

デューン上の浮遊砂に対するsteplength確率モデルの開発

Steplength stochastic Model for Suspended Sands in Sand-Laden Turbulent Flows over Dunes

渡部 靖憲

Yasunori WATANABE

北海道大学大学院 工学研究科准教授

要 旨

固液混相流速同時画像計測システムを開発し、開水路流れ中の移動床に形成されるデューンを過ぎる流体速度及び浮遊砂速度の面的分布を計測した。本計測法は、粒子パターン相関法と粒子追跡法を組み合わせることにより、個々の砂及び流体粒子の軌道上のラグランジュ的速度を取得可能である。このラグランジュ速度の自己相関より粒子移動の乱れによる変動の積分時間スケールを決定し、乱流等計量である乱れエネルギーによってモデル化を行う。このモデル化された積分時間スケールを粒子輸送の確率モデルに導入し、浮遊砂及び流体粒子に対するモンテカルロシミュレーションから、それぞれの輸送距離に関する確率モデル、即ち浮遊砂に対するsteplengthモデルを決定することができる。デューン上の浮遊砂のsteplength 確率密度は対数正規分布で近似可能であることが明らかになった。

《キーワード：デューン，乱流，浮遊砂，steplength，確率モデル》

1. はじめに

開水路流れに発達する河床波上では、乱流境界層の剥離による局所流の中、底面砂は浮遊及び輸送され発達した固液二相乱流が形成される。この乱流下では、浮遊砂の存在により流体の局所流れ及び乱れが影響を受けると同時に、この流況の修正により砂の移流特性もまた変化させられるため¹⁾、この一連の固液相互作用がデューン上の乱流及び粒子輸送を特徴化する重要な要素の一つとなる。結果として、浮遊粒子群は粒子スケールの乱れを誘発しデューン上の流体乱れエネルギーの分布を修正するため、浮遊砂が存在しないケースにおける乱れ特性と大きく異なることになる²⁾。

一方、砂の輸送について、Nakagawa and Nakatsuji³⁾ は水平方向に配置された底面粒子上を粒子が乗り越えて移動する距離に対する確率密度をベースに非平衡流砂量を確率的に与えるステップングモデルを提案しており、複雑な河床再現計算に適用されている⁴⁾。このモデルでは、その仮定から通常代表長さを粒子径を単位としたパラメータにより与えられる掃流砂の水平移動距離を決定するものであるが、前述の様に粒子の輸送機構が全く異なる浮遊砂に対してはモデルの仮定を大きく逸脱するため、デューン上の浮遊砂輸送に適用することは適当ではない。浮遊砂に対する輸送距離を正しく見積もるためには、乱流中の個々の浮遊砂の複雑な力学的応答を考慮した上で個々の粒子運動を追跡する必要があり、また工学的応用の観点から、それらを統計的に評価して何らかの確率モデルを構築することが望まれる。

本研究では、浮遊砂と流体を光学的に分離して同時画像計測を行った秩父ら²⁾の方法を拡張し、従来の標準的なParticle Imaging Velocimetry⁵⁾(PIV)とParticle Tracking Velocimetry(PTV)のハイブリッド法である粒子軌道を取得し粒子スケールの解像度で画像計測を行うことが可能なSuper-Resolution PIV⁶⁾(SRPIV)をデューン上の固液二相乱流に適用し、高解像度オイラー的並びにラグランジュ的乱流統計量を取得する。さらに、これらから個々の粒子の変動スケールを規定するラグランジュ積分時間スケールをモデル化し、これに基づいた水粒子及び浮遊砂粒子のストキャスティックシミュレーションを行い、粒子の放出位置から着床までの水平移動距離の確率密度分布を算定し議論を行う。

2. 計測及び解析方法

全長10m、幅0.15m、壁面高さ0.3m、勾配0.003をもつアクリル製水路で移動床実験を行った(図-1参照)。水路上流端から2mの位置から7.5mの区間に深さ50mmのサンドピットを設置し、平均粒径0.34mmの東北6号珪砂(比重2.61)をサンドピット内に敷き移動砂層を形成した。流量6.84l/sが与えられ、水深は110mmであった。なお、形成されたデューンは波高約30mm、波長350mmであった。デューン波長を計測領域がカバーできるように、2台の同期された高速度カメラ(解像度:1K×1K画素、フレームレート:500fps)を流下方向に隣接して設置され、2つのFOV(150×150mm)が横に連結する様に撮影される。FOVを含む流下方向に平行な鉛直縦断面に対してYAGレーザーシート(励起波長532nm)を水面上方より照射した(図-1参照)。なお、レーザー照射面ではアクリル板で水面を覆い、水面の揺らぎ

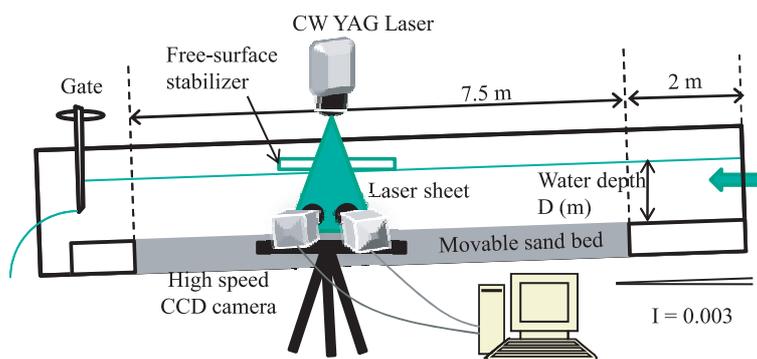


図 - 1 実験装置

によるレーザーシート面の変位を防いでいる．水の流れに対するトレーサーとして比重1.0となるよう調整した蛍光中立粒子(DIA ION, HP20, 粒径250 - 600 μ m)を用いた．

