

中小規模の流域を対象とした 洪水流出予測モデルに関する研究

Study on Flood Forecasting Runoff Model for Small or Middle Area Basin

嵯峨 浩
Hiroshi SAGA

北海学園大学工学部社会環境工学科

要 旨

地球温暖化の影響が叫ばれる今日、降雨の特性も変化し短時間に多量の雨が観測されるようになっている。これに伴う洪水も頻発に発生し、防災・減災の面から数時間先の出水量を正確に予測する事は重要な問題の一つである。

本研究は、損失機構を含む直列二段型貯留関数モデルにカルマンフィルター理論をカップリングし流出予測モデルの構築を図ることを目的とする。損失機構を含む直列二段型貯留関数モデルには、所謂、星モデルと筆者のモデルがある。下段タンクに損失孔を有するのが筆者のモデルであり、無いのが星モデルである。即ち、未知パラメーターが4個と3個の違いがある。自由度である未知パラメーターが多いという事は、複雑な流出でもより対応可能なモデルという事ができ、予測精度向上が期待できる。

本報告は、この研究テーマの第一歩として理論構築を述べたものである。

《キーワード：流出予測モデル；直列二段型貯留関数モデル；カルマンフィルター理論》

1. はじめに

星モデルとカルマンフィルター理論を組み合わせた洪水予測モデルは、北海道開発局において既に実用に供されているが、他の流出モデルを用いた予測モデルとの精度比較は行われたことがない。逆にいえば現在供用されている予測モデルが優れていることを示しているともいえるが、理論が難解なこともあり誰も手をつけていないというところが実情のようである。このような背景を踏まえ、少しでも洪水予測の精度向上を目的として、未知パラメーターの数が星モデルより一つ多い筆者の流出モデルを用いて洪水予測モデルの構築を図る。

2. 損失孔を含む貯留関数を用いた直列二段タンク型モデル

損失孔を含む直列二段タンク型貯留関数モデルの概念を図-1に示す。また、(1)式と(2)式はそれぞれ、上段タンクと下段タンクの支配方程式を示している。

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = r - q_1 - p_s \\ S_1 = k_1 q_1^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ p_s = \alpha_1 q_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dS_2}{dt} = p_s - q_2 - z_2 \\ S_2 = k_4 q_2 + k_5 \frac{dq_2}{dt} \\ z_2 = \alpha_2 q_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$q = q_1 + q_2 \quad (3)$$

ここに、 $S_1 \cdot S_2$ ：貯留高 (mm), r ：観測雨量 (mm/hr), $q_1 \cdot q_2$ ：側方流出高 (mm/hr), q ：流出高 (mm/hr), $p_s \cdot z_2$ ：浸透量 (mm/hr), $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4$ ：貯留係数, $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ ：損失係数, $p_1 \cdot p_2$ ：貯留指数である。

貯留指数は星により、流れがマニング則に従うとそれぞれ $p_1=0.6$, $p_2=0.4648$ になることは周知のとおりである。同様に貯留係数は次のように表すことができる。

$$\begin{cases} k_1 = c_1 A^{0.24} \\ k_2 = c_2 k_1^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ c_3 = 1 + \alpha_1 \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 A ：流域面積 (km²), $\bar{r}$ ：平均降雨強度 (mm/hr)

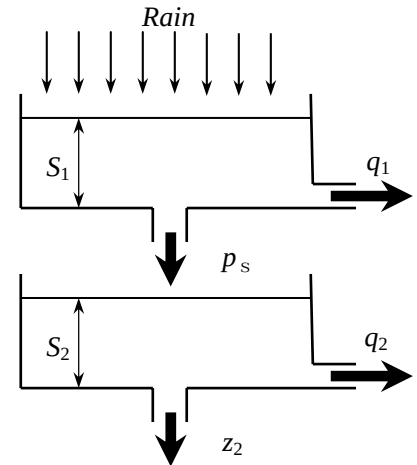


図-1 直列二段タンク型貯留関数モデル

c_4, c_5, c_6 をあらたに導入すると、下段タンクの貯留係数との関係は次のようになる。

$$\begin{cases} c_4 = 1/k_5 \\ c_5 = (1+\alpha_2)/k_5 \\ c_6 = k_4/k_5 \end{cases} \quad (5)$$

