

「実時間洪水予測システム理論」 解説書

**The Rationale for Development of Real-Time
Flood Forecasting Systems**

平成16年5月

May, 2004

監 修 国土交通省・北海道開発局建設部河川管理課
River Management Division
Hokkaido Regional Development Bureau
Ministry of Land, Infrastructure and Transport

編集・発行 (財)北海道河川防災研究センター・研究所
Research Institute, Foundation of Hokkaido River
Disaster Prevention Research Center

注 意

本ＣＤ－ＲＯＭの内容を転載、複写する場合は、必ず(財)北海道河川防災研究センターの許可を得てください。本ＣＤ－ＲＯＭを使用した際に生じた、いかなる障害および損害に対しても、(財)北海道河川防災研究センターでは一切の責任を負いませんので、あらかじめご了承ください。

※Windows 及び Internet Explorer は米国 Microsoft Corporation の米国およびその他の国における登録商標です。

※Acrobat 及び Acrobat Reader は、Adobe Systems Incorporated の登録商標です。

※その他の会社名、製品名はそれぞれ各社の登録商標です。

推薦のことば

北海道では、昨年（2003 年）8 月、台風 10 号により、日高地方を中心にこれまでの記録を塗り替える豪雨があり、災害弱者、道路利用者等 11 名の尊い人命が失われ、甚大な洪水被害を被りました。この洪水では、とくに、以下に述べる 2 つの課題の重要性を痛感した次第です。すなわち、(1) 基本的な防災施設が整備されていれば、計画以上の洪水に対しても、被害を最小限に抑えることができること、(2) 地域住民や道路利用者に対し、防災情報を的確かつ迅速に伝達することが不可欠であることです。

沙流川二風谷ダムの計画最大流入量は $5,400 \text{ m}^3/\text{s}$ であるのに対して、計画値を $700 \text{ m}^3/\text{s}$ 以上も上回るピーク流入量が観測されました。二風谷ダムにおいて、適切な水門操作が行われ、かつまた、多量の流木が捕捉されたおかげで、ダム下流部での洪水被害を最小限に抑えることができたことは特筆に値します。

また、治水施設の適正な管理とともに、正確で迅速な気象情報及び洪水予警報が持つ「情報の価値」の重要性が改めて再認識されました。この半世紀、戦後の災害多発期を経て治水施設が整備され、治水安全度が確実に向上してきましたが、目標安全率達成にはなお遠い道程が残されています。非構造的(nonstructural)治水対策として知られるソフト対策（精度の高い洪水予警報システム）に対する期待はますます大きくなってきています。

本書を執筆された星 清氏は、学・官双方の立場から過去 20 年以上に亘り、一般化貯留関数法とカルマン・フィルター理論を組み合わせた実時間洪水予測システムの開発に取り組まれて来られました。その研究成果は、現在、北海道開発局・各開発建設部で洪水時に実運用されている「北海道開発局における洪水予測システム」に反映されています。

この「北海道開発局における洪水予測システム」は、洪水予報・水防警報等の情報を的確かつ迅速に伝達する上で大きな役割を果たして来ましたが、平成 7 年 3 月に発行されたものであり、最近の新しい流出モデルを取り入れた洪水予測システムを再構築する時期にあります。

本書は、新しく開発された貯留関数型流出モデルや予測水位の精度に及ぼす予測雨量の誤差影響を考慮するなどの要素を取り入れた洪水予測システム理論の解説書です。この中で、星氏は、時々刻々観測される水文諸量のテレメーター情報を活用して予測値を逐次更新していく実時間洪水予測の精度向上のためには、使用流出モデル、モデル定数の値、水位～流量曲線、予測降雨など多くの不確実性が含まれていることを指摘し、新しい洪水予測システムでは、これらの課題をどのように解決していくかを詳述しています。しかも実用的に利用できるよう計算例及び Fortran プログラムを掲載しています。

北海道開発局・各開発建設部において現在使われている洪水予測システムを再構築し、新しい洪水予測システム理論を最大限に活用して、予測精度向上に努めていきたいと考えています。

本書が、今後の洪水危機管理システム構築の検討に資するとともに、洪水予測精度の定量的評価をはじめ、水文学の調査研究のための資料として、研究者と河川技術者に広範に利用されることを期待し、推薦のことばといたします。

2004 年 3 月

国土交通省・北海道開発局
建設部長 吉田 義一

序

洪水災害から生命と財産を守るための治水対策は、その目的に応じて、計画予測(design forecast)と逐次予測(operational forecast)に大別される。

計画予測は基本高水及び計画高水流量の算定を、逐次予測は洪水予報・水防警報等の情報を的確かつ迅速に伝達することを目的としている。いずれにしても、的確な予測を行うには、高精度の洪水流出解析法と予測手法が要求される。

洪水逐次予測は、時々刻々観測される水文諸量のテレメータ情報を活用して、予測値を逐次更新していくことから実時間洪水流出予測(real-time prediction)とも呼ばれる。実時間洪水流出予測精度に及ぼす種々の要因とそれに起因する実際の課題を整理して次頁に示す。それぞれの要因に係わる問題点を以下に要約して述べる。