秩父ら²⁾と同様に，異なる光学フィルターにより浮遊砂及び蛍光中立粒子を分離して画像計測を行った．すなわち，550nm以上の光のみを透過させるハイパスフィルタをカメラに装着させることで，レーザー照射により励起した蛍光中立粒子から放出される励起光(波長ピーク630nm)のみを撮影し，また，532nmに透過ピーク波長をもつバンドパスフィルターをカメラに装着させることで，砂からのレーザー反射光のみ撮影することができる．本実験では，2台のカメラを使って，同一デューンに対する固液両相の一波長あたりの速度分布を計測するため，まず蛍光粒子に対する画像計測終了後，フィルターを変更し，すぐ浮遊粒子の計測を行う．この作業に要する約数分間において，デューンは下流へと移動し，計測時刻にラグが生じる．しかしながら，デューンの伝達周期約20分と比較するとこのラグは短く，同一のデューン上に統計的に同一の乱流となっているものと仮定している．なお，撮影された画像は線形投影によりその歪みが補正され，別途撮影した直交グリッドの座標を基に正規化された．画像ノイズは，メディアンフィルターで低減された．

(1) SRPIV

粒子スケールに至るまで計測流速解像度を向上させることを可能とするSRPIV⁶⁾を導入し，気液両相のラグランジュ的粒子運動を計測する．SRPIVでは，次の3つの手順によって粒子速度が決定される(図-2参照)．(1)PIV過程：標準的な相互相関法PIVによって検査領域(110pixel)毎，オーバーラッピング率75%で領域内のパターンマッチングベースの平均速度分布(\bar{u})を計算する．(2)粒子抽出：マスク相関法により粒子を画像上の個々の粒子を抽出する．(3)PTV過程：個々の粒子は(1)の平均流速に近い流速で移流されると仮定し，候補粒子が決定される．例えば，座標 x_0 上の粒子は，座標 $x_0 + \bar{u}\Delta t$ 及び $x_0 - \bar{u}\Delta t$ に与えられた2次探査領域内で検索される．同一粒子の粒子軌道は，3時刻最小加速度原理に基づいて決定される．通常のPTVでは，粒子数密度に応じて粒子軌道の可能な組み合わせが急増するため，計測コスト増加と精度の低下が避けられないが，過程(1)で得られた流速を過程(3)において第1近似として与えることで，軌道候補数を常に数个程度に抑制できるため，高数密度下においてもPTVの様な欠点は補償され，高解像度，高精度計測が可能となる．

計測結果は可視化情報学会⁷⁾より提供されている人工画像により流速精度を見積もることができる．標準的な相関法による精度が，流速相関は0.983，代表速度に対する相対標準偏差は7.0%だったのに対して，SRPIV法による結果は，それぞれ0.992，4.5%となり，顕著に精度が向上したことを確認している．

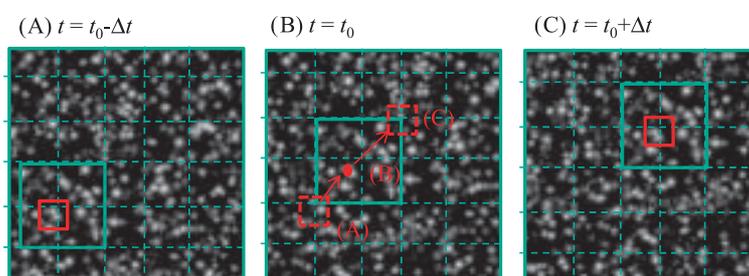


図 - 2 SRPIV法の説明図．相関法の検査領域(緑)内の対象粒子は1フレーム前後において，粒子位置から $\bar{u}\Delta t$ 離れた位置近傍に与えられた2次探査領域内(赤)で検索される．3時刻の候補粒子間の組み合わせは最小加速度原理に基づいて決定される．

(2) ラグランジュ的粒子運動

流体粒子のラグランジュ的挙動及びそれに応答した砂粒子の乱流下での輸送，さらにはデューン上で浮遊された砂の輸送距離の確率密度を見積もるため，計測結果をベースとした固液粒子運動のストキャスティックシミュレーションを行う．

微小粒子の仮定の下，バセット項，付加質量項を無視すると，流体流速 u 中で速度 v をもつ球形固体粒子の運動は次式で記述される．

$$\frac{dx_p}{dt} = v \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\tau_p} (\mathbf{u}(x_p) - v) + \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} \mathbf{g} \quad (2)$$

ここで x_p は粒子位置， ρ_f ， ρ_p はそれぞれ流体，固体粒子の密度， d_p は粒子径， g は重力加速度， $\tau_p = \frac{\rho_p d_p^2}{18\rho_f \nu f(Re)}$ であり， f は粒子レイノルズ数 ($Re = \frac{u(x) - v d_p}{\nu}$ ， ν : 粘性係数) をパラメータとする抗力の非線形効果を表す係数である．式(2)のアンサンブル平均は，

