変分原理を用いた河床波上の流れの再現とその適用性

Applicability of A New Scheme for Solving Flow Field Over Sand Waves

中山　恵介[1]・堀松　大志[2]・柿沼　太郎[3]
Keisuke NAKAYAMA, Daishi HORIMATSU and Taro KAKINUMA

[1] 北見工業大学
[2] 北見工業大学大学院
[3] 鹿児島大学

要　旨

本研究では，これまでに著者らが開発してきた強非線形強分散内部波方程式を用いて，波と流れの相互干渉に関して解析を行い，室内実験により検証を行った．

まずは強非線形強分散多層内部波モデルを用いた検討を行った．検討には 4 ケースの条件を用意し，一様な流れを与えるために，波動水槽内に平均的に一様な勾配を与えて解析を行うこととした．計算領域を 600 のメッシュで区切り，両端に波長に応じた距離の一定勾配を持った底面を与え, その中央に 12 個分の海底面波を設置した．1 つの海底面波は 40 のメッシュにより再現されるものとした．本研究で用いるモデルの特徴は，速度ポテンシャルをべき乗の関数で再現しているため，考慮する次数を上げてゆくことにより再現性が向上するという点である．

まず，波長が比較的長く，等流水深に対して波長が 12 倍であるケースであり，等流水深に対して 1/2 の振幅をもつ海底地形を与えた場合は，等流におけるフルード数約 0.29 であることからも分かるとおり，逆位相の波形が得られることが確認された．次数が大きくなっても，その再現性には大きな違いがみられず，波長水深比が小さく海底地形振幅水深比が大きい場合，フルード数が 1 よりもかなり小さくなると，波と流れに関してそれほど大きな相互干渉が生じる可能性が低いことが示された．一方，波長水深比 1/4，海底地形振幅水深比 1/2.5，フルード数 0.86 である場合，次数を変化させることにより非常に大きな違いが現れた．次数 1 である場合，フルード数が 0.86 と 1 よりも小さいために逆位相の波が形成されている．しかし，次数が 2 である場合，同位相の三角波が発生することが確認された．

ここで利用しているフルード数とは，長波近似した波に対するフルード数であるため，分散関係が考慮されていない．つまり，分散関係を考慮してフルード数を修正するとその値は 1 以上となり，同位相の波が発生することが予想され，次数 2 とした場合，その傾向を考慮できていることが確認された．

《キーワード：変分原理；波と流れの相互作用》

変分原理を用いた河床波上の流れの再現とその適用性

Applicability of A New Scheme for Solving Flow Field Over Sand Waves

中山　恵介[1]・堀松　大志[2]・柿沼　太郎[3]

Keisuke Nakayama, Daishi Horimatsu and Taro Kakinuma

[1]北見工業大学
[2]北見工業大学大学院
[3]鹿児島大学

要旨

本研究では，これまでに著者らが開発してきた強非線形強分散内部波方程式を用いて，波と流れの相互干渉に関して解析を行い，室内実験により検証を行った．まずは強非線形強分散多層内部波モデルを用いた検討を行った．検討には4ケースの条件を用意し，一様な流れを与えるために，波動水槽内に平均的に一様な勾 配を与えて解析を行うこととした．計算領域を600のメッシュで区切り，両端に波長に応じた距離の一定勾配を持った底面を与え，その中央に12個分の海底面波を設置した．1つの海底面波は40のメッシュにより再現されるものとした．本研究で用いるモデルの特徴は，速度ポテンシャルをべき乗の関数で再現しているため，考慮する次数を上げてゆくことにより再現性が向上するという点である．まず，波長が比較的長く，等流水深に対して波長が12倍であるケースであり，等流水深に対して1/2の振幅をもつ海底地形を与えた場合は，等流におけるフルード数約0.29であることからも分かるとおり，逆位相の波形が得られることが確認された．次数が大きくなっても，その再現性には大きな違いがみられず，波長水深比が小さく海底地形振幅水深比が大きい場合，フルード数が1よりもかなり小さくなると，波と流れに関してそれほど大きな相互干渉が生じる可能性が低いことが示された．一方，波長水深比1/4，海底地形振幅水深比1/2.5，フルード数0.86である場合，次数を変化させることにより非常に大きな違いが現れた．次数1である場合，フルード数が0.86と1よりも小さいために逆位相の波が形成されている．しかし，次数が2である場合，同位相の三角波が発生することが確認された．ここで利用しているフルード数とは，長波近似した波に対するフルード数であるため，分散関係が考慮されていない．つまり，分散関係を考慮してフルード数を修正するとその値は1以上となり，同位相の波が発生することが予想され，次数2とした場合，その傾向を考慮できていることが確認された．

