

# 自由水面を持たない水路における底面の安定性

## Instability of the Bottom of Channels without Free Water Surfaces

泉 典洋<sup>1</sup>・関 陽平<sup>2</sup>  
Norihito IZUMI and Yohei SEKI

<sup>1</sup> 北海道大学大学院 工学研究科 教授

<sup>2</sup> 北海道大学大学院 工学研究科 修士課程 2 年

### 要 旨

移動床を有する開水路の場合、フルード数が 1 前後の領域を除いて平坦床は不安定となり、フルード数が小さい範囲ではデューン、大きい範囲ではアンチデューンと呼ばれる小規模河床波が発生することが知られている。

河床の不安定性は底面形状と流砂量（あるいは底面剪断力）の間に生じる位相差に起因するが、底面形状と水面形状の間にも位相差が生じ、デューンのときは **phase lag**、アンチデューンのときは **phase lead** と正反対の位相差が生じていることが知られている。このことから底面形状の不安定現象は自由水面の存在と密接な関係を持つことが推測されるが、自由水面を持たず移動床底面を有する管路の場合の底面形状の安定性についてはほとんど判っていないのが現状である。

このような移動床底面を有する管路流は、結氷河川や排砂用のバイパストンネルでも現れるが、その流水抵抗を正確に見積もるためには、底面形状の安定性を明らかにすることが重要となる。

本研究では十分な量の土砂を輸送する管路流における底面（砂と水の界面）の安定性を調べるために、混合距離乱流モデルを用いた線形安定解析を行った。

解析によれば、底面の安定性を支配する主たるパラメータはオイラー数およびシールズ数であり、オイラー数が小さい領域において底面は不安定となり、デューンに相当すると予想される河床波が発生することが明らかとなった。また臨界オイラー数はシールズ数の増加とともに大きくなる。

《キーワード：線形安定解析；河床波；自由水面；管路》

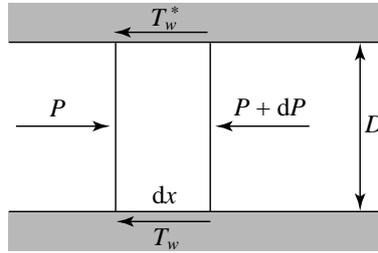


図-1 単位幅当りに働く力の釣合い.

## 1. はじめに

河川の流れは、自由水面を有する開水路流れの代表的な例であるが、冬季における北海道の河川は、結氷によって水面が氷で覆われるため、自由水面を持たない管路として流れることになる。ただし、結氷河川が通常の管路と異なるのは、底面が移動床で構成されていることである。したがって底面の形態によっては流水抵抗が大きく変化することになり、流し得る流量の正確な予測が困難なものとなることが予想される。

また、近年ダムの堆砂を軽減させる方法として、出水時にダム湖上流からの砂をバイパストンネルによりダム下流に排砂する試みが行われているが、この場合も流れは管路流となり、輸送する土砂量が十分に多い状況下では底面は移動床状態となるため、流水抵抗は底面に現れる砂面形態に大きく依存することになる。

底面が砂などの移動床で構成されている開水路では、ある条件下において平坦床は不安定となり、河床にはデューンやアンチデューンなどの河床波が形成されることが知られている。これらの河床波は、河床形状と底面剪断力あるいは流砂量の間には生じる位相差が原因となって発生することが知られているが<sup>1)</sup>、この際、河床形状と水面形状の間にも位相差が生じる。このことから、デューンやアンチデューンの発生には自由表面の存在が重要であることが推測されるが、自由表面の存在がどの程度重要であるかについては、著者の知る限り判っていない。

そこで本研究では、自由水面の存在しない管路内における砂と水の界面の安定性について、理論的に明らかにすることを目的とする。開水路における河床波の安定解析に倣って線形安定解析を行うことによって、安定性を支配するパラメータを明らかにすると同時に、砂-水界面が不安定となる条件を明らかにする。

## 2. 壁面からの影響

管路に形成されるデューンについて考える。高さ  $D$  の広幅矩形断面の管路の中の流れを想定する。高さに比べて幅が十分大きいとすると、管路中央付近では流下方向と高さ方向のみの、ほぼ二次元的な流れとなる。下方および上方の壁面における剪断力をそれぞれ  $T_w$  および  $T_w^*$  とする (図-1 参照)。そのとき単位幅当りに働く力の釣合いから次の式が得られる。

$$PD - (P + dP)D = (T_w + T_w^*) dx \quad (1)$$

上式を変形して次式が得られる。

$$-\frac{dP}{dx}D = T_w + T_w^* \quad (2)$$

上式は圧力勾配と壁面での剪断力が釣合っていることを意味している。

流体内部における剪断力  $T_{xy}$  の分布についても同様に求められる。いま、下方の壁面からの距離  $y$  のところに高さ  $dy$ 、流下方向の長さ  $dx$  の微小な流体を考える (図-2 参照)。この微小流体に働く力の釣合いは次のように表される。

$$Pdy - (P + dP)dy + T_{xy}dx - (T_{xy} + dT_{xy})dx = 0 \quad (3)$$

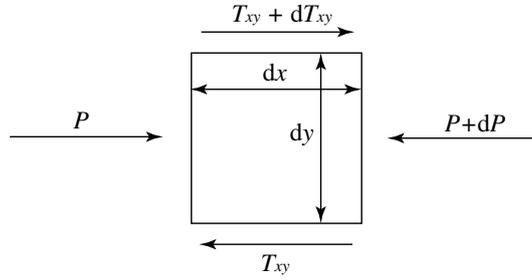


図-2 微小体積素に作用する力の釣り合い.