(1) 流出モデルの選択に関連するシステム誤差とモデル定数誤差

洪水流出の実時間予測においてもなんらかの流出モデルを選定しなければならない。どんなに精密なモデルを用いても実流出現象を完全に記述することができず、必ず誤差が生ずる。これが「モデル化誤差」あるいは「システム誤差」と呼ばれるものである。逐次予測という性質上、洪水防御操作、洪水予警報の伝達、避難・水防活動等の緊急性を考慮すると計算があまりかかりすぎる複雑なモデルは極力避けるべきであろう。

また、洪水流出解析においてしばしば遭遇する問題は、洪水毎にモデル定数が変化することである。これは「モデル定数の不確定性」ないし「モデル定数誤差」と呼ばれている。経験則に基づく概念モデルよりも、流出現象の物理性を重視した流出モデルを用いた方が、洪水逐次予測に係わる誤差を最小化できることは多言を要しない。また、モデル定数が流域特性値や降雨特性値の関数で表現することができれば、「モデル定数誤差」をより小さくすることも可能となる。

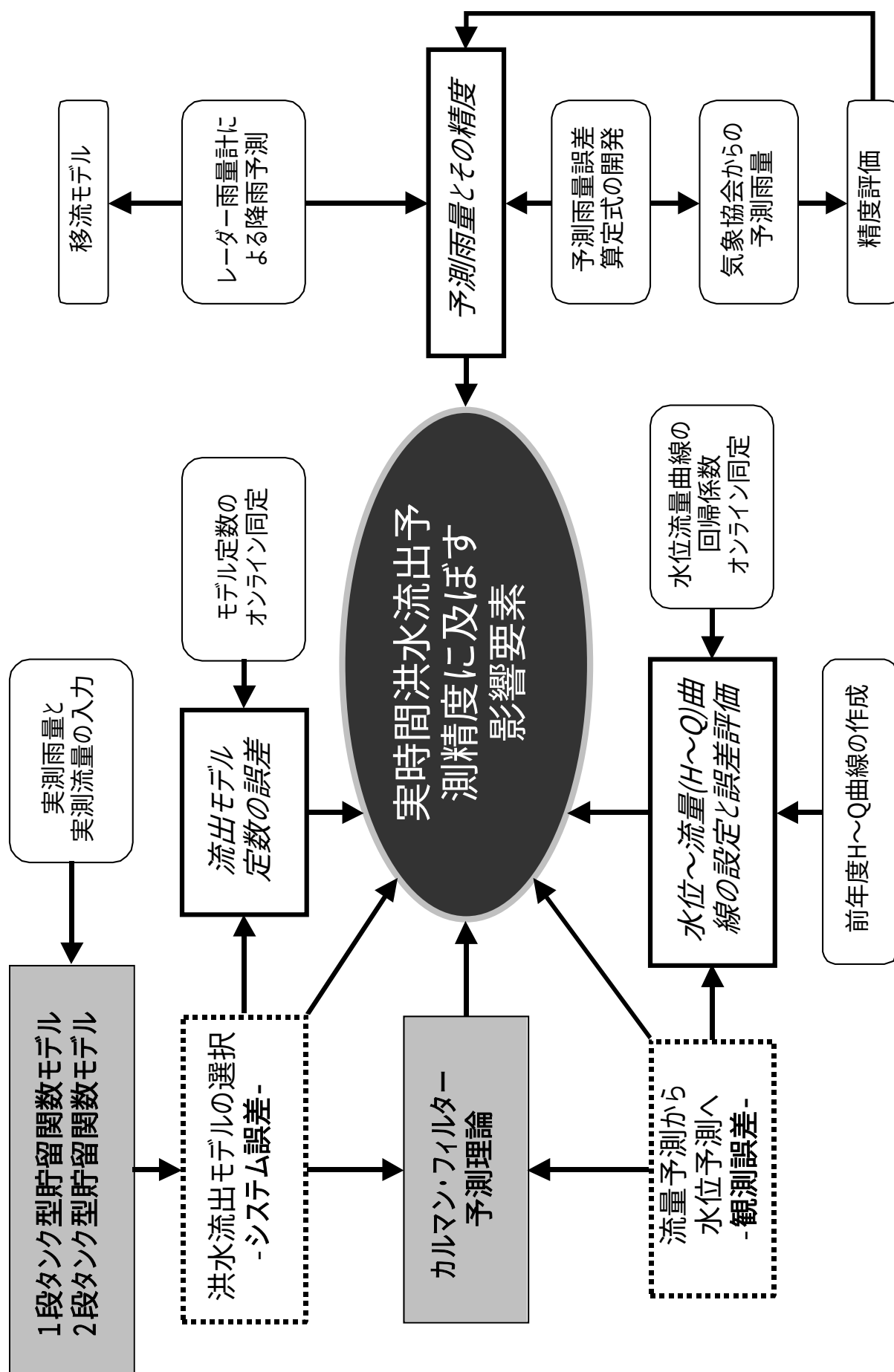
(2) 水位～流量曲線($H\sim Q$ 曲線)の変換に関連する観測誤差

洪水逐次予測において、次に問題となるのが、 $H\sim Q$ 曲線を用いて変換される流量や水位の「観測誤差」である。最近、ADCP等を用いた洪水時の流量観測が整備されつつあるとは言え、出水時の観測には多くの危険が伴う。もし仮に、 $H\sim Q$ 曲線が低水時の流量観測資料の外挿補間によって作成されている場合には、洪水ピーク近傍での予測流量や予測水位が相当大的な誤差を含んでいることは容易に推測できよう。