《キーワード：変分原理；波と流れの相互作用》

1.はじめに

水圏における環境保全の観点から，河道における水質環境の改善，生態系システムの維持等は，緊急に解決されなくてはならない問題であると考えられる．その中で河道内に発生する瀬と淵は，多様な生物の生息域として重要であることが知られており，その形成・維持メカニズムを理解することが必要とされている[1)].

瀬と淵は，ある流量以上の支配流量により卓越して形成されていると考えられる．そのような流れが発生する場合には，特に山地部において，瀬と淵の波長に比較して水深が大きくなり，一般的に河道の流れの再現に用いられている長波近似されたモデルでは限界がある[2) 3) 4) 5)].

このような問題は，瀬と淵における流れの再現だけでなく，砂堆の形成において流れを考慮する際の砂堆・反砂堆の区分においてもみられる．河床の波長が水深に比較して1/15よりも短くなる場合，表面波の波速の推定に分散関係を考慮し，常流・射流の判定を行う必要があるという点である[6)].

以上のような問題を解決するためには，非静水圧の効果を考慮し，分散関係を再現できるモデルを利用する必要がある．

これまで著者らは，大きな地形変化における任意波長の強分散関係を再現できるモデルとして，強非線形強分散内部波方程式モデル[7) 8)]を開発してきた．内部波方程式の適用範囲は広く，本研究で取り扱っているような問題へは，上層を空気，下層を水と考えることで適用できる．

そこで本研究では，強非線形強分散内部波方程式モデルを用いて，これまで再現が困難であった，河床波の波長が水深に比して15以下であるような場合における再現を試み，その適用性を検討することを目的とする．

2.強非線形強分散内部波方程式

強非線形強分散内部波方程式においては，非静水圧の効果が考慮されており，また，強分散関係を高精度に再現するために，速度ポテンシャルの概念が利用されている．基本的には多層の方程式であり，i層目の界面における変位を$z=\eta_{i,j}$($j=0$：各層での上の界面，$j=1$：各層での下の界面)，そこでの圧力を$p_i(x,t)$とすると，i層目における汎関数は以下の式で与えられる．

$$F_i[\phi_i,\eta_{i,j}]=\int_{t_0}^{t_1}\iint_A\int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}}\left\{\frac{\partial\phi_i}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\phi_i)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\right)^2+gz+\frac{p_{i-j}+P_i}{\rho_i}\right\}dzdAdt \tag{1}$$

$$P_i=\sum_{k=1}^{i-1}(\rho_i-\rho_k)gh_k \tag{2}$$

ここで，ϕ_i：i層における速度ポテンシャル，g：重力加速度，ρ_i：i層の密度，p_i：i層下面の圧力，である．

流速ポテンシャルの再現のために，べき乗で展開される式(3)を用いることとする．

$$\phi_i(x,z,t)=\sum_{\alpha=0}^{N-1}Z_{i,\alpha}\{z,h_i(x)\}f_{i,\alpha}(x,t) \equiv Z_{i,\alpha}f_{i,\alpha} \tag{3}$$