上式を変形して次式が得られる.

$$\frac{dT_{xy}}{dy} = -\left(-\frac{dP}{dx}\right) \quad (4)$$

圧力勾配  $-dP/dx$  は高さ方向に一定であるから、剪断力  $T_{xy}$  は高さ方向に直線分布していることがわかる. 壁面での剪断力を用いて上式を積分すると、下方の壁面の近傍では次のようになる.

$$T_{xy} = T_w - \left(-\frac{dP}{dx}\right)y \quad (5)$$

上方の壁面の近傍では次のようになる.

$$T_{xy} = T_w^* - \left(-\frac{dP}{dx}\right)y^* \quad (6)$$

ここで  $y^*$  は上方の壁面から下向きに取った座標であり、次のような関係がある.

$$y = D - y^* \quad (7)$$

剪断力がゼロとなる点を  $y = y_H$  あるいは  $y^* = y_H^*$  と表すと、式 (5) および (6) よりそれぞれ次のように求められる.

$$y_H = T_w \left(-\frac{dP}{dx}\right)^{-1} \quad (8)$$

$$y_H^* = T_w^* \left(-\frac{dP}{dx}\right)^{-1} \quad (9)$$

ここで式 (7) より  $y_H$  および  $y_H^*$  の間には次のような関係がある.

$$y_H^* = D - y_H \quad (10)$$

また式 (2) より

$$T_w^* = \left(-\frac{dP}{dx}\right)D - T_w \quad (11)$$

式 (10) および (11) を式 (9) に代入すると次式が得られる.

$$D - y_H = D - T_w \left(-\frac{dP}{dx}\right)^{-1} \quad (12)$$

上式は式 (8) と全く同一の式である. したがって当然のことながら  $y = y_H$  および  $y^* = y_H^*$  は同一の点であることがわかる. 剪断力  $T_{xy}$  の分布を図-3 に示す. 管路内の領域は下方の壁面の影響を受ける領域と上方の壁面の影響を受ける領域の二つの領域に分けられることが判る. 下方の壁面の影響を受ける領域を領域 I, 上方の壁面の影響を受ける領域を領域 II と表すこととする.

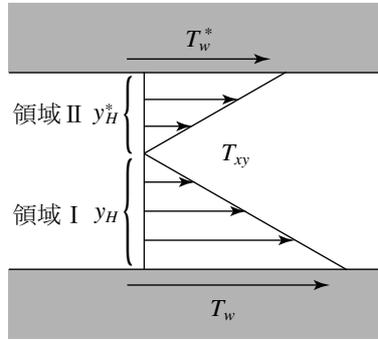


図-3 剪断力の分布.

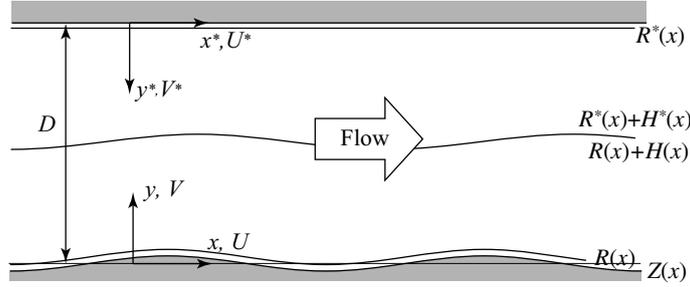


図-4 流れと座標系の概念図.

### 3. 領域 I

#### (1) 流れの方程式

まず領域 I における流れの方程式を導く. 領域 I の流れは, 剪断力ゼロの点を自由水面とする開水路流の方程式と類似の方程式系で表される (図-4, 5 参照). 流れの時間変化は砂面の時間変化に比べて圧倒的に速い. そこで準定常の仮定を用い, 流れの非定常性を無視する. そのとき, 水平に置かれた管路の中の流れは次の Reynolds 平均を取った Navier-Stokes 方程式で表される.

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{T}_{xx}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{T}_{xy}}{\partial \tilde{y}} \right) \quad (13)$$

$$\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{T}_{xy}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{T}_{yy}}{\partial \tilde{y}} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (15)$$

ここで  $\tilde{x}$  および  $\tilde{y}$  はそれぞれ流下方向および横断方向の座標,  $\tilde{U}$  および  $\tilde{V}$  はそれぞれ  $\tilde{x}$  および  $\tilde{y}$  方向の流速成分,  $\rho$  は水の密度 ( $= 1000 \text{ kg/m}^3$ ),  $\tilde{P}$  は圧力,  $\tilde{T}_{ij}$  ( $i, j = \tilde{x}, \tilde{y}$ ) はレイノルズ応力テンソルである. 本節以降,  $\tilde{\cdot}$  の付いた変数は次元量を表し, 後で出てくる  $\cdot$  の付いていない変数は無次元量を表すものとする.

レイノルズ応力テンソルは混合距離モデルを用いて次のように表す.

$$\tilde{T}_{xx} = 2\tilde{\nu}_T \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{T}_{yy} = 2\tilde{\nu}_T \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}}, \quad \tilde{T}_{xy} = \tilde{\nu}_T \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{x}} \right) \quad (16a-c)$$

$$\tilde{\nu}_T = \tilde{l}^2 \left| \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{y}} \right|, \quad \tilde{l} = \kappa (\tilde{y} - \tilde{Z}) \left( \frac{\tilde{H} + \tilde{R} - \tilde{y}}{\tilde{H}} \right)^{1/2} \quad (16d)$$

ここで  $\tilde{\nu}_T$  は渦動粘性係数,  $\tilde{l}$  および  $\tilde{Z}$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{H}$  はそれぞれ混合距離および底面高さ, 対数分布則で流速がゼロとなる高さ (以降, 基準面高さと呼ぶ), 基準面からの領域 I の高さであり,  $\kappa$  はカルマン定数 ( $= 0.4$ ) である.

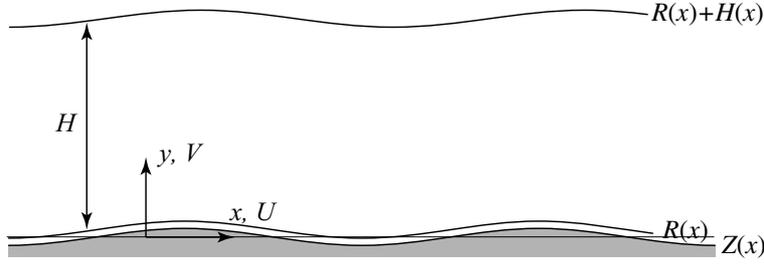


図-5 領域 I の座標系.