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{1}{\tau} (\overline{\mathbf{u}(x)} - \bar{v}) + \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p} \mathbf{g}. \quad (3)$$

乱流に対して通常知りえる速度は上の様な平均量 (\bar{u} や \bar{v}) である一方，個々の砂の挙動は式(1)は式(2)に従う瞬時速度 ($v = \bar{v} + v'$) で決定されるため，未知である変動速度 (v') が与えられる必要がある．Hinze⁸⁾によると，等方乱流中で固体粒子が流体粒子の近傍で追従する時の粒子，流体速度の分散には次の関係がある．

$$\sigma_p = \sqrt{v'^2} = \frac{T_L / \tau_p}{1 + T_L / \tau_p} \overline{u'^2} \quad (4)$$

ここで， T_L は流体のラグランジアン積分時間スケールである．

次に，変動速度 (v') が緩和遅延効果とランダム変動が課せられた確率過程として以下のLangevin方程式に従うものと仮定する．

$$dv' = -\frac{v'}{T_L^p} dt + \sigma_p \sqrt{\frac{2dt}{T_L^p}} \zeta(t) \quad (5)$$

ここで， $\zeta(t)$ は，平均0，分散1をもつ正規乱数である． σ_p は式(4)から与えられる．Hinze⁸⁾によると，粒子のラグランジアン積分時間スケール T_L^p は次の様に表わせる．

$$T_L^p = T_L \left(1 - \frac{1}{(T_L/\tau)^2 - 1} (T_L/\tau)^2 e^{-t/T_L} - e^{-t/\tau} \right) \quad (6)$$

一方，重力場では，粒子の沈降に伴い鉛直平均速度が発生し，流体と粒子間に顕著な相対速度が現れる．このため，Hinzeが仮定した様に同一の流体と粒子が常に近傍で移動することなく，粒子は次々に異なる粒子から抵抗を受ける所謂 “crossing trajectory effect (CTE)” が重要となる．CTEによる速度相関の変化は，Csanady⁹⁾によって与えられており， T_L が次のように置き換えられる．

$$T_L^* = \begin{cases} \frac{T_L}{\sqrt{1+\beta^2\xi^2}} & (\text{鉛直方向}) \\ \frac{T_L}{\sqrt{1+4\beta^2\xi^2}} & (\text{水平方向}) \end{cases} \quad (7)$$

ここで， $\beta = \frac{T_L}{T_E}$ (T_E はオイラー積分時間スケール)， $\xi = \frac{w_g}{\sigma_f}$ (w_g は沈降速度， σ_f は変動流速の標準偏差)．