ここで，$Z_{i,\alpha}$：i層目における次数αの鉛直分布関数，$f_{i,\alpha}$：i層目における次数αの重み，である．

式(3)を式(1)に代入することにより，以下に示されるオイラー-ラグランジアン方程式が得られる．これが，強非線形強分散内部波方程式である．

$$Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,1}}\frac{\partial\eta_{i,1}}{\partial t}-Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,0}}\frac{\partial\eta_{i,0}}{\partial t}+\nabla\left(\int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}}Z_{i,\alpha}Z_{i,\beta}dz\nabla f_{i,\beta}\right)-\int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}}\frac{\partial Z_{i,\alpha}}{\partial z}\frac{\partial Z_{i,\beta}}{\partial z}dzf_{i,\beta}=0 \tag{4}$$

$$Z_{i,\beta}^{\eta_{i,j}}\frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t}+\frac{1}{2}Z_{i,\beta}^{\eta_{i,j}}Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,j}}\nabla f_{i,\beta}\nabla f_{i,\gamma}+\frac{1}{2}\frac{\partial Z_{i,\beta}^{\eta_{i,j}}}{\partial z}\frac{\partial Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,j}}}{\partial z}f_{i,\beta}f_{i,\gamma}+g\eta_{i,j}+\frac{p_{i-j}+P_i}{\rho_i}=0 \tag{5}$$

本研究では，表面波に着目した再現を行うため2層のみ考慮し，上層を空気，下層を水とする．鉛直分布関数を式(6)のように定義することにより，最終的に上層の方程式(7)，(8)と下層の方程式(9)，(10)が得られる．

上層の方程式：

$$Z_{i,\alpha}=z^{\alpha} \tag{6}$$

$$\eta^{a}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{1}{\alpha+\beta+1}\nabla\left(\eta^{\alpha+\beta+1}\nabla f_{1,\beta}\right)-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}\eta^{\alpha+\beta-1}f_{1,\beta}=0 \tag{7}$$

$$\eta^{\beta}\frac{\partial f_{1,\beta}}{\partial t}+\frac{1}{2}\eta^{\beta+\gamma}\nabla f_{1,\beta}\nabla f_{1,\gamma}+\frac{\beta\gamma}{2}\eta^{\beta+\gamma-2}f_{1,\beta}f_{1,\gamma}+g\eta+\frac{p_1}{\rho_1}=0 \tag{8}$$

下層の方程式：

$$\eta^{a}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{1}{\alpha+\beta+1}\nabla\left\{\left(\eta^{\alpha+\beta+1}-b^{\alpha+\beta+1}\right)\nabla f_{2,\beta}\right\}-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-1}\left(\eta^{\alpha+\beta-1}-b^{\alpha+\beta-1}\right)f_{2,\beta}=0 \tag{9}$$

$$\eta^{\beta}\frac{\partial f_{2,\beta}}{\partial t}+\frac{1}{2}\eta^{\beta+\gamma}\nabla f_{2,\beta}\nabla f_{2,\gamma}+\frac{\beta\gamma}{2}\eta^{\beta+\gamma-2}f_{2,\beta}f_{2,\gamma}+g\eta+\frac{p_1+(\rho_2-\rho_1)gh_1}{\rho_2}=0 \tag{10}$$

鉛直分布関数の再現次数を高くすることにより，強非線形強分散表面波の再現を行うことが出来る．これまでの研究で，次数6までを考慮することにより，微小振幅における分散関係を完全に再現することが出来ることが報告されている．ちなみに，次数を1つのみ考慮した場合，通常河川の流れの再現に用いられる長波近似された浅水流方程式による解が再現される．式(7)から式(10)までを解く計算スキームについては，Kakinuma,Nakayama[7)]を参考にしていただきたい．

3.正弦波で与えられる河床波上の流れの検討

河床波の振幅，波高が変化することにより，水面形がどのように現れるかを検討するために，**図-1**に示されるような正弦波で再現される河床波上での流れの検討を行った

(1) 計算領域と条件

図-1に示される計算領域を600のメッシュで区切り，両端に波長に応じた距離の一定勾配を

持った河床を与え，その中央に12ヶ分の河床波を設置した．1つの河床波は40のメッシュにより再現されるものとし，ブシネスク方程式等を利用して波を再現する場合に最低必要であるといわれる30ヶのメッシュ数より多くした．

上流端の境界条件は水位一定，流速は放射条件を与え，下流端は水深，流速ともに放射条件を与えた．水路幅は0.3mとした．表面波に対する検討であるため，2層における上層には密度1.000kg/m^3，下層には1000kg/m^{3}を与えた．CFL条件は0.1程度を与えた．