## (2) 無次元化

次のような無次元化を導入する.

$$(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{U}_f) = \tilde{U}_{f0} (U, V, U_f), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{l}, \tilde{Z}, \tilde{R}) = \tilde{H}_0 (x, y, l, Z, R), \quad (17a, b)$$

$$(\tilde{P}, \tilde{T}_{ij}) = \rho \tilde{U}_{f0}^2 (P, T_{ij}), \quad \tilde{v}_T = \tilde{U}_{f0} \tilde{H}_0 \nu_T \quad (17c, d)$$

ここで  $\tilde{U}_{f0}$  および  $\tilde{H}_0$  はそれぞれ平坦床基準状態における底面の壁面摩擦速度および基準面高さからの領域 I の高さである.  $\tilde{U}_{f0}$  は次のように表される.

$$\tilde{U}_{f0} = \sqrt{\frac{\tilde{H}_0}{\rho} \left( -\frac{d\tilde{P}_0}{d\tilde{x}} \right)} \quad (18)$$

ここで  $\tilde{P}_0$  は基準状態における圧力である.

上記の無次元化を用いれば, 式(13)–(16) は次のようになる.

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (19)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (21)$$

$$T_{xx} = 2\nu_T \frac{\partial U}{\partial x}, \quad T_{yy} = 2\nu_T \frac{\partial V}{\partial y}, \quad T_{xy} = \nu_T \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (22a-c)$$

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \quad l = \kappa (y - Z) \left( \frac{H + R - y}{H} \right)^{1/2} \quad (22d, e)$$

## (3) 流関数の導入

次のような流関数を導入する.

$$(U, V) = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (23)$$

流関数を用いれば式(19) および (20) は次のように書き直される.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\nu_T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu_T \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right] \quad (24)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \nu_T \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\nu_T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (25)$$

上式から  $P$  を消去すれば次式が得られる.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial y} - 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \nu_T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \nu_T \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right] = 0 \quad (26)$$

#### (4) 境界条件

下方の壁面は移動床となっており，そこでの境界条件は底面に対する流速の法線方向および接線方向成分がゼロとなることである．ここでは基準面における法線方向および接線方向流速がゼロとなるとすると次式が成立する．

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_{nr} = 0 \quad \text{at } y = R \quad (27)$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_{tr} = 0 \quad \text{at } y = R \quad (28)$$

ここで  $\mathbf{e}_{nr}$  および  $\mathbf{e}_{tr}$  はそれぞれ基準面に対する単位法線ベクトルおよび単位接線ベクトルであり，次式で表される．

$$\mathbf{e}_{nr} = \frac{(-R_{,x}, 1)}{(1 + R_{,x}^2)^{1/2}}, \quad \mathbf{e}_{tr} = \frac{(1, R_{,x})}{(1 + R_{,x}^2)^{1/2}} \quad (29a, b)$$

ここで  $()_{,x}$  は  $x$  に関する偏微分を表す．

また  $y = R + H$  において接線方向の剪断力がゼロとなる．したがって次式が成立する．

$$\mathbf{e}_{th} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{nh} = 0 \quad (30)$$

ここで  $\mathbf{T}$  および  $\mathbf{e}_{nh}$ ,  $\mathbf{e}_{th}$  はそれぞれ応力テンソルおよび剪断力がゼロの面 ( $y = R + H$ ) における法線，接線方向の単位ベクトルであり，次式で表される．

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -P + T_{xx} & T_{xy} \\ T_{xy} & -P + T_{yy} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{e}_{nh} = \frac{(-(R + H)_{,x}, 1)}{[1 + (R + H)_{,x}^2]^{1/2}}, \quad \mathbf{e}_{th} = \frac{(1, (R + H)_{,x})}{[1 + (R + H)_{,x}^2]^{1/2}} \quad (32a, b)$$

ただし式 (22e) より判るように， $y = R + H$  では必ず渦動粘性係数がゼロとなるから，式 (30) は常に成り立っている．したがって境界条件として与える必要はない．

式 (26) は四階の微分方程式であるから，境界条件は四つ必要である．ところがこれまでのところ底面で二つ，剪断力がゼロの面で一つの境界条件しか与えておらず，一つ条件が足りない．そこでここではもう一つの条件をとりあえず与えておく．剪断力がゼロの面に対する法線方向の流速成分を  $V_h$  とする．すなわち次式が成立する．

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_{nh} = V_h \quad \text{at } y = R + H \quad (33)$$

#### (5) 変数変換

次のような変数変換を導入する．

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y - R}{H} \quad (34)$$

すると混合距離  $l$  は次のように表される．

$$l = \kappa(H\eta + R - Z)(1 - \eta)^{1/2} \quad (35)$$

#### (6) 摂動展開

各変数に次のような摂動展開を導入する．

$$(\Psi, P, Z, R, H) = (\Psi_0, P_0, 0, R_0, 1) + A(\Psi_1, P_1, R_1, R_1, H_1) \exp i(\alpha\xi - \Omega t) \quad (36)$$

ここで底面高さ  $Z$  と基準面高さ  $R$  の摂動部分が同じ形をしているのは，底面から基準面までの距離が摂動による影響を受けずに一定であることを仮定していることに対応している．

(7) 基本解

平坦床基本状態では，支配方程式は次のようになる．

$$-\frac{dP_0}{d\xi} + \frac{dT_{xy0}}{d\eta} = 0 \quad (37)$$

$$T_{xy0} = \kappa^2 (\eta + R_0)^2 (1 - \eta) \left( \frac{dU_0}{d\eta} \right)^2 \quad (38)$$

式(17c)および(18)より， $-dP_0/dx = 1$ となる．また  $O(1)$  では， $d/\xi = d/dx$  であるので，式(37)の左辺第一項目は1となる．上式を次の境界条件の下で解く． $\eta = 0$  では次式が成り立つ．

$$T_{xy0} = 1, \quad U_0 = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0 \quad (39)$$

すると次の解が得られる．

$$U_0 = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{\eta + R_0}{R_0} \right) \quad (40)$$