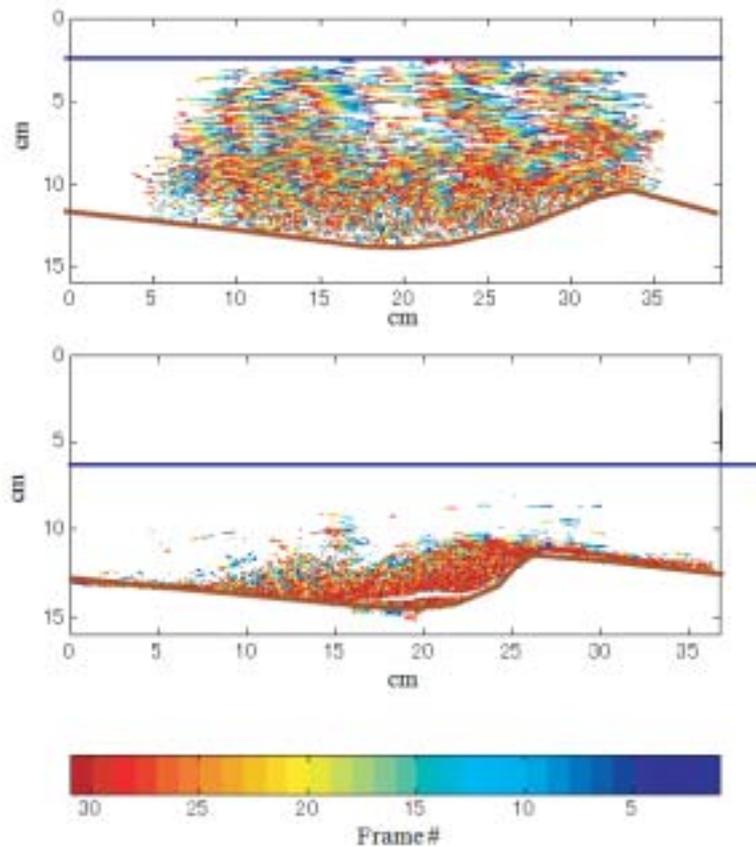


図 - 3 SRPIV によって計測された水粒子(上)と浮遊砂(上)の軌道．計測開始からのフレーム数をカラーで表示している．

3．結果

SRPIV による粒子スケールの流速計測により，オイラー的及びラグランジュ的速度統計量を取得可能である．以下では，流速を u ，砂粒子速度を v で記述し，オイラー的，ラグランジュ的な物理量を“ E ”，“ L ”の添え字でそれぞれ表す．すなわち，オイラー的平均流速($\overline{u_E}$)，変動流速($u'_E = u_E - \overline{u_E}$)，オイラー的平均粒子速度($\overline{v_E}$)，変動粒子速度($v'_E = v_E - \overline{v_E}$)と記述し，ラグランジュ的平均流速($\overline{u_L}$)，変動流速($u'_L = u_L - \overline{u_L}$)，ラグランジュ的平均粒子速度($\overline{v_L}$)，変動粒子速度($v'_L = v_L - \overline{v_L}$)である．これらは局所定常性を仮定した計測期間10秒間の流速及び粒子速度から得られる固定グリッド上及び粒子軌道上の統計量として与えられる．なお，この計測期間は，河床波の伝達周期(約20分)と比べて十分に短くかつ剥離渦近傍の速度変動の代表時間スケール(10msオーダー)と比べて十分に長く，局所定常性を仮定し統計評価を行う上で適当である．

(1) デューン上の固液二相乱流の特徴

図 - 3は，蛍光中立粒子及び浮遊砂の計測開始から30フレーム(60ms)までの軌道をプロットしたものである．流体の流れは，デューンのクレストレベル以上では，水平に単調に流下する一方，それ以下ではトラフ部に落ち込む流れや複数のスケールで回転する流れが確認できる．浮遊砂の輸送はクレスト背後で最も活発であり，また座標16cm近傍で典型的な再付着と再浮遊過程を確認できる．

時間平均流速 $\overline{u_E}$ において，クレスト背後に形成される約15cm程度の剥離域の上縁に水平に伸びるせん断層が明確に現れる(図 - 4参照)．浮遊砂の時間平均速度 $\overline{v_E}$ は，同一位置において $\overline{u_E}$ よりその絶対値は小さいものの，剥離域を含むその分布は類似する．

クレスト背後のせん断層に沿って高強度の乱れエネルギー及びレイノルズストレスが分布し，また剥

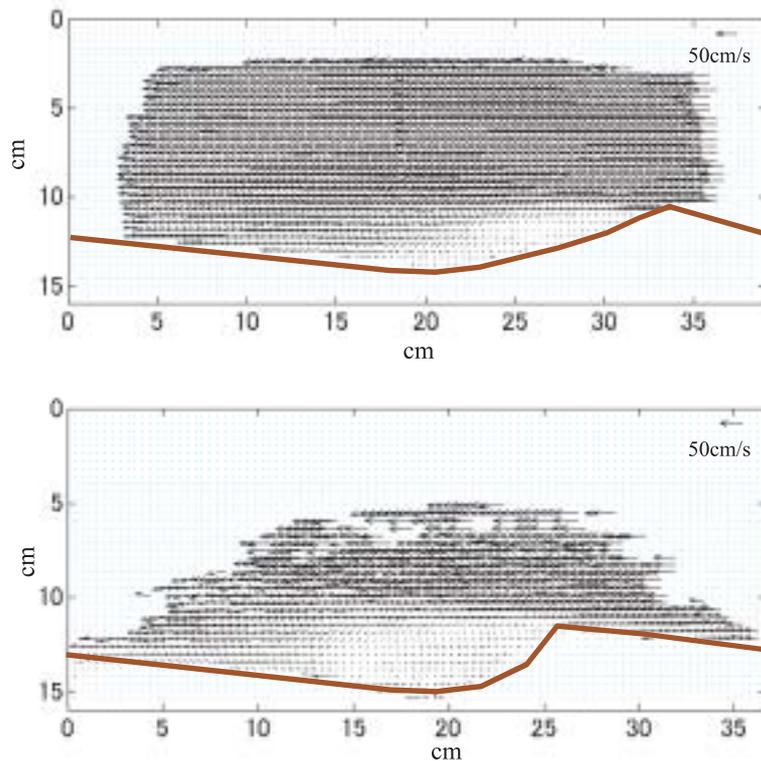


図 - 4 デューン上二相乱流の平均流速 \bar{u} (上)と平均粒子速度 \bar{v} (下)の分布

離域の背後においても広い領域で有意な値を示している(図 - 5参照)。剥離点近傍ではなく、約10.15cm程下流側において最大乱れエネルギーを示す特徴は、移動床デューン上の乱れについて秩父ら²⁾が説明したように、輸送される浮遊砂が流体を攪乱し新たな乱れを生成しその後発達したものと考えられる。

(2) ラグランジュ積分時間スケール

ラグランジュ積分時間スケール T_L とラグランジアン自己相関係数、 $R_L(\tau) = \overline{v'_L(t)v'_L(t+\tau)}/\overline{v'^2_L}$ との次の関係から、計測結果より流体及び浮遊砂の運動に対する実測の T_L^{mea} を求めることができる。

$$T_L^{mea} = \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (8)$$

一方、乱流中の T_L は浮遊砂粒子径 d_p と乱れエネルギー k との関数と考えられ、これをパラメータとした次元解析により、次のように与えられると仮定する。

$$T_L^{model} = \alpha \frac{d_p}{\sqrt{k}} \quad (9)$$

ここで、 T_L^{mea} と T_L^{model} との相関解析より、定数 $\alpha \sim 5.6$ で与えられる。

図 - 6は、流体に対する実測の時間スケール T_{Lf}^{mea} とモデル T_{Lf}^{model} の分布を比較したものである。せん断層を境とした T_{Lf}^{mea} の鉛直変化の特徴を、時間スケールモデルは良く表している。 T_{Lf}^{mea} には部分的に非常に長い時間スケールが見られるが、これは計測誤差に係るものと考えており、これらを見れば、本モデルは定量的にも妥当な値を与えているものとする。