計算では，上流における一定勾配河床から正弦波で再現される河床への変化点，および下流におけるその逆の変化点において，特殊な波が発生したため，河床波上での流れの検討には，その影響のない中央における8から9波長目の河床波上の流れを検討対象とした．計算は，定常状態に達するまで行われた．本研究で対象とした流れの条件は，**表-1**に示されるとおりのものであり，それらの条件を与えた意義については，各節において詳細を記す．

(2) 長波近似可能量域における検討

河床波の波長が水深に比して大きな場合，長波近似を利用することが出来，通常のフルード数による水面波の評価を行うことが出来る．本節では，水深波長比に1/12，河床波の振幅に0.025m，フルード数約0.29を，それぞれ与えることにより，河床波と逆位相の水面形が，本モデルを利用することにより再現されることを確認した．

その結果，予想通りに河床波と逆位相の水面波が再現された．その傾向は次数を大きくしてもほとんど変わりなく，水深波長比が1/12である場合，長波近似でも比較的再現性が良いことが確認された(**図-2**)．但し，水面形や河床波直上での流速を詳細に検討すると，次数2と次数1との結果では数%の違いが発生していたことを記しておく．

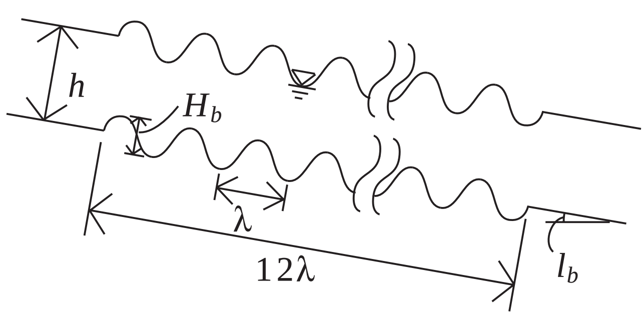

図-1 正弦波を河床波として与えた場合の計算領域

表-1 正弦波を河床波として与えた場合の計算条件

	流量 Q(m^3/s)	水路長 (m)	河床波 Hb(m)	河床波長 λ(m)
case1	0.003	9	0.025	0.6
case2	0.003	3	0.025	0.2
case3	0.003	3	0.003	0.2
case4	0.009	3	0.003	0.2

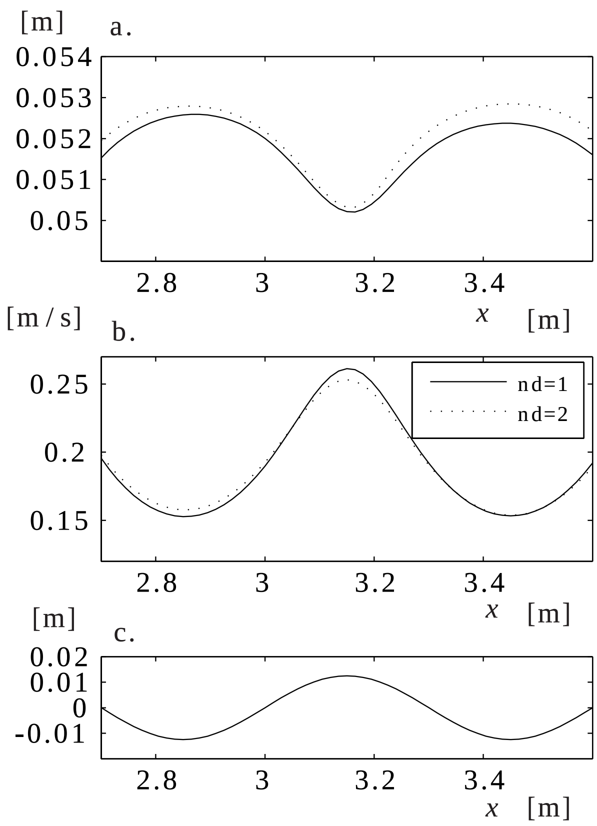

図-2 case 1：(a) 表面波形．(b) 河床波直上の流速．(c) 河床波形状．

(3) 水深波長比が1/4およびフルード数が0.29での検討

続いて，前節と同じフルード数0.29を与え，水深波長比を1/4まで増加した場合における再現計算を行った(**図-3**)．その際，河床波の波高は前節のケースと同様な0.025mを与えた．次数1である長波近似のケースにおいては，フルード数が0.29であるため，河床波と逆位相の水面波が発生することが確認された．逆に，次数が2になると，河床波の山の部分での水位が減少が顕著となり，山の後部で射流へと近づく流れが再現されていた．