(8) 摂動解

$O(A)$  では式(26)および(24)はそれぞれ次のようになる．

$$\mathcal{L}^\Psi \Psi_1(\eta) + \mathcal{L}^H H_1 + \mathcal{L}^R R_1 = 0 \quad (41)$$

$$i\alpha P_1 + \mathcal{P}^\Psi \Psi_1 + \mathcal{P}^H H_1 + \mathcal{P}^R R_1 = 0 \quad (42)$$

ここで  $\mathcal{L}^\phi$  および  $\mathcal{P}^\phi$  ( $\phi = \Psi, H, R$ ) は線形演算子を表している．境界条件より次式が得られる．

$$\Psi_1(0) = 0, \quad \mathcal{D}\Psi_1(0) = 0, \quad (43a, b)$$

ここで  $\mathcal{D} = d/d\eta$  である． $V_h = AV_{h1} \exp(i\alpha\xi - \Omega t)$  と展開すると， $V = -\Psi_{,\xi}$  であるから，境界条件(33)は次のようになる．

$$\Psi_1(1) = -V_{h1} \quad (43c)$$

Chebyshev 多項式展開によるスペクトル法を解く． $\Psi_1$  を次のように展開する．

$$\Psi_1 = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\zeta) \quad (44)$$

ここで

$$\zeta = \frac{2 \ln [(\eta + R_0)/R_0]}{\ln [(1 + R_0)/R_0]} - 1 \quad (45)$$

上式の変数変換を用いると底面 ( $\eta = 0$ ) は  $\zeta = -1$  に対応し，剪断力がゼロの面 ( $\eta = 1$ ) は  $\zeta = 1$  に対応している．これらを支配方程式に代入した後，次の Gauss-Labatte 点において式を評価する．

$$\zeta_j = \cos \left( \frac{j\pi}{N} \right) \quad (j = 0, \dots, N) \quad (46)$$

すると式(41)からは次式が得られる．

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{L}}^\Psi a_0 T_0(\zeta_0) + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_1 T_1(\zeta_0) + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_2 T_2(\zeta_0) + \dots + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_N T_N(\zeta_0) + \check{\mathcal{L}}^H H_1 + \check{\mathcal{L}}^R R_1 &= 0 \\ \check{\mathcal{L}}^\Psi a_0 T_0(\zeta_1) + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_1 T_1(\zeta_1) + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_2 T_2(\zeta_1) + \dots + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_N T_N(\zeta_1) + \check{\mathcal{L}}^H H_1 + \check{\mathcal{L}}^R R_1 &= 0 \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{L}}^\Psi a_0 T_0(\zeta_{N-1}) + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_1 T_1(\zeta_{N-1}) + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_2 T_2(\zeta_{N-1}) + \dots + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_N T_N(\zeta_{N-1}) + \check{\mathcal{L}}^H H_1 + \check{\mathcal{L}}^R R_1 &= 0 \\ \check{\mathcal{L}}^\Psi a_0 T_0(\zeta_N) + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_1 T_1(\zeta_N) + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_2 T_2(\zeta_N) + \dots + \check{\mathcal{L}}^\Psi a_N T_N(\zeta_N) + \check{\mathcal{L}}^H H_1 + \check{\mathcal{L}}^R R_1 &= 0 \end{aligned}$$

ここでは  $\eta$  から  $\zeta$  に変数変換した線形演算子を表している. 上式では  $\zeta_0$  が剪断力がゼロの面 ( $\eta = 1$ ) に対応し,  $\zeta_N$  が底面に対応していることに注意. 境界条件 (43) からは次の式が得られる.

$$a_0 T_0(-1) + a_1 T_1(-1) + a_2 T_2(-1) + \cdots + a_N T_N(-1) = 0 \quad (48a)$$

$$a_0 \check{D}T_0(-1) + a_1 \check{D}T_1(-1) + a_2 \check{D}T_2(-1) + \cdots + a_N \check{D}T_N(-1) = 0 \quad (48b)$$

$$a_0 T_0(1) + a_1 T_1(1) + a_2 T_2(1) + \cdots + a_N T_N(1) = -V_{h1} \quad (48c)$$

式 (47) の最初および最後の式はそれぞれ剪断力ゼロの面および底面に対応している. そこで最初の一つの式を剪断力ゼロの面における境界条件 (48c) と, 最後の二つの式を境界条件 (48a,b) と入れ替えて, 行列の形で表すと, 次の線形代数方程式系が得られる.

$$\mathbf{L}\mathbf{a} + \mathbf{h}H_1 + \mathbf{r}R_1 = -\mathbf{v}V_{h1} \quad (49)$$

ここで

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} T_0(-1) & \cdots & T_N(-1) \\ \check{D}T_0(-1) & \cdots & \check{D}T_N(-1) \\ T_0(1) & \cdots & T_N(1) \\ \check{L}^\Psi T_0(\zeta_1) & \cdots & \check{L}^\Psi T_N(\zeta_1) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \check{L}^\Psi T_0(\zeta_{N-2}) & \cdots & \check{L}^\Psi T_N(\zeta_{N-2}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \check{L}^H \\ \cdot \\ \cdot \\ \check{L}^H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \check{L}^R \\ \cdot \\ \cdot \\ \check{L}^R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50a, b, c, d, e)$$

上式を解いて次式が得られる.

$$\mathbf{a} = -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{h}H_1 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r}R_1 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{v}V_{h1} \quad (51)$$

ベクトルの  $i$  番目の成分を  $\langle \cdot \rangle_i$  で表すと, 上式より次式が導かれる.

$$a_n = -\langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{h} \rangle_{n+1} H_1 - \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r} \rangle_{n+1} R_1 - \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{v} \rangle_{n+1} V_{h1} \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (52)$$

したがって次式が成立する.

$$\Psi_1(\eta) = -\mathcal{M}^H H_1 - \mathcal{M}^R R_1 - \mathcal{M}^V V_{h1} \quad (53a)$$

ここで

$$\mathcal{M}^H = \sum_{n=0}^N \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{h} \rangle_{n+1} T_n(\zeta), \quad \mathcal{M}^R = \sum_{n=0}^N \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{r} \rangle_{n+1} T_n(\zeta), \quad \mathcal{M}^V = \sum_{n=0}^N \langle \mathbf{L}^{-1}\mathbf{v} \rangle_{n+1} T_n(\zeta) \quad (53b, c, d)$$