同様に、浮遊砂の実測の時間スケール T_{Ls}^{mea} と、式(9)、式(6)そして式(7)の関係を使って取得した T_{Ls}^p とを比較したものが図 - 7である。なお、クレストレベル以上において、 T_{Ls}^{mea} を与える砂粒子の軌道のサンプル数が少なすぎて統計的意味がない領域の値は削除している。また、浮遊砂計測は、流体計測後数分後に行われており、河床形状が若干異なっており T_{Ls}^{mea} と T_{Ls}^p の直接の比較はできないので注意が必要である。 T_{Ls}^{mea} は、クレスト背後において相対的に長く0.04s程度であり、再付着点近傍では0.01sと流下に従い

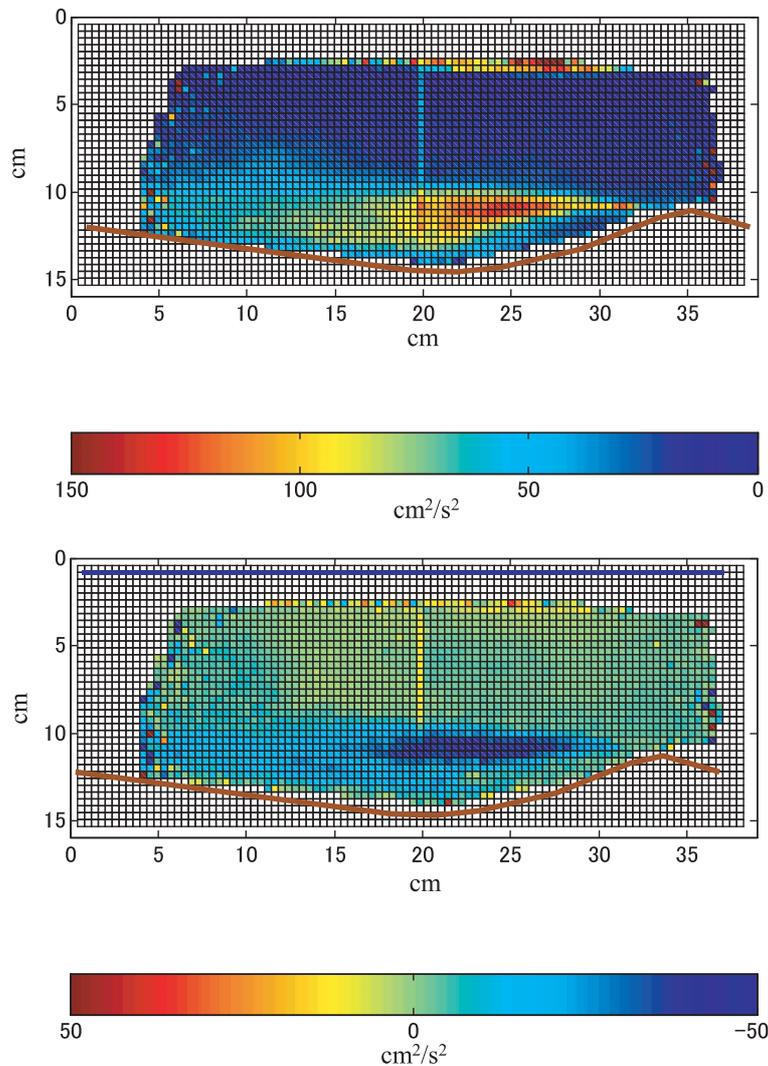


図 - 5 デューン上二相乱流の乱れエネルギー $\frac{1}{2}|u_e|^2$ (上) とレイノルズストレス $\overline{u'w}$ (下) の分布

局所的に変化が大きいものに対して、浮遊砂の積分時間スケールモデル T_L^p は、0.02-0.04s のレンジで滑らかに変化している。この差異は、式(6)の関係が希薄二相等方乱流に対する関係であるため、流体の再付着による再浮遊域では仮定を逸脱した高濃度で底面砂を混合するダイナミクスに基づき乱れが生成されることに起因するものとする。しかしながら、次節で与えられる浮遊砂の輸送距離の確率密度を考える場合、殆どの浮遊砂は再付着点より手前に着床するためこの領域での時間スケールの逸脱は直接有意な影響を与えないものとして次に議論を継続する。

(3) 浮遊砂の水平輸送距離の確率密度

前節で議論した積分時間スケールモデルに対する確率過程において、支配方程式系、式(1)、式(3)そして式(5)を数値的に解き、ストキャスティックシミュレーションを行った。浮遊砂として輸送される殆どの砂はクレストの極近傍から水平方向へ放出されることを実験において確認しており、水粒子及び浮遊砂の両者がクレスト上の鉛直軸上を始点として、それぞれの初期水平速度 $u = \bar{u} + \sigma_f \zeta$ 及び $v = \bar{v} + \sigma_v \zeta$ をもって移流される(ζ は正規乱数)。鉛直軸上の同一の初期位置においてそれぞれ100個の粒子が放出され、その輸送の確率的特徴と着床する水平輸送距離の確率密度について議論される。