前者のケースであるcase 1と比較すると，河床波の振幅を大きくしたことにより，水面形が大きく変動し，有限振幅故の現象が再現されているのではないかと考えられる．分散関係を利用して線形な微小振幅の波速を推定すると0.535 m/sであり，水深平均流速0.2 m/sよりも大きく，逆位相の表面波が発生する条件であることが分かる．大きな傾向は次数1である長波近似でも再現することができているが，水面形および流速分布に大きな変化が現れており，case 2は，従来の長波近似された浅水流方程式モデルでは再現できない流れ場であることが分かった．

次数2で表面波が大きく変動した発生した理由として，2つの原因が考えられる．1つ目は河床波の振幅が大きく，微小振幅理論の適用範囲外であった．もう一つは，一様流が存在することによる非線形効果のため，微小振幅理論の適用範囲外であったというものである．

以上の2つの要因のうち，どちらが主たる要因であるかを究明するために，河床波の振幅を0.003 mとし，微小振幅理論の適用が可能な範囲での再現計算を行った(**図-4**)．振幅が小さくなったことにより，全ての次数において河床波

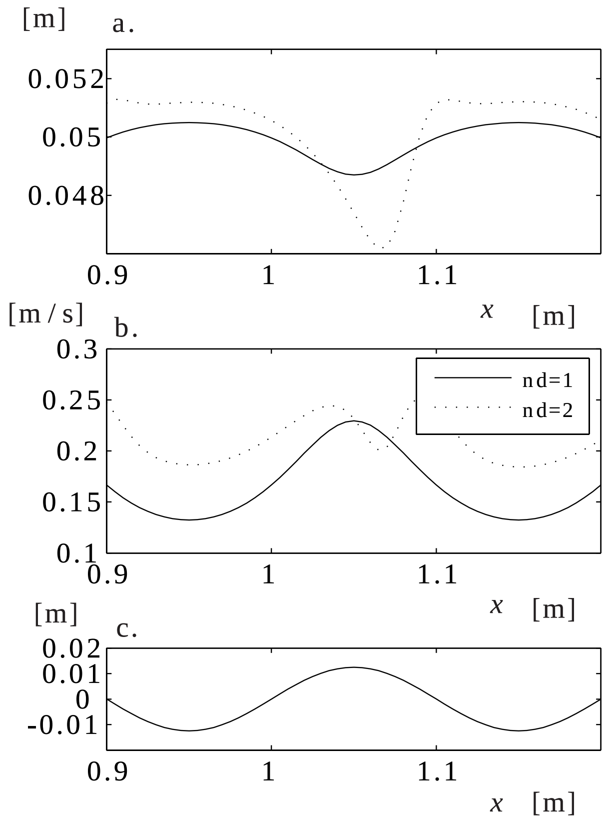

図-3 case 2：(a) 表面波形．(b) 河床波直上の流速．(c) 河床波形状．

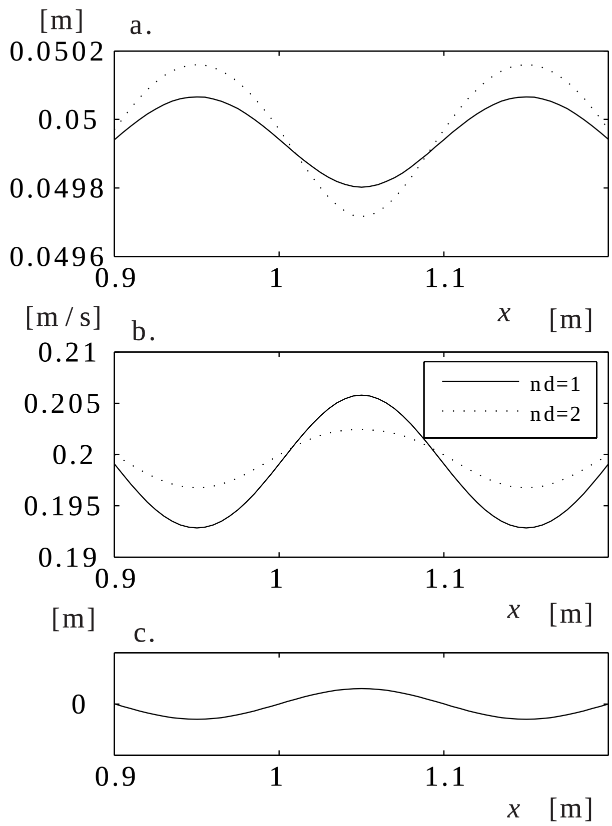

図-4 case 3：(a) 表面波形．(b) 河床波直上の流速．(c) 河床波形状．