式 (52) および (53) を式 (42) に代入すると圧力  $P$  は次のように表される.

$$P_1(\eta) = -\mathcal{N}^H H_1 - \mathcal{N}^R R_1 - \mathcal{N}^V V_{h1} \quad (54a)$$

ここで

$$\mathcal{N}^H = i\alpha^{-1} [\mathcal{P}^\Psi \mathcal{M}^H - \mathcal{P}^H], \quad \mathcal{N}^R = i\alpha^{-1} [\mathcal{P}^\Psi \mathcal{M}^R - \mathcal{P}^R], \quad \mathcal{N}^V = i\alpha^{-1} \mathcal{P}^\Psi \mathcal{M}^V \quad (54b, c, d)$$

#### 4. 領域 II

領域 II の流れも領域 I とほぼ同様の方程式系で表すことができる (図-6 参照). 無次元化の際に, 基本状態における基準面からの領域 I の高さ  $\tilde{H}_0$  に代えて領域 II の高さ  $\tilde{H}_0^*$  を用い, 底面での摩擦速度  $\tilde{U}_{f0}$  に代えて上面での摩擦速度  $\tilde{U}_{f0}^*$  を用いて無次元化すると, 領域 I での流れの方程式と同一の方程式が得られる.

平坦床基準状態における流速分布は次のように求められる.

$$U_0^* = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ \frac{\eta^* + R_0^*}{R_0^*} \right] \quad (55)$$

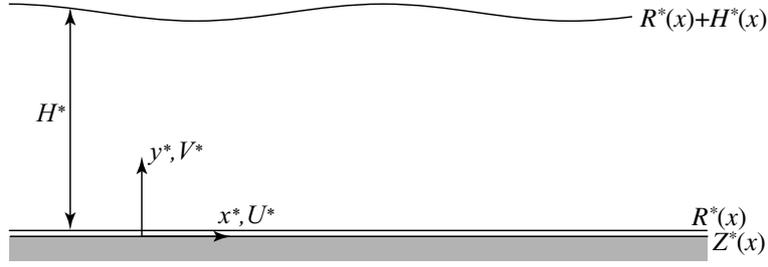


図-6 領域 II の座標系.

また  $O(A)$  では次のような方程式が得られる.

$$\mathcal{L}^{\Psi^*}\Psi_1^* + \mathcal{L}^{H^*}H_1^* + \mathcal{L}^{R^*}R_1^* = 0 \quad (56)$$

$$i\alpha P_1^* + \mathcal{P}^{\Psi^*}\Psi_1^* + \mathcal{P}^{H^*}H_1^* + \mathcal{P}^{R^*}R_1^* = 0 \quad (57)$$

ただし上面は固定床であるから,  $R_1^* = 0$  となることに注意する. すると上式は次のようになる.

$$\mathcal{L}^{\Psi^*}\Psi_1^* + \mathcal{L}^{H^*}H_1^* = 0 \quad (58)$$

$$i\alpha P_1^* + \mathcal{P}^{\Psi^*}\Psi_1^* + \mathcal{P}^{H^*}H_1^* = 0 \quad (59)$$

境界条件は次のように表される.

$$\Psi_1^*(0) = 0, \quad \mathcal{D}^*\Psi_1^*(0) = 0, \quad \Psi_1^*(1) = -V_{h1}^* \quad (60a, b, c)$$

領域 I と同様の Chebyshev 多項式展開によるスペクトル法を適用する. すると次の線形代数方程式系が得られる.

$$\mathbf{L}^* \mathbf{a}^* + \mathbf{h}^* H_1^* = -\mathbf{v}^* V_{h1}^* \quad (61)$$

ここで

$$\mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ \vdots \\ a_N^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} T_0(-1) & \cdots & T_N(-1) \\ \check{D}^*T_0(-1) & \cdots & \check{D}^*T_N(-1) \\ T_0(1) & \cdots & T_N(1) \\ \check{L}^{\Psi^*}T_0(\zeta_1) & \cdots & \check{L}^{\Psi^*}T_N(\zeta_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \check{L}^{\Psi^*}T_0(\zeta_{N-1}) & \cdots & \check{L}^{\Psi^*}T_N(\zeta_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \check{L}^{H^*} \\ \vdots \\ \check{L}^{H^*} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62a, b, c)$$

上式を解いて次式が得られる.

$$\mathbf{a}^* = -\mathbf{L}^{*-1}\mathbf{h}^*H_1^* - \mathbf{L}^{*-1}\mathbf{v}^*V_{h1}^* \quad (63)$$

ベクトルの  $i$  番目の成分を  $\langle \cdot \rangle_i$  で表すと, 上式より次式が導かれる.

$$a_n^* = -\langle \mathbf{L}^{*-1}\mathbf{h}^* \rangle_{n+1} H_1^* - \langle \mathbf{L}^{*-1}\mathbf{v}^* \rangle_{n+1} V_{h1}^* \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (64)$$

したがって次式が成立する.

$$\Psi_1^*(\eta) = -\mathcal{M}^{H^*}H_1^* - \mathcal{M}^{V^*}V_{h1}^* \quad (65a)$$

ここで

$$\mathcal{M}^{H^*} = \sum_{n=0}^N \langle \mathbf{L}^{*-1}\mathbf{h}^* \rangle_{n+1} T_n(\zeta), \quad \mathcal{M}^{V^*} = \sum_{n=0}^N \langle \mathbf{L}^{*-1}\mathbf{v}^* \rangle_{n+1} T_n(\zeta) \quad (65b, c)$$

式 (64) および (65) を式 (42) に代入すると圧力  $P^*$  は次のように表される.

$$P_1^*(\eta) = -\mathcal{N}^{H^*}H_1^* - \mathcal{N}^{V^*}V_{h1}^* \quad (66a)$$

ここで

$$\mathcal{N}^{H^*} = i\alpha^{-1} [\mathcal{P}^{\Psi^*}\mathcal{M}^{H^*} - \mathcal{P}^{H^*}], \quad \mathcal{N}^{V^*} = i\alpha^{-1}\mathcal{P}^{\Psi^*}\mathcal{M}^{V^*} \quad (66b, c)$$

## 5. 領域 I と領域 II の接続

剪断力がゼロの面 ( $\eta = 1$  および  $\eta^* = 1$ ) では次の接続条件が満足されなければならない。

1. 流速が連続である.
2. 応力が連続である.

