara, G. and P. Hall: Linear stability of slowly varying unsteady flows in a curved channel, *Proc. R. Soc. Lond.*, A. 346, 279–303, 1975.
- 4) Eagles, P. M. and M. A. Weissman: On the stability of slowly varying flow: the divergent channel, *J. Fluid Mech.*, 69, part 2, 241–262, 1975.