さらに、AR フィルター法を適用すると、

$$\begin{cases} c_4 = c_5 / (1+\alpha_2) \\ c_5 = (\delta/T_c)^2 \\ c_6 = \delta^2 / T_c \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 δ ：減衰係数（ $\delta=2.1$ ）、 T_c ：地下水流出成分の分離定数（流域により異なる）

ここで、未知パラメーターは c_1, c_2, c_3, α_2 の 4 個である。

3. カルマンフィルターのシステム方程式の定式化

(1) 式と (2) 式で示される支配方程式を解くため、次式のように変数変換を行う。

$$x_1 = q_1^{p_2}, \quad x_2 = \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}), \quad x_3 = q_2, \quad x_4 = \frac{dq_2}{dt} \quad (7)$$

これらの変数は状態変量であり、これらの他に未知パラメーターである c_1, c_2, c_3, α_2 と降雨量 r を加えてシステム方程式を作成する。これらをベクトル表示すると、次のようになる。

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \alpha_2 \\ \hline r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここに、

$$X_1 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T, \quad X_2 = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \alpha_2]^T, \quad X_3 = r \quad (9)$$

上式で T は転置を意味する。

4. 状態方程式の伝達方程式

伝達方程式の定式化は次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, r) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, r) = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)} x_2 - \frac{c_3}{k_2} x_1^{\frac{1}{p_2}} + \frac{r}{k_2} \\ \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, \dots, r) = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = f_4(x_1, x_2, \dots, r) = -c_6 x_4 - \frac{1+\alpha_2}{k_5} x_3 + c_4 p_s \end{cases} \quad (10)$$

このとき、モデル定数は時間的に変化しないと仮定して、

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = f_5(x_1, x_2, \dots, r) = 0 \\ \frac{dc_2}{dt} = f_6(x_1, x_2, \dots, r) = 0 \\ \frac{dc_3}{dt} = f_7(x_1, x_2, \dots, r) = 0 \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = f_8(x_1, x_2, \dots, r) = 0 \\ \frac{dr}{dt} = f_9(x_1, x_2, \dots, r) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

したがって、状態変量に関する微分方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \alpha_2 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)} x_2 - \frac{c_3}{k_2} x_1^{\frac{1}{p_2}} + \frac{r}{k_2} \\ x_4 \\ -c_6 x_4 - c_5 x_3 + c_4 p_s \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

上式をマトリックス表示すると、

$$\frac{dX}{dt} = F(x) \quad (13)$$

ここに、

$$F(x) = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \mid f_5 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_8 \mid f_9]^T \quad (14)$$

カルマンフィルタは線形システムの状態変量推定として導かれているため、テーラー級数展開を利用して (12) 式を線形近似する。なお、上段タンクからの浸透量 p_s は上段タンクの未知パラメーターが決まれば一義的に決まるので既知量として扱う。

$$\frac{dX}{dt} = F(X) = A(X^*)X + D(X^*) \quad (15)$$

ここに、 $D(X^*) = F(X^*) - A(X^*)X^*$ である。

Jacobian 行列 $A(X^*)$ は次のように表わされる。

$$A(X^*) = \left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline O_1 & O_2 & O_3 \end{array} \right] \quad (16)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{25} & a_{26} & a_{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{48} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{29} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$O_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

行列 $A(X^*)$ の各要素は次式で計算される。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{*\left(\frac{p_1}{p_2}-2\right)} x_2^* - \frac{c_3}{k_2} \frac{1}{p_2} x_1^{*\left(\frac{1}{p_2}-1\right)} \\ a_{22} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{*\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)} \\ a_{25} = \frac{1}{c_1} \left\{ \frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{*\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)} x_2^* + 2 \frac{c_3}{k_2} x_1^{*\frac{1}{p_2}} - 2 \frac{r}{k_2} \right\} \\ a_{26} = \frac{1}{c_2} \left\{ \frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{*\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)} x_2^* + \frac{c_3}{k_2} x_1^{*\frac{1}{p_2}} - \frac{r}{k_2} \right\} \\ a_{27} = -\frac{1}{k_2} x_1^{*\frac{1}{p_2}} \\ a_{29} = \frac{1}{k_2} \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{43} = -c_5 \\ a_{44} = -c_6 \\ a_{48} = \frac{1}{1 + \alpha_2} (c_5 x_3^* - c_4 p_s^*) \end{array} \right. \quad (20)$$