1 の条件の内, 法線方向流速の連続条件は次のように表される.

$$V_{h1} = -\beta V_{h1}^* \quad (67)$$

ここで

$$\beta = \frac{\tilde{U}_{f0}^*}{\tilde{U}_{f0}} \quad (68)$$

さらに式 (8) および (9) より次のような関係があることがわかる.

$$\beta^2 = \left( \frac{\tilde{U}_{f0}^*}{\tilde{U}_{f0}} \right)^2 = \frac{\tilde{H}_0^* + \tilde{R}_0^*}{\tilde{H}_0 + \tilde{R}_0} \approx \frac{\tilde{H}_0^*}{\tilde{H}_0} \quad (69)$$

$y$  と  $y^*$  座標系では方向が逆であるため, 符号が異なることに注意. 接線方向流速の連続条件は次のように表される.

$$U_1(1) = \beta U_1^*(1) \quad (70)$$

$U_1 = \mathcal{D}\Psi_1$  であるから式 (53) および (65) を用いて式 (70) は次のように表すことができる

$$\check{D}M^H H_1 + \check{D}M^R R_1 + \check{D}M^V V_{h1} = \beta \left( \check{D}^* M^{H^*} H_1^* + \check{D}^* M^{V^*} V_{h1}^* \right) \quad (71)$$

2 の内, 接線方向の剪断力はゼロであり, 既に連続条件を満足している. したがって法線方向の応力が連続していればよい. 剪断力がゼロの面では渦動粘性係数がゼロとなるから, レイノルズ応力はゼロである. したがって圧力が連続であればよい. すなわち次式が成立する.

$$P_1 = \beta^2 P_1^* \quad (72)$$

式 (54) および (66) より次式が得られる.

$$N^H H_1 + N^R R_1 + N^V V_{h1} = \beta^2 \left( N^{H^*} H_1^* + N^{V^*} V_{h1}^* \right) \quad (73)$$

$\tilde{H}^*$  と  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{H}^*$  の間には次のような幾何学的関係がある.

$$\tilde{R} + \tilde{H} + \tilde{H}^* + \tilde{R}^* = \tilde{D} \quad (74)$$

上式を無次元化し, 領域 I における摂動展開 (36) とそれに対応する領域 II における摂動展開を代入して整理すると次式が得られる.

$$R_1 + H_1 + \beta^2 H_1^* = 0 \quad (75)$$

したがって上式および (67) を用いて  $H_1^*$  および  $V_{h1}^*$  を消去すると, 式 (71) および (73) はそれぞれ次のように書き換えられる.

$$\left( \check{D}M^H + \beta^{-1} \check{D}M^{H^*} \right) H_1 + \left( \check{D}M^R + \beta^{-1} \check{D}M^{H^*} \right) R_1 + \left( \check{D}M^V + \check{D}M^{V^*} \right) V_{h1} = 0 \quad (76)$$

$$\left( N^H + N^{H^*} \right) H_1 + \left( N^R + N^{H^*} \right) R_1 + \left( N^V + \beta N^{V^*} \right) V_{h1} = 0 \quad (77)$$

上式より  $H_1$  および  $V_{h1}$  を  $R_1$  で表すと, 次のようになる.

$$H_1 = \mathcal{H}R_1, \quad V_{h1} = \mathcal{V}R_1 \quad (78a, b)$$

ここで

$$\mathcal{H} = - \left( \frac{\check{D}M^H + \beta^{-1} \check{D}M^{H^*}}{\check{D}M^V + \check{D}M^{V^*}} - \frac{N^H + N^{H^*}}{N^V + \beta N^{V^*}} \right)^{-1} \left( \frac{\check{D}M^R + \beta^{-1} \check{D}M^{H^*}}{\check{D}M^V + \check{D}M^{V^*}} - \frac{N^R + N^{H^*}}{N^V + \beta N^{V^*}} \right) \quad (78c)$$

$$\mathcal{V} = - \left( \frac{\check{D}M^V + \check{D}M^{V^*}}{\check{D}M^H + \beta^{-1} \check{D}M^{H^*}} - \frac{N^V + \beta N^{V^*}}{N^H + N^{H^*}} \right)^{-1} \left( \frac{\check{D}M^R + \beta^{-1} \check{D}M^{H^*}}{\check{D}M^H + \beta^{-1} \check{D}M^{H^*}} - \frac{N^R + N^{H^*}}{N^H + N^{H^*}} \right) \quad (78d)$$

$$\Psi_1(\eta) = - \left( M^H \mathcal{H} + M^V \mathcal{V} + M^R \right) R_1 \quad (79)$$

したがってすべての摂動量は  $R_1$  を因数に持つことが示された.

## 6. 掃流砂量と河床変化の時間変化

掃流砂量式としては河床の局所勾配の影響を取り入れた次の Meyer-Peter & Müller 式を用いる.

$$\Phi = \frac{\tilde{Q}_B}{(R_s g \tilde{D}_s)^{1/2} \tilde{D}_s} = 8(\theta_b - \theta_c)^{3/2}, \quad \theta_c = \theta_{ch} - \mu(S - B_{,x}) \quad (80)$$

ここで  $\Phi$  は無次元掃流砂量,  $R_s$  は水中比重 (= 1.65),  $\tilde{Q}_B$  は掃流砂量,  $\tilde{D}_s$  は粒径,  $\theta_b$  は掃流層上面 ( $\eta = B$ ) における無次元掃流力,  $\theta_c$  は限界無次元掃流力,  $\theta_{ch}$  は平坦床の場合における限界無次元掃流力である. 掃流層上面における無次元掃流力は次式で表される.

$$\theta_b = \frac{\tilde{T}_b}{\rho R_s g \tilde{D}_s} \quad (81)$$

ここで  $\tilde{T}_b$  は掃流層上面での剪断力であり, 次式で表される.

$$\frac{\tilde{T}_b}{\rho U_{f0}^2} = T_b = [\mathbf{e}_{tb} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{tb}]_{\eta=\eta_b} \quad (82)$$

ここで  $\eta_b$  は掃流層上面の位置 ( $\eta$  の値) を表している.