と同様に，表面波と流速が正弦波として再現された．しかし，次数1での表面波は逆位相であるが，それ以上の次数では同位相であるという結果が得られた．また，河床波直上の流速に着目すると，次数1とそれ以外で大きな差が生じていることが確認された．この結果，水深波長比が大きくなると，一様流の存在による非線形効果により，表面波の形状が大きく異なることが分かった．

(4) 水深波長比が1/4およびフルード数が0.86での検討

前節で，一様流が存在することにより，非線形効果が大きくなる場合があり，長波近似では流れの再現が不十分であることが示された．本節では，その効果に加えて，分散関係を考慮することにより，長波近似された波速よりも実際の波速が小さくなる効果による流れ場の変化に対する検討を行った．流量を3 l/sから9 l/sへと増加させ，平均流速を約0.6 m/sとした．長波近似による波速は0.7 m/sであり，分散関係を考慮した波速は0.53 m/sであるため，分散関係を考慮できる次数2以上である場合，長波近似である次数1と大きな違いが現れることが期待される．

次数1である場合，波速が平均流速よりも大きいため，いわゆる常流状態の表面波が再現された(**図-5**)．その結果を次数2と比較すると，その差は明らかであった．例えば，次数2である場合，弱分散性を考慮することが出来るため，波速は平均流速よりも遅くなり，河床波と同位相の表面波が発生し易くなることが推測され，その通りの再現結果を得ることが出来た．

本研究で提案している強非線形強分散内部波方程式の大きな特徴は，流速の鉛直分布を把握することが出来る点である．そこで河床波上の鉛直流速分布を計算した(**図-6**)．長波近似であ