実時間洪水流出予測問題においては、流量よりは水位の予測情報がより重要となる。洪水期間中に水位～流量曲線を修正することは現実的に困難である。したがって、洪水前に前年度の水位～流量曲線が得られているので、その情報を有効に活用して、予測水位の誤差(精度)を定式化するモデル開発も不可欠である。

(3) 予測降雨と誤差のモデル化

洪水逐次予測における最大のネックは降雨予測とその予測精度である。レーダ雨量情報を用いた降雨予測も精度面から言えば、現段階では1時間先予測が限度であると言われている。今後の実時間洪水流出予測システム開発に関する大きな課題は、レーダ雨量計情報に基づく降雨予測を始めとして、数多くの水文情報をいかに効率よく洪水予測システムに結合させるかに強く依存している。



レーダ雨量計による情報と「移流モデル」を組み合わせた降雨予測解析が過去に数例報告された経緯もあるが、その後大きな発展は見られない。最近では、国土技術政策総合研究所と気象庁が共同して、より精度の高い短時間降雨予測手法の開発に着手したとの情報が得られているが、早急な研究成果を期待したい。

現在、北海道開発局の地方部局では、洪水時には気象協会から3時間毎に予測降雨の配信を受けている。しかしながら、これらの予測降雨の推定誤差がどの程度の大きさを持っているか不明である。予測降雨の精度が実時間洪水流出予測精度に大きな影響を及ぼすことは明確であり、予測降雨の推定誤差分散(精度)を定量的に評価できるモデルが必要である。

(4) カルマン・フィルタによる洪水予測システムの再構築

1960年にKalmanによって開発された最適制御理論として知られるカルマン・フィルタ理論は、1970年代初期から実時間洪水流出予測に威力を発揮する一手法として広く用いられてきた。カルマン・フィルタは上述した「システム誤差」や「観測誤差」を始めとして、種々の不確定性をモデル構築に反映することができ、予測精度を定量的に把握できる点が最大の特徴である。

1980年に石狩川開発建設部において、初めてカルマン・フィルタ理論を用いた洪水予測システムが実運用されて以来、いくつかの改良がなされてきた。現在、北海道開発局の全開発建設部において、この手法が洪水逐次予測の主流を占めている。現有洪水予測システムは平成7年に作成されたものであり、すでに10年近くの年月が経過していることになる。この間、観測雨量と観測水位(流量)を直接入力でき、しかも流出現象の物理性を重視した新しい貯留関数型流出モデルも開発されており、実運用上からもより効果的な洪水予測システムの再構築を図ることが不可欠となる。

カルマン・フィルタ理論を活用した実時間洪水流出予測手法に関する論文は、北海道開発局の「開発土木研究所・月報」(現在は独立行政法人・北海道開発土木研究所)や土木学会の講演会等ですでに数編発表されてきており、重複する所も多い。しかしながら、カルマン・フィルタ理論の基本概念を知りたい方や、その理論をどのように洪水予測に適用したらよいかなど、数学的内容をできるだけ平易に理解したい、あるいはより詳細な数学的背景を知りたい技術者のために、関係する論文・技術資料を補巻にまとめて示した。すなわち、本報告書は、洪水逐次予測モデリングに必要な数学的背景をすべて網羅していると考えられるので、今後の新しい洪水危機管理手法構築の一助となれば幸いである。

なお、本報告書の内容は、PDF形式で記録されたCD-ROM内にも収められている。また、CD-ROM内には本報告に掲載されているFortran ProgramをPDFファイルとは別個にテキストファイルで記録されているので、実際の洪水逐次予測計算にあたって活用していただければ望外の喜びです。