Colombini<sup>2)</sup>によれば, 掃流層厚さ  $h_b$  は次のように表される.

$$h_b = l_b d_s, \quad l_b = 1 + 1.3 \left( \frac{\tau_r - \tau_c}{\tau_c} \right)^{0.55} \quad (83a, b)$$

ここで  $\tau_r$  および  $\tau_c$  はそれぞれ基準高さにおける剪断応力および限界剪断応力である. 掃流層の厚さは摂動によって変化しない, すなわち  $B - R$  は一定 ( $B_0 - R_0$ ) であるとする. そのとき掃流層上面の位置  $\eta_b$  は次のように表される.

$$\eta_b = B_0 - R_0 = h_b + \frac{d_s}{6} = \left( l_b + \frac{1}{6} \right) d_s \quad (84)$$

河床形状の時間変化は次の Exner 方程式で表される.

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{Q}_B}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (85)$$

ここで  $\lambda_p$  は空隙率である. 式 (85) に無次元化および座標変換を施すと次のようになる.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad (86)$$

ここで

$$\tilde{T} = \frac{(1 - \lambda_p) \tilde{H}_0^2}{(R_s g \tilde{D}_s)^{1/2} \tilde{D}_s} \quad (87)$$

である.

## 7. 掃流砂の摂動解と安定解析

前述したように摂動によって掃流層の厚さは変化しない. そのとき  $B$  は次のように展開できる.

$$B = B_0 + AR_1 \exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \quad (88)$$

したがって式 (80) 中に現れる  $B_{,x}$  は次のように展開される.

$$B_{,x} = B_{,\xi} = A i \alpha R_1 \exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \quad (89)$$

また  $\theta_b$  は流関数  $\Psi$  およびその微分,  $H$ ,  $R$  の微分の関数となっている. したがって  $\theta_b$  は次のように展開できる.

$$\begin{aligned} & \theta_b(\Psi(\eta_b), \Psi_{,\xi}(\eta_b), \dots, H_{,\xi}, \dots, R_{,\xi}, \dots) \\ &= \theta_b(\Psi_0(\eta_b), \Psi_{0,x}(\eta_b), \dots, 0, \dots, 0, \dots) \\ & \quad + A(\theta_{,\Psi} \Psi_1(\eta_b) + \theta_{,\Psi_{,\xi}} i\alpha \Psi_1(\eta_b) + \dots + \theta_{,H_{,\xi}} i\alpha H_1 + \dots + \theta_{,R_{,\xi}} i\alpha R_1 + \dots) \exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \\ &= \theta_{b0} + A\theta_{b1} \exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \end{aligned} \quad (90)$$

ここで

$$\theta_{,\Psi} = \left. \frac{\partial \theta_b}{\partial \Psi} \right|_{\Psi=\Psi_0(\eta_b)}, \quad \theta_{,\Psi_{,x}} = \left. \frac{\partial \theta_b}{\partial \Psi_{,x}} \right|_{\Psi_{,x}=0}, \quad \dots, \quad \theta_{,H_{,x}} = \left. \frac{\partial \theta_b}{\partial H_{,x}} \right|_{H_{,x}=0}, \quad \dots, \quad \theta_{,R_{,x}} = \left. \frac{\partial \theta_b}{\partial R_{,x}} \right|_{R_{,x}=0}, \quad \dots \quad (91)$$

$\Psi_1$  および  $H_1$  は式 (79) および (78a) のように表すことができる. したがって次式が成り立つ.

$$\theta_{b1} = \theta_{b1}^R R_1 \quad (92)$$

$\Phi$  は  $\theta_b$  および  $B_{,x}$  の関数であるから結局次のように展開できる.

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_b, B_{,x}) &= \Phi(\theta_{b0}, 0) + A(\Phi_{,\theta_b} \theta_{b1}^* + i\alpha \Phi_{,B_{,x}}) R_1 \exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \\ &= \Phi_0 + A\Phi_1^R R_1 \exp[i(\alpha\xi - \Omega t)] \end{aligned} \quad (93)$$

ここで

$$\Phi_{,\theta_b} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_b} \right|_{\theta_b=\theta_{b0}}, \quad \Phi_{,B_{,x}} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial B_{,x}} \right|_{B_{,x}=0} \quad (94)$$

式 (86) に式 (88) および (93) を代入すると次のような式が得られる.

$$\Omega = \alpha \Phi_1^R \quad (95)$$

ここで求められた  $\Omega$  の虚部が摂動の増幅率に相当する.

## 8. 結果と考察

摂動の増幅率  $\text{Im}[\Omega]$  を  $\alpha$ - $Eu$  平面上で表し, コンタ図にすると **図-7** のようになる. ここで  $\alpha$  は無次元波数で,  $Eu$  はオイラー数と呼ばれる管路流の状態を示す値であり, 圧力と慣性力の比を表している. 今回の解析では, 平坦床等流状態の断面平均流速と摩擦速度を用いて表すと次のようになる.

$$Eu = \frac{\bar{U}_0^*}{U_{f0}^*} = \frac{1}{C} \quad (96)$$

コンタ図に示したオイラー数の 14 および 22 は粗度高さと管径の比がそれぞれ  $1.60 \times 10^{-2}$  および  $6.60 \times 10^{-4}$  に相当する.

式 (95) で表される摂動の増幅率は  $\alpha$  および  $Eu$  以外に式 (68) の  $\beta$  と式 (81) の  $\theta_b$  を変数に持つため, 両変数を与える必要がある. シールズ剪断力の変化によるコンタ図の変化をみるため,  $\theta_b$  を 0.25 および 0.5, 1.0 と与え, 問題簡略化のため  $\beta$  を 1 と与える.  $\beta$  が 1 であるとき, 式 (69) より以下の関係が得られる.

$$\tilde{H}_0 = \tilde{H}_0^* = \frac{\tilde{D}}{2} \quad (97)$$

また, 領域 I と II で基準高さが等しくなり, 壁面の等価粗度高さが等しくなる. このため, 流れは管の中央を境にして対称となる.