クレスト上を通過する水粒子の移流は、剥離域上を越えた後、鉛直方向に発散流となり再付着点より下流ではクレストレベルから底面近傍にほぼ一様に分散して移流される(図 - 8参照)。ここでは示さな

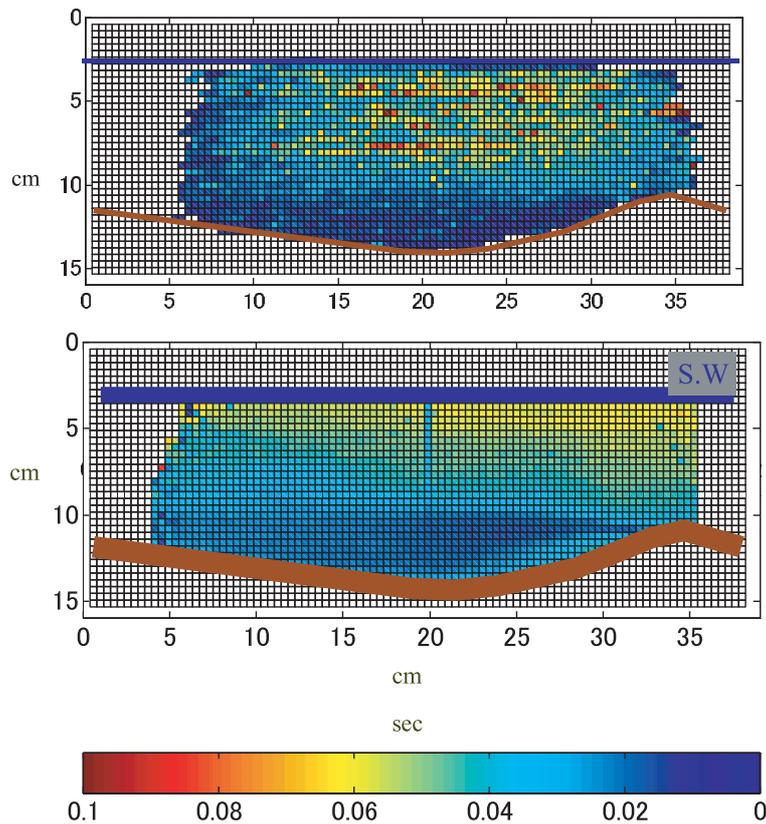


図 - 6 デューン上二相乱流の流体のラグランジュ積分時間スケール $T_{L_f}^{mec}$ (上)と $T_{L_f}^{model}$ (下)の分布

いが、クレストから十分離れたレベルから放出した水粒子は大きなスケールで乱れによる小さな変動を示しながら流下する単純な軌道となる。

図 - 9は、クレスト近傍から放出された浮遊砂の輸送軌道を表したものである。この輸送形態の重要な特徴の一つは、同一鉛直レベルから浮遊砂が放出されたにも関わらず、乱流拡散により浮遊砂の着床位置は剥離域をカバーする程広い領域に分散することである。放出する鉛直レベルが高くなるほど、この水平輸送距離の分散は広がっていく。

それぞれの放出鉛直レベルに対して行った100回の試行シミュレーションによって与えられたクレストからの水平輸送距離の確率密度を表したのが図 - 10である。なお、前述のように本実験では殆どの浮遊砂がクレスト上極近傍から放出されていたので、この確率密度は、掃流砂に対するステップレングスモデルにより記述される移動距離の確率密度の浮遊砂バージョンと考えてよい。前述のように、高い位置から放出すると広い範囲に渡って着床する傾向がある。また、確率密度分布形状は、正規分布から若干前傾化したプロファイルをもち、また放出レベルが高くなる従って分散が増加する特徴を考えるとレベルをパラメータとした対数正規分布で表わせるものとする。なお、任意のデューン上の乱流に対してこの輸送確率密度を一般化する時には、クレスト上の流速とデューン形状もまた対数正規分布形状を決定するパラメータになると考えている。これについては、さらなるパラメータスタディが必要となる。

Nakagawa and Tsujimoto³⁾が与えた掃流砂に対するステップレングス確率密度モデルは砂粒子が水平に敷き詰められた底面上を砂粒子が転がり得る距離の確率的表現であるのに対して、浮遊砂の場合は流れによる輸送及び水 - 粒子相互作用を経由した変動に基づくダイナミクスに支配されており、両者の輸送機構は全く異なる。それ故、水平床上で指数分布のステップレングスモデルで記述される砂輸送形態が、局所的な河床の変形に伴い支配される輸送形態（浮遊砂輸送）が変化し対数正規分布へと遷移していくものとする。