また、(15) 式のベクトル $D(X^*)$ は次式で計算される。

$$D(X^*) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \\ x_4 \\ f_4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & a_{26} & a_{27} & 0 & a_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & a_{48} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \alpha_2 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ d_4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで、

$$d_2 = \frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 3 \right) x_1^{* \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right)} x_2^* + \frac{c_3}{k_2} \left(\frac{1}{p_2} - 3 \right) x_1^{* \frac{1}{p_2}} + 3 \frac{r}{k_2} \quad (22)$$

$$d_4 = c_4 \left(\frac{1+2\alpha_2}{1+\alpha_2} p_s^* - \alpha_2 x_3^* \right) \quad (23)$$

(15) 式は線形常微分方程式であり $A(X^*)$ と $D(X^*)$ が定数係数行列の場合, 差分方程式に変換される.

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (24)$$

(24) 式を行列表示すると,

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_k \quad (25)$$

ここに,

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ \hline X_2 \\ \hline X_3 \end{bmatrix}_k \quad (26)$$

[illegible]

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ 0 & 0 & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{bmatrix} \quad (28)$$

ここで、 γ_{11} と γ_{21} は 0 ではないが、計算の過程では必要のない要素である。

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (29)$$

これらの要素は具体的に次のようになる。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + a_{21}T\beta_1 \\ \phi_{12} = T\beta_2 \\ \phi_{21} = a_{21}\phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_{22}T + \frac{1}{2}a_1T^2 + \frac{1}{6}a_2T^3 + \frac{1}{24}(a_{21}a_1 + a_{22}a_2)T^4 \\ \phi_{33} = 1 + a_{43}T\beta_3 \\ \phi_{34} = T\beta_4 \\ \phi_{43} = a_{43}\phi_{34} \\ \phi_{44} = 1 + a_{44}T + \frac{1}{2}a_3T^2 + \frac{1}{6}a_4T^3 + \frac{1}{24}(a_{43}a_3 + a_{44}a_4)T^4 \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \phi_{15} = a_{25}T\beta_1 \\ \phi_{16} = a_{26}T\beta_1 \\ \phi_{17} = a_{27}T\beta_1 \\ \phi_{25} = a_{25}T\beta_2 \\ \phi_{26} = a_{26}T\beta_2 \\ \phi_{27} = a_{27}T\beta_2 \\ \phi_{38} = a_{48}T\beta_3 \\ \phi_{48} = a_{48}T\beta_4 \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \phi_{19} = a_{29}T\beta_1 \\ \phi_{29} = a_{29}T\beta_2 \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \gamma_{12} = T\beta_1 \\ \gamma_{22} = \phi_{12} \\ \gamma_{34} = T\beta_3 \\ \gamma_{44} = \phi_{34} \end{cases} \quad (33)$$

ここに,

$$\begin{cases} a_1 = a_{21} + a_{22}^2 \\ a_2 = 2a_{21}a_{22} + a_{22}^3 \\ a_3 = a_{43} + a_{44}^2 \\ a_4 = 2a_{43}a_{44} + a_{44}^3 \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_{22}T^2 + \frac{1}{24}a_1T^3 \\ \beta_2 = 1 + \frac{1}{2}a_{22}T + \frac{1}{6}a_1T^2 + \frac{1}{24}a_2T^3 \\ \beta_3 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_{44}T^2 + \frac{1}{24}a_3T^3 \\ \beta_4 = 1 + \frac{1}{2}a_{44}T + \frac{1}{6}a_3T^2 + \frac{1}{24}a_4T^3 \end{cases} \quad (35)$$