**図-7** 中の細い実線および太い実線, 破線はそれぞれ摂動の増幅率  $\Omega$  が正および 0, 負のコンタである. 増幅率が正であれば摂動は発達し, 負であれば摂動は減衰する. **図-7** から,  $\theta_b$  が大きくなるほど

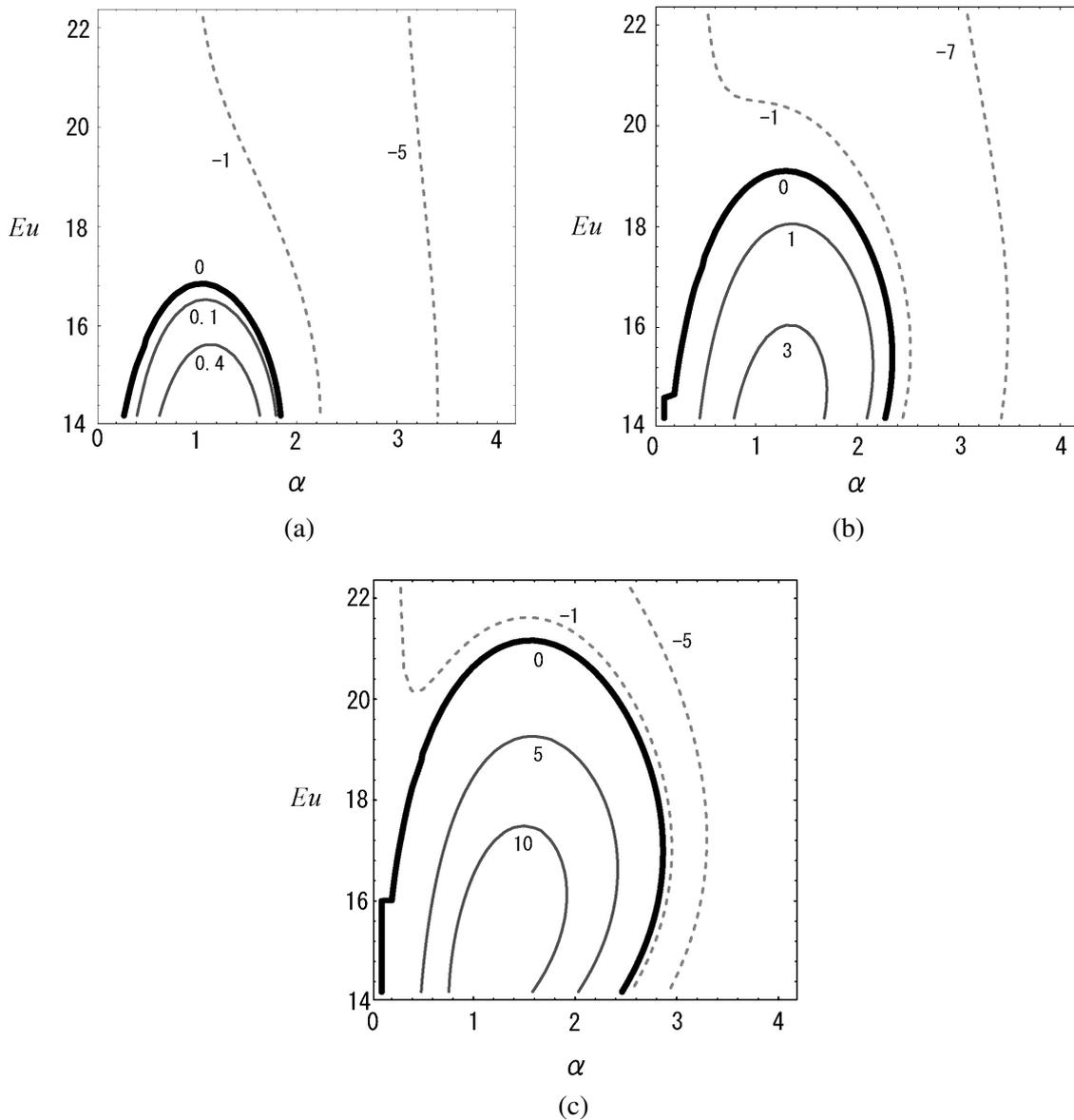


図-7 擾乱の増幅率  $\text{Im}[\Omega]$  のコンタ図. (a)  $\theta_b = 0.25$ , (b)  $\theta_b = 0.5$ , (c)  $\theta_b = 1.0$ .

増幅率の正の領域が広がり、卓越波数が大きくなる傾向が分かる。管路内に現れる界面波はシールズ剪断力が大きいほどその波長は小さくなり、解析結果の範囲では管径の2-3倍の波長を持つ。

以上のように、管路内の砂と水の界面は、オイラー数がある臨界値より小さいとき不安定となることが分かった。また、界面波の卓越波長は管径の2-3倍ほどであり、シールズ剪断力が大きくなるほど臨界オイラー数は大きくなり、卓越波長が小さくなる傾向がある。今後の課題は、実験結果との比較である。

## 9. 結論

自由表面の存在しない管水路流れにおける、砂と水の界面の安定性を調べるために、線形安定解析を行った。その結果、次の諸点が明らかとなった。

- 管路内の砂と水の界面の安定性を決定する主要なパラメータは Euler 数と Shields 数である。
- 波数-Euler 数平面上に instability diagram を描いた結果、Euler 数の小さい領域で砂と水の界面は不安定となり、界面波が発生する。
- 発生する界面波の卓越波長は、Euler 数と Shields 数によって変化するが、概ね管径の2-3倍である。

- Shields 数が大きくなるほど，臨界オイラー数は大きくなり，界面波の卓越波長は小さくなる．

#### 参考文献

- 1) Kennedy, J.F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, J. Fluid Mech. 16, Part4, 1963
- 2) Colombini, M. : Revisiting the linear theory of sand dune formation. J. Fluid Mech. 502 , pp.1-16, 2004