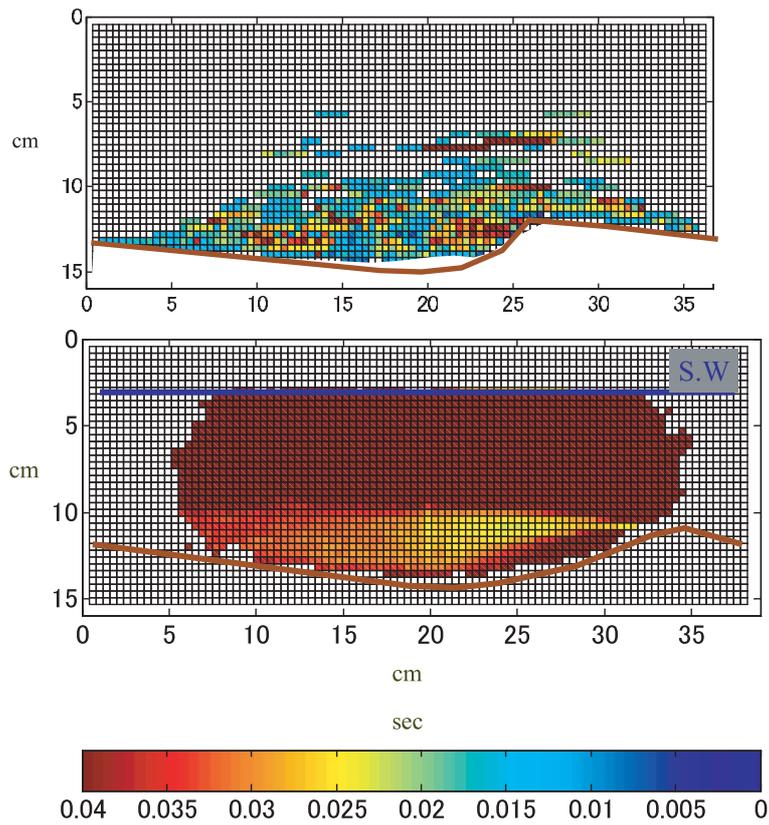


図 - 7 デューン上二相乱流の浮遊砂のラグランジュ積分時間スケール T_{Ls}^{mech} (上)と T_{Ls}^D (下)の分布

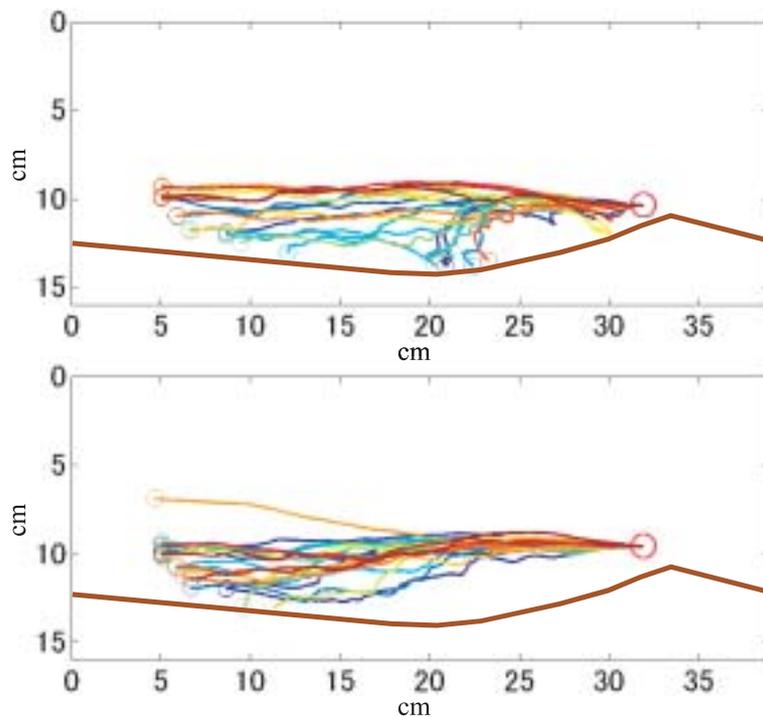


図 - 8 クレスト上から放出された水粒子の試行毎の軌道(上)クレストレベルを原点とした放出鉛直高さ $z'=3\text{mm}$, (下) $z'=7\text{mm}$

4. 結論

デューン上の固液二相乱流中の流体と浮遊砂に対して光学的分離を行った画像計測にSuper Resolution Particle Imaging Velocimetry を適用し, 固液両相に対する高解像度オイラー的速度分布並びに