平成16年3月

(財)北海道河川防災研究センター
研究所長 星 清

〒060-0807 札幌市北区北7条西4丁目5-1 伊藤110ビル
Tel; 011-729-8141; Fax; 011-729-3380

E-mail: k.hoshi@bousai.or.jp
<http://www.bousai.or.jp>

目 次

推薦のことは	i
序	iii
1. はじめに	1
2. 貯留関数型洪水流出モデルの進歩	3
3. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）	7
3.1 線形近似解法	9
3.2 計算例と Fortran プログラム	13
4. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）への カルマン・フィルター理論の適用	21
4.1 システム方程式の定式化	25
4.2 状態変量の伝達方程式	26
4.3 状態変量の推定誤差共分散伝達方程式の定式化	31
4.4 乗算的ノイズによるシステム誤差の定式化	33
4.5 観測方程式の定式化	35
4.6 状態変量の更新方程式	36
4.7 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化	37
4.8 カルマン・ゲインの算定	37
4.9 状態変量の推定誤差共分散更新方程式	38
4.10 単一流域を対象とした洪水予測モデルの適用例	40
4.11 Fortran プログラム	50
5. 河道効果による降雨遅れのモデル化	67
5.1 ナッシュモデル	67
5.2 ナッシュモデルの数値解法	67
5.3 補正雨量（到達時間考慮雨量）の算出	70
5.4 ナッシュモデルの適用例	71
5.5 平成 13 年洪水における 河道効果を考慮した洪水予測モデルの適用例	83
5.6 昭和 56 年洪水における 河道効果を考慮した洪水予測モデルの適用例	93
5.7 Fortran プログラム	102

6. 予測雨量の誤差を考慮した洪水予測モデルの開発	109
6.1 予測雨量の誤差評価	109
6.2 システム方程式の定式化	111
6.3 状態変量の伝達方程式	112
6.4 状態変量の推定誤差共分散伝達方程式の定式化	118
6.5 乗算的ノイズによるシステム誤差の定式化	120
6.6 観測方程式の定式化	123
6.7 状態変量の更新方程式	124
6.8 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化	125
6.9 カルマン・ゲインの算定	125
6.10 状態変量の推定誤差共分散更新方程式	126
6.11 複合流域を対象に予測雨量の誤差を考慮した 洪水予測モデルの適用例	127
6.12 Fortran プログラム	143
7. 水位～流量曲線（$H\sim Q$ 関係式）を用いた洪水予測手法	161
7.1 水位～流量曲線の変動特性	161
7.2 システム方程式の定式化	164
7.3 状態変量の伝達方程式	165
7.4 状態変量の推定誤差共分散伝達方程式の定式化	170
7.5 観測方程式の定式化	173
7.6 状態変量の更新方程式	174
7.7 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化	175
7.8 カルマン・ゲインの算定	175
7.9 状態変量の推定誤差共分散更新方程式	177
7.10 水位～流量曲線を用いた洪水予測モデルの適用例	178
7.11 水位～流量曲線の変動特性 Fortran プログラム	193
7.12 水位～流量曲線を用いた Fortran プログラム	197
8. 地下水流出成分を含む貯留関数法（2 段タンク型貯留関数モデル） の最適化手法	215
8.1 流出成分フィルター分離 AR 法の特徴	215
8.2 2 段タンク型貯留関数モデルによる計算手法	215
8.3 地下水流出成分のモデル定数設定	216
8.4 流出成分の数値解法	218
8.5 全流出量に関する感度係数の算出	221
8.6 モデル定数の最適化	225
8.7 適用例	226
8.8 Fortran プログラム	232

9. 地下水流出成分を含む貯留関数法（2段タンク型貯留関数モデル）	
へのカルマン・フィルター理論の適用	243
9.1 システム方程式の定式化	243
9.2 状態変量の伝達方程式	245
9.3 状態変量の推定誤差共分散伝達方程式の定式化	252
9.4 乗算的ノイズによるシステム誤差の定式化	255
9.5 観測方程式の定式化	257
9.6 状態変量の更新方程式	258
9.7 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化	259
9.8 カルマン・ゲインの算定	259
9.9 状態変量の推定誤差共分散更新方程式	261
9.10 単一流域を対象とした洪水予測モデルの適用例	262
9.11 Fortran プログラム	272
10. まとめ	291
参考文献	295
 補巻	
1. カルマン・フィルターの基本概念	299
2. 洪水予測における貯留関数法の位置づけ	311
3. 洪水予測におけるカルマン・フィルターの位置づけ	329
4. 一般化貯留関数法による洪水予測法	365
5. 種々の不確定性を考慮した洪水流出予測法	385

1. はじめに

近年、水を取り巻く地球環境が大きく変化しつつある中、人々の水に関する社会的関心が高まってきている。我が国に限らず、世界中が毎年のように渇水や洪水災害に悩まされてきている。災害から生命・財産を守り、限られた資源である水の使い方を模索し、安全で安心して飲める水を確保することが、世界に共通する 21 世紀の重要課題である。

戦後 50 年余りに亘って、ハード施設の整備が治水対策の主流を占めてきた。しかしながら、ハードな構造物の建設は周囲の環境に何らかの影響を及ぼしているとの認識も社会に広まりつつある。その背景には、戦後の高度経済成長を支えてきた産業構造の大きな変革、成熟社会を迎えたライフスタイルの変化、国民の地球環境への関心の高まりなどの無視できない要因がある。21 世紀には循環型社会の構築が不可避とも言われている。このためには、従来型の発想を改め、ハード・ソフト対策を有機的に組み合わせ、地球環境の維持と人間社会の持続可能な発展を追求していかなければならない。これらの社会的要請に応える法律面からのバックアップが 1997 年 12 月に改正された「新河川法」とも言える。