(24) 式を行列要素で表すと次のようになる.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \alpha_2 \\ \hline r \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 & 0 & \phi_{15} & \phi_{16} & \phi_{17} & 0 & \phi_{19} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 0 & 0 & \phi_{25} & \phi_{26} & \phi_{27} & 0 & \phi_{29} \\ 0 & 0 & \phi_{33} & \phi_{34} & 0 & 0 & 0 & \phi_{38} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{43} & \phi_{44} & 0 & 0 & 0 & \phi_{48} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \alpha_2 \\ \hline r \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_{12}d_2 \\ \gamma_{22}d_2 \\ \gamma_{34}d_4 \\ \gamma_{44}d_4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix}_k \quad (36)$$

状態変量の伝達方程式は (36) 式となるが, これを展開すると次のよう記述できる.

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = \phi_{11}x_{1,k} + \phi_{12}x_{2,k} + \phi_{15}c_{1,k} + \phi_{16}c_{2,k} + \phi_{17}c_{3,k} + \phi_{19}r_k + \gamma_{12}d_{2,k} \\ x_{2,k+1} = \phi_{21}x_{1,k} + \phi_{22}x_{2,k} + \phi_{25}c_{1,k} + \phi_{26}c_{2,k} + \phi_{27}c_{3,k} + \phi_{29}r_k + \gamma_{22}d_{2,k} \\ x_{3,k+1} = \phi_{33}x_{3,k} + \phi_{34}x_{4,k} + \phi_{38}\alpha_{2,k} + \gamma_{34}d_{4,k} \\ x_{4,k+1} = \phi_{43}x_{3,k} + \phi_{44}x_{4,k} + \phi_{48}\alpha_{2,k} + \gamma_{44}d_{4,k} \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} c_{1,k+1} = c_{1,k} \\ c_{2,k+1} = c_{2,k} \\ c_{3,k+1} = c_{3,k} \\ \alpha_{2,k+1} = \alpha_{2,k} \\ r_{k+1} = r_k \end{cases} \quad (38)$$

流量を予測する場合, 状態変量 x_1 と x_3 の予測値と流量予測値 Q_k との関係は次式で示される.

$$q_k = x_{1,k}^{\frac{1}{p_2}} + x_{3,k} \quad (39)$$

ここに、 q_k ：全流出高（mm/hr）、 $x_{1,k}$ と $x_{3,k}$ ：時刻 k における状態変量 x_1 と x_3 の値したがって、流量と流出高の関係から状態変量 $x_{1,k}$ と $x_{3,k}$ を用いたときの流量予測式は次式で与えられる。

$$Q_k = \frac{A}{3.6} q_k = \frac{A}{3.6} (x_{1,k}^{\frac{1}{p_2}} + x_{3,k}) \quad (40)$$

以上により、未知パラメーターが 3 個の二段タンク型貯留関数モデル（星モデル）を未知パラメーター 4 個の筆者のモデルに変えた場合のシステム方程式の理論展開が終えたことになる。カルマンフィルター理論を用いた洪水予測モデルは、この他に観測方程式や状態変量の推定誤差共分散更新方程式等々の展開が必要であるが、星が記した「実時間洪水予測システム理論」と同様であるのでここでは省略する。

残念なことにこの報告書に計算結果を掲載することができなかった。プログラミングが間に合わなかったためであるが、早急に完成させて星モデルとの精度比較を行う予定である。

参考文献

- 1) 星清：実時間洪水予測システム理論解説書，北海道河川防災研究センター・研究所，2004.
- 2) 星清：実践流出解析ゼミ講義テキスト編，北海道河川防災研究センター・研究所，2006.
- 3) 嵯峨浩：流出解析モデルと計算手法，水工学に関する夏季研修会講義集 A コース，pp.1-20.
- 4) 田中，藤田，清水：損失機構を含む貯留関数法に関する研究，北海道支部論文報告集，第 53 号(B)，pp.54-59，1997.
- 5) 佐藤，嵯峨，馬場，星：損失機構を含む貯留関数法応用したタンクモデルの提案，第 54 回年講講演概要集，第 2 部，pp.634-635，1999.
- 6) 嵯峨，高坂，星，橋本：二段タンク型貯留関数モデルの未知定数推定に関する研究，北海道支部論文報告集，第 58 号(B)，pp.344-347，2002.