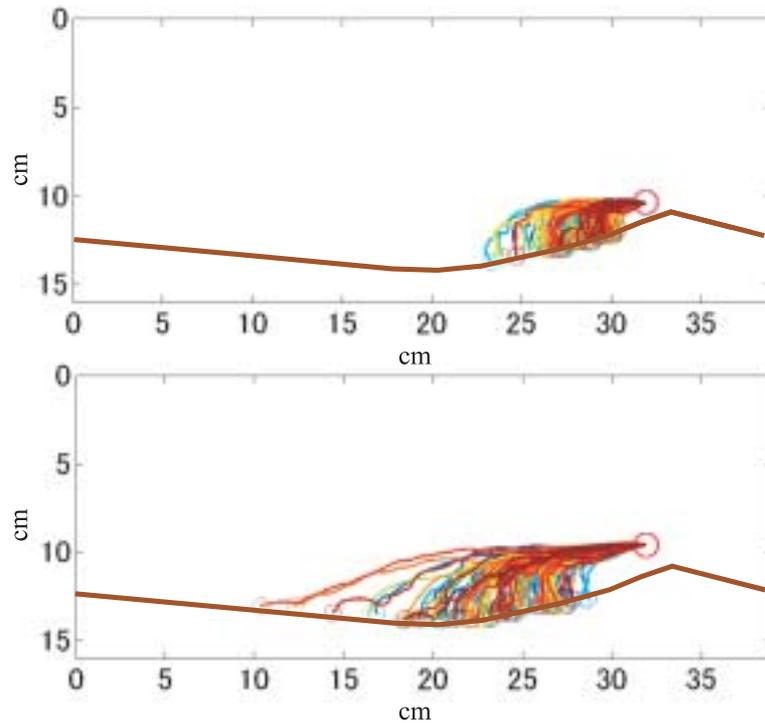


図 - 9 クレスト上から放出された浮遊砂粒子の試行毎の軌道(上) $z'=3\text{mm}$, (下) $z'=7\text{mm}$

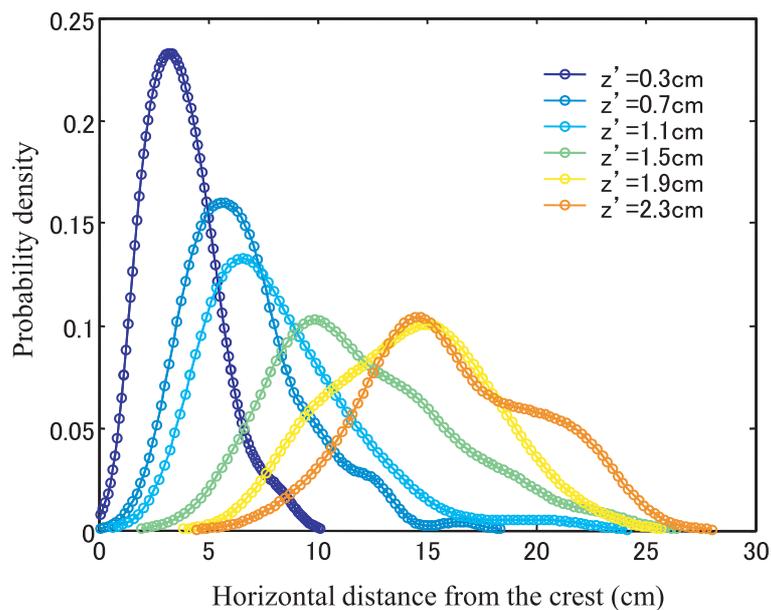


図 - 10 クレストレベルを原点とした放出高さ(z') 毎の浮遊砂水平輸送距離の確率密度

ラグランジュ的粒子速度を高精度で取得した。この計測結果はデューン背後の境界層剥離などの流体側の局所流だけでなく、水 - 浮遊砂の相互作用による乱れ変調の影響を含む乱流特性を与えるものである。

デューン背後に発達するせん断層とこれに沿う乱れエネルギーの発達及び浮遊粒子による攪乱に起因すると考えられる剥離域背後の乱れ強化によってデューン背後のオイラー的乱流は特徴付けられる。両相のラグランジュ的粒子運動から、統計的にラグランジュ積分時間スケールを与え、この空間分布をオイラー的乱れエネルギーから決定するモデルを提案した。通常、この乱れエネルギーは、数値計算あるいは簡単な実験的計測により比較的容易に取得可能なので、両相のラグランジュ積分時間スケールをおおよそ特定可能となる。

モデル化されたラグランジュ積分時間スケールで変動する乱れを基に水粒子及び浮遊砂のストキャステックシミュレーションを行った。クレスト上で放出された浮遊砂の輸送軌道は試行毎に大きくばらつき、着床するまでの水平距離の分散は剥離域全域をカバーする程分散が大きい。この分散は、放出高さが高いほど大きくなる。浮遊砂に対する水平輸送距離の確率密度は対数正規分布に近い形状となり、Nakagawa and Tsujimoto³⁾の掃流砂に対するステップレングスモデルの指数分布からは大きく逸脱する。

謝辞：この研究に対して(財)北海道河川防災センター研究助成によるサポートを受けた。

参考文献

- 1) Gore, R. A. and Crowe, C. T.: Effect of particle size on modulating turbulent intensity, *Int. J. Multiphase Flow*, Vol.15, pp.279-285, 1989.
- 2) 秩父宏太郎・渡部靖憲・清水康行, 浮遊砂がデューン上の乱流に与える力学的影響, 水工学論文集, 第52巻, pp. 583-587, 2008.
- 3) Nakagawa, H. and Tsujimoto, T.: Sand bed instability due to bed load motion *J. Hyd. Div., ASCE*, Vol.106, , pp. 2029-2051, 1980.
- 4) Giri S. and Shimizu Y.: Computation of flow, turbulence and bed evolution with sand waves, *Annu. J. Hydraulic Eng.*, Vol. 50, 2006.
- 5) Adrian R.J.: Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 23, pp. 261-304, 1991.
- 6) Keane, R. D., Adrian, R. J. and Zhang, Y.: Super-resolution particle imaging velocimetry, *Meas. Sci. Technol*, Vol.6, pp. 754-768, 1995.
- 7) Visualization society of Japan. Standardization and popularization project. <http://www.vsj.or.jp/piv/>.
- 8) Hinze J.O.: *Turbulence*, McGRAW-HILL, 1959.
- 9) Csanady, G. T.: Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere, *J. Atmospheric Science*, Vol. 20, pp.201-208, 1963.