国土交通省の資料によれば、政府・民間を合せた建設投資額は 1992 年度の 84 兆円を最高に年々減少し続け、2002 年度で 57 兆円まで落ち込んでいる。将来予測によれば、2020 年の投資水準は現在の 6 割程度に低下すると言われている。一方、我が国の社会資本ストックは高度成長期の 1960 年代から増え続け、今後は一般公共事業に占める維持補修・管理費が確実に増大してくる。今後とも続くと想定される厳しい財政状況の中、治水対策としてのハード施設整備に多大な投資を望めないことから、これまでに蓄積されてきたノウハウを最大限に活用したソフト的対策へと移行せざるを得ない状況にあると考える。

20 世紀末には、「IT 革命」という言葉が社会の底辺まで拡がりをみせ、パソコンの普及、通信技術の進歩及び機器の低コスト化が劇的に進行している。21 世紀に入って、IT 革命は一段と進展を見せており、ブロードバンド化の急速な浸透などで高速大容量のデータ通信が可能となり、一人一人が情報をリアルタイムに手に入れる手段が飛躍的に向上している。しかしながら、情報化時代と言われながら、果たして得られた情報を有効活用しているだろうかと疑問視される声も聞かれる。

2001 年 3 月に政府が策定した「e-Japan 重点計画」では、世界最高水準の高度情報通信ネットワークの形成を目標に掲げ、行政の情報化を強力に推進しようとしている。この重点計画に連動して、国土交通省河川局では、「水に関するあらゆる情報を収集整備し、国民がそれを共有し、活用することによって実現された、安全で多様な文化を持つ国土」を「水情報国土」と定義し、その構築に向けて IT 化を推進し、光ファイバーネットワークや監視カメラ（CCTV）などのハード整備及び河川 GIS（地理情報システム）などのソフト整備も進めてきている。河川情報の収集・処理・解析を通して、その価値を理解し、かつ総合的に発信する組織が不可欠となる。また、データベースや情報共有システム、情報をどのように共有するかの方策、新たな水文観測技術などは今後の河川情報施策上からも重要である。そのソフト整備の一環として、水に関する情報を一元的に集約してデータを提供する「水情報国土データ管理センター」が 2002 年 12 月 2 日に開設された。

過去 20 数年間に亘り、電子計算機や通信機器の性能は日進月歩である。計算機の演算速度は、20 年前と比べて 800～1,000 倍、情報伝達手段の通信速度は、15 年前と比べて 10,000 倍以上とも言われている。また、情報の記録保存手段もコンパクト化して、大容量保存が可能となってきている。このような IT 革命の流れに乗り遅れることなく、洪水予警報を含む河川水文情報の提供の在り方について

ても、新技術による抜本的なブレイクスルー（breakthrough）を図り、洪水情報提供の原点に立ち返り、比類のない最高レベルの洪水予測システムの構築を目指すことが肝要であると考え。

今後の洪水予測システムの構築にあたっては、高速大容量のデータ通信技術をフル活用して、河川流域における河川情報を多面的角度から捉え、インターネットを見る感覚で、ユーザーが画面表示された情報を正確に解釈して、洪水予警報の情報を迅速に伝達する体系化が不可欠となる。

本報告の構成を以下に要約して述べる。

- (a) 現在、一般化貯留関数法とカルマン・フィルター予測理論を組み合わせた洪水予測システムが北海道開発局において実運用されている¹⁾。過去 20 年以來、実用性を重視するという観点から、降雨流出過程の物理機構、すなわち、雨水流出の挙動に関する水理式を基礎にした kinematic wave (等価粗度)モデルを貯留関数モデルに変換する研究成果が多数発表されている^{2,3,4)}。そこで、現在洪水予測システムにおいて用いられている一般化貯留関数法の開発経緯を概説し、その特徴や今後の課題についても論述する。
- (b) 降雨流出過程においては、初期損失・蒸発散・地下浸透等の損失要素の影響も大きい。従来の貯留関数法による洪水流出解析では、直接流出量と流出率などによって算定された有効雨量を用いている。一般に流出率を洪水期間中、リアルタイムに求めることは非常に困難である。したがって、洪水逐次予測(operational forecast)という観点から、一般化貯留関数法に損失機構を組み合わせて、観測雨量と観測流量を直接利用できるモデルがあれば、より実用的であると考えられる。本報告では、観測雨量と観測流量を直接入力できる流出計算手法の採用を最優先に考えて、「損失項を含む貯留関数法（1 段タンク型貯留関数モデル）」^{5,6)}を用いた新しい洪水予測システムの再構築を図る。
- (c) 従来の貯留関数法は有効雨量を用いるために、洪水時の「表面・中間流出成分」の解析に主眼を置いた手法と言える。しかしながら、火山灰土壌のような浸透が高い河川流域においては、「地下水流出成分」も無視できない。このため、本報告においては、損失項を含む貯留関数法に地下水流出成分を追加した「2 段タンク型貯留関数モデル」を導入し^{7,8,9)}、モデル定数の最適化手法と新しいモデルを用いた洪水逐次予測法についても詳述する。なお、流出成分分離法には日野・長谷部によって提案された「フィルター分離 AR 法」¹⁰⁾を活用する。
- (d) カルマン・フィルター予測理論は、「状態変量」のすべてが観測されなくてもよいという特徴をもつ。たとえば、カルマン・フィルター理論の定式化にあたって必要な「観測値方程式」として、水位～流量曲線の変換から得られる流量（流出高）と水位の 2 つが考えられる。洪水予測という観点からは、水位予測がより実用的である。本報告では、上述した 2 つの「観測方程式」について検討を行っている。採用貯留関数モデルは 3 個の未知数を持っている。また、水位と流量の関係式には 2 個の回帰係数が含まれている。これら 5 個の定数は、洪水期間中観測不可能である。しかしながら、カルマン・フィルター理論を洪水予測に適用する場合、観測値と計算値の差に応じた重み係数（カルマン・ゲインと言う）を用いることにより、5 個の定数を更新、換言すれば、オンライン推定することが可能である。本報告ではモデル定数等の係数のオンライン同定に関しても検討を加えた。さらに、予測雨量の誤差分散¹¹⁾の流量ないし水位予測精度に及ぼす影響についても述べている。