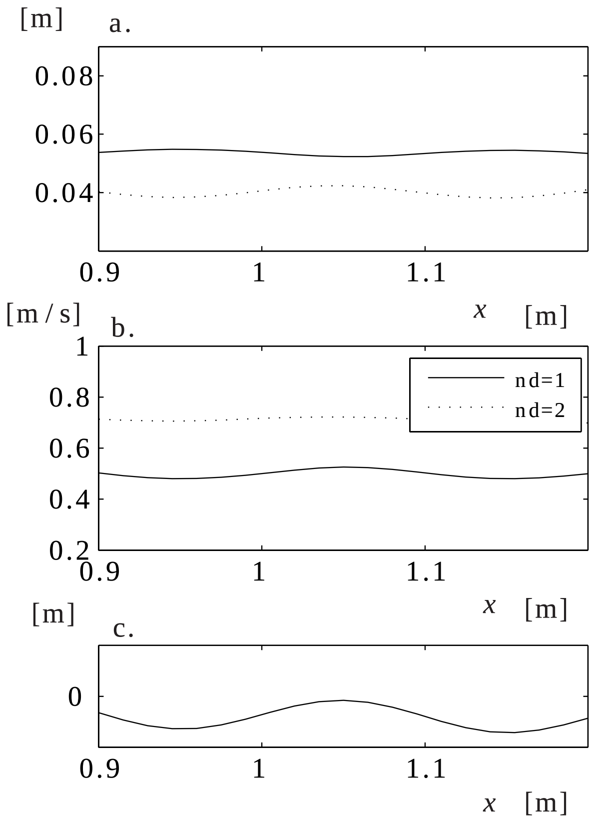

図-5 case 4：(a) 表面波形．(b) 河床波直上の流速．(c) 河床波形状．

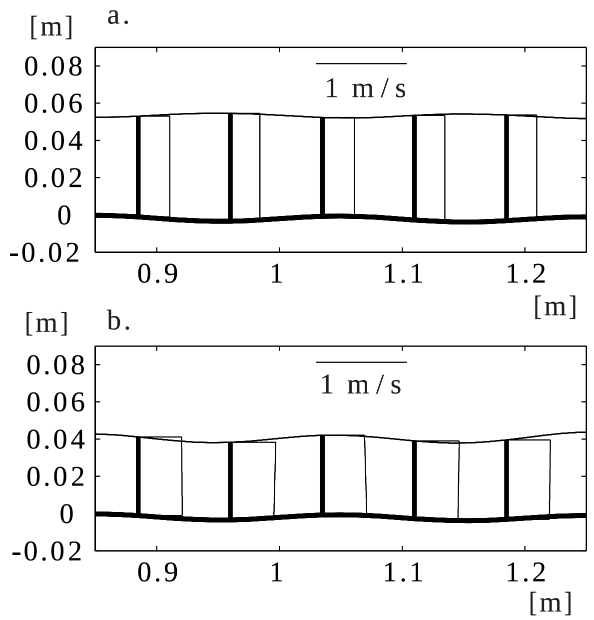

図-6 case 4での河床波上における流速の鉛直分布．(a) 次数1．(b) 次数2．

る次数1では，鉛直方向に一様な水平流速が再現されていることが確認された．次数2になると，その再現形状が滑らかになっていることが分かる．大きな特徴として，表面波の山後方において，底面での流速の減少が再現されていた．強非線形強分散内部波方程式は，ポテンシャルを仮定しているため，渦度を考慮することが出来ないが，波形が急激に変化することによる淀み域のような領域を再現できる可能性があることを示していると考えられる．以上の結果より，河床波の波長が水深に比して小さい場合，長波近似による再現には大きな限界があり，少なくともブシネスクタイプの方程式に対応する，次数2以上を用いた再現計算を行う必要があることが分かった．

4.おわりに

変分原理に基づく強非線形強分散内部波方程式を利用して，河床波上における流れを再現し，その結果の検討を行い，以下のような結論を得た．

(1)　強非線形強分散内部波方程式モデルを用いて水深河床波波長1/12の再現計算を行い，常流状態である場合，次数2までの間で，逆位相の表面波が再現されることが確認された．

(2)　長波近似だと常流であるが，分散関係を考慮することにより波速が流速よりも小さくなる場合においては，最低でも次数2以上を用いた再現計算を行うことが必要であることが分かった．

参考文献

1) 藤田正司，道上正規：千代川における淵の構造と魚類の生息，水工学論文集，第40巻，pp.181-187, 1996.
2) 上林悟，長谷川和義：山地河川の三次河床波に関する水理学的解析，土木学会北海道支部論文集，第53号, pp.32-37, 1997.
3) 竜澤宏昌，林日出喜，長谷川和義：渓流の小規模河床形態に関する研究 - 魚類等の生息環境保全対策への応用を目指して - ，土木学会論文集Ⅱ，第656巻／Ⅱ-52号, pp.83-101, 2000.
4) 中山恵介，佐藤圭洋，堀川康志：CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発，水工学論文集，第42巻, pp.1159-1164, 1998.
5) 中山恵介，堀川康志，三上卓哉：射流場におかれた円柱周辺の流れの解析，水工学論文集，第43巻, pp.365-370, 1999.
6) 河村三郎：土砂水理学，森北出版株式会社, pp.107-148, 1982.
7) Kakinuma T., K. Nakayama: Numerical simulation of internal waves using a set of fully nonlinear internal wave equations, Annual Journal of Hydraulic Engineering, JSCE, Vol. 51, pp.169-174, 2006.
8) 柿沼太郎，中山恵介：渦度を考慮した非線形波動方程式による表面波及び内部波の数値解析，海岸工学論文集，第54巻, 2007.