2. 貯留関数型洪水流出モデルの進歩

貯留関数法は、流出現象の非線形性を比較的単純な形式で表現でき、計算も容易なことから、基本高水流量算定及び洪水予測手法として多用されてきた。しかし、従来の貯留関数法における定数は、等価粗度法 (kinematic wave 法) に比べて、物理的意義が不明確なため、流域の開発に伴う流出形態変化予測や洪水予測を精度よく行えなかった。本報告では、等価粗度法を貯留関数法に集中化する手法を提案し、定数を流域面積、等価粗度及び雨量強度の関数で表す。その結果、流出現象の非線形性と洪水波形の形状を的確に表現できるようになった。本提案モデルを北海道内の河川・ダム流域に適用して、洪水流出の精度向上を図ってきている。

一般に貯留量と流出量の関係は、流出の上昇期と下降期でループを描き二価関数となる。したがって、洪水流出計算の精度は、二価関数をいかに正確に表現するかに依存する。

表2.1に従来の貯留関数法を示す。木村は¹²⁾、遅滞時間 T_L を導入することによりループを解消できるとした。一方、プラサドは¹³⁾、ループの特性を勾配 dq/dt の正負で表せるとして、二価関数をそのまま表現した。両貯留関数法とも3個の定数を持つ。両モデルを北海道内の河川における基本高水流量算定及び洪水予測に用いた結果、以下の課題が残された。

- 一洪水に適合が良かった定数を他の洪水に適用すると、適合度が良くないという例がしばしば起こる。すなわち、流出に関わるどの因子が計算精度に影響するかを定量的に評価できない。
- 流量資料がない河川で使われる定数推定式は数多く提案されているが、物理的根拠に乏しい経験式のため、どの河川にも適用できるとは限らない。
- 中小規模の洪水から求めたモデル定数を、降雨特性を考慮しないで、計画規模の降雨波形にまで拡張して基本高水流量を算定することは危険側の計画となりかねない。
- 木村の方法を洪水予測に適用する場合、遅滞時間を洪水期間中一定とすると良い予測結果が得られない。また、遅滞時間 T_L を時間的に変化させると、降雨入力的时间順が逆転することもある。同様に、プラサドモデルの貯留係数 k_2 は流量の関数となるため、時間的に大きく変動し、定数として扱うことができない。最近、木村の貯留関数法において、遅滞時間 T_L の変動

表2.1 従来の貯留関数法

木村の貯留関数法

$$s = kq^p \quad \cdots (2.1) \quad \frac{ds}{dt} = r(t - T_L) - q \quad \cdots (2.2)$$

ここに、 s : 貯留高(mm)、 q : 直接流出高(mm/h)、 r : 有効雨量(mm/h)、 k, p, T_L : モデル定数(T_L : 遅滞時間)

プラサドの貯留関数法

$$s = k_1 q^p + k_2 \frac{dq}{dt} \quad \cdots (2.3) \quad \frac{ds}{dt} = r - q \quad \cdots (2.4)$$

ここに、 k_1, k_2, p : モデル定数

特性を考慮して洪水予測を行う手法も開発されている¹⁴⁾。

以下に、前述した貯留関数法の課題の対処内容と表2.2に示される結果に至るまでに留意した点について述べる¹⁵⁾。

- (a) 等価粗度法の理論解に基づき、貯留量と流出量の関係の二価性を正確に表現する形式を検討した結果、プラサドの貯留関数式(2.3)は不适当であり、指数 p_2 を導入した表2.2の式(2.5)が最適であることが判明した。
- (b) 等価粗度法の基本式を無次元化することにより、推定すべき定数の数を減らし、等価粗度法と貯留関数法の定数間の関係を定式化することを容易にした。
- (c) 矩形・三角形降雨波形に対する等価粗度法の解に式(2.5)と式(2.6)をあてはめ、4個の定数最適値をニュートン法により求めた。定数の数が多くなると、ニュートン法による解が発散する場合が多い。そこで、最適化の効率化を図り、繰り返し計算回数を少なくするための工夫を行った。
- (d) 流出計算を容易にするため、地形統計則(ハックの法則)を利用して斜面長を流域面積で表した。また、大中洪水においては、直接流出成分が卓越しているため、マニング型の表面流出を想定した。その結果、モデル定数は式(2.7)～(2.10)のように定式化することができた。とくに、指数 p_1 と p_2 は一定値に固定できた。
- (e) 貯留係数 k_1 と k_2 を流域面積、等価粗度及び平均雨量強度で表すことができた。このため、土地利用変化等により等価粗度が変化する場合の影響評価、また、計画降雨波形に対する基本高水流量を算定する場合の雨量強度の影響を貯留係数に考慮することができるようになった。
- (f) 提案モデルにおける唯一の未知定数は、貯留係数 k_1 に含まれる $f_c = (n/\sqrt{i})^{0.6}$ の値である。この f_c の値は、実測流量と計算流量の誤差2乗和が最小となるように、一次元ニュートン法により同定可能である。
- (g) 洪水逐次予測においては、ハイドログラフ全体の形状特性を的確に表現できる貯留関数式の決定が重要である。ハイドログラフ上昇部の流量予測においては、勾配、すなわち、 dq/dt が支配的要素となる。一方、ピーク近傍での流量予測においては、曲率、すなわち、 d^2q/dt^2 の効果が予測精度に大きく影響する。したがって、貯留関数モデルは、少なくとも dq/dt と d^2q/dt^2 項を含むのが適当である。式(2.5)と式(2.6)から得られるシステム方程式には勾配と曲率を含む項が反映されている。

表2.2 新しい貯留関数法とモデル定数関係式

$s = k_1 q^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad \cdots (2.5)$	$\frac{ds}{dt} = r - q \quad \cdots (2.6)$
$k_1 = 2.82(n/\sqrt{i})^{0.6} A^{0.24} \quad \cdots (2.7)$	$k_2 = 0.284 k_1^2 (\bar{r})^{-0.265} \quad \cdots (2.8)$
$p_1 = 0.6 \quad \cdots (2.9)$	$p_2 = 0.465 \quad \cdots (2.10)$

ここで、 s : 貯留高(mm)、 q : 直接流出高(mm/h)、 r : 有効雨量(mm/h)
 $\bar{r}$: 平均有効雨量強度(mm/h)、 A : 流域面積(km²)、 i : 斜面勾配、
 n : 等価粗度(s/m^{1/3})、 k_1, k_2, p_1, p_2 : モデル定数

提案モデルを既往洪水資料に適用して得られた結論及び今後の展望を以下に要約して示す。

- (a) 北海道内の 37 小流域における 99 個の大中洪水資料をもとに、最適値 $f_c = (n/\sqrt{i})^{0.6}$ を求めた結果、その平均値は 1.62 で、標準偏差は 0.70 であり、計算ハイドログラフの再現性も多数のケースにおいて良好であった¹⁶⁾。
- (b) 上記で得た f_c の値 1.62 を表 2.2 の式(2.7)に代入すれば、 $k_1 = 4.57A^{0.24}$ となり、すべての定数が推定できる。この総合貯留関数法により、流量資料が乏しい山地河川流域におけるハイドログラフ推定が可能である。
- (c) この総合貯留関数法とカルマン・フィルター理論を組み合わせることで従来の洪水予測モデルの改良を行い、予測精度向上を図った^{17,18)}。この洪水予測システムは、現在北海道開発局の全開発建設部において実運用されている¹⁾。
- (d) 洪水流出計算を合理的かつ簡易に行える新しい貯留関数法を開発し、モデル定数を流域面積、等価粗度及び雨量強度で表す実用的推定式を提案することができた。その結果、土地利用変化等による流出形態変化予測、降雨規模を考慮した基本高水流量算定と洪水予測計算が合理的かつ精度良く行えるようになった。
- (e) 等価粗度法を比較的大きい流域へ適用する場合、分割小流域数が増加すると、計算が煩雑となり、計算量が増大する。本報告で開発した貯留関数法を用いれば、分割小流域数が多くても流出計算が迅速に行えるようになった。すなわち、国土数値情報と分布型流出モデルを組み合わせた流出シミュレーションが容易となった。
- (f) レーダ雨量計による面的な降雨予測精度の向上を図り、レーダ雨量情報、国土数値情報及び新たに開発した貯留関数法を組み合わせ、ダム流域や河川基準点毎の流出予測計算を行い、きめ細かい洪水予報・水防警報等の情報を的確かつ迅速に提供できるシステム作成が必要である。
- (g) 河川整備基本方針における基本高水の検討にあたっては、ピーク流量を高い精度で算定する必要がある。一方、洪水逐次予測においては、ピーク水位とその生起時刻を高い精度で予測することが重要な課題となる。ピーク流量やピーク水位の推定精度は、ピーク近傍での実測流量観測の有無を含め、水位～流量 ($H \sim Q$) 曲線の精度に強く依存している^{19,20)}。したがって、低水流量から高水流量まで広範囲にわたる質の高い流量資料の収集とデータ処理が必要であることは論を待たない。
- (h) 一般には、基準観測地点での $H \sim Q$ 曲線は、適用期間と適用水位を定めて、使用曲線を分類している。この場合、分類曲線を決定するための観測資料数は、「高水流観」になる程少なくなる。このため、高水流量時での $H \sim Q$ 曲線の誤差は大きく、ピーク流量や水位の推定精度は相当低くなっていることを覚悟しなければならない。

洪水生起時には、時間的制約もあって、 $H \sim Q$ 曲線を見直すことはほとんど不可能であり、前年度に設定している $H \sim Q$ 曲線を使用せざるを得ない。しかしながら、北海道における洪水は、夏期以降に多く発生している。また、融雪出水は毎年確実に起こることであり、融雪時の「高水流観」による資料収集は貴重な情報源と位置づけられる。前年度に収集された流量観測資料と今年度の融雪時流量資料を再整理し、洪水期に向けて $H \sim Q$ 曲線の一本化作業を進めることを、とくに現場において推奨しておきたい。本報告の第 7 章では $H \sim Q$ 曲線を一本化したときの誤差評価についても述べている。また、 $H \sim Q$ 曲線を水位毎に分類して用いる場合の予測水位の推定誤差分散を簡易的に求める手法も第 4 章に詳述してある。

- (i) 高水時の流量観測には、従来から圧倒的に浮子観測が主流を占めてきた。この際、とくに浮子の更正係数が大きく変動する事が現実的課題としてとり上げられることが多い。一方、最近は ADCP（音響ドップラー流速プロファイラー）が「高水流観」に広く利用されてきている。流れの構造に関しても新しい知見が蓄積されつつある²¹⁾。ADCP の最大の特徴は、横断面毎に流れを基点から終点まで連続的に計測し、その総和で流量が算出される点にある。洪水時の流量算定に関して、浮子を用いた現行の水位～流量曲線（ $H\sim Q$ 曲線）と ADCP による方法でどのくらいの差異が生じているかが重要な問題となる。一般的に、ADCP 値は現行値より 10%程小さく、比較的流量が低い時点では 20%も小さくなっているという例が報告されている²¹⁾。今後は ADCP 等による新しい計測方法を用いた「高水流観」が普及し、流れの構造と共に高水流量の観測精度がよりの確に把握されることが期待される。

3. 損失項を含む貯留関数法（1 段タンク型貯留関数モデル）^{5,6,22)}

前章において、洪水逐次予測問題上必要と考えられる貯留関数形モデルの構造式について詳述した。その結果、損失項を取入れた貯留関数法として、**図3.1**に示す 1 段タンク型貯留関数モデルを洪水流出予測モデルとして採用した。

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r - q - b + q_0 \\ s = k_{11}q^{p_1} + k_{12}\frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ b = k_{13}q \\ q_0 = q_B \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad (3.1)$$

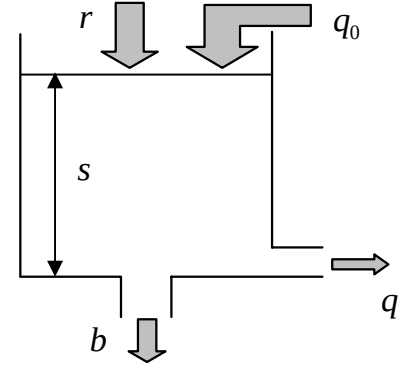


図3.1 貯留関数型流出モデル

ここで、 s ：貯留高(mm)、 r ：観測雨量(mm/h)、 q ：計算流出高(mm/h)、 b ：損失高(mm/h)、 q_0 ：基底流出高(mm/h)、 q_B ：初期流出高(mm/h)、 k_{11}, k_{12} ：貯留係数、 k_{13} ：損失係数、 p_1, p_2 ：貯留指数、 λ ：減衰係数

本報告で採用した式(3.1)の貯留関数法の特徴を以下に要約して述べる。

- 式(3.1)に含まれる貯留関数式は、前章で述べた kinematic wave 法を貯留関数法に集中化したモデルを基本としている。
- 降雨流出過程における不確定なすべての損失(蒸発散・浸透・初期損失など)を損失項 b でパラメタライズしている。
- 流域内の初期貯留量を考慮するため、基底流出高 q_0 を導入している。基底流出高 q_0 の導入は、洪水期間内の総流出高 $\sum q$ が総降雨量 $\sum r$ を上回ると、モデル定数の最適化過程において収束不可能となる場合が起こる。その防止策のため、基底流出高を強制入力として与えることによって水収支が保たれる。この時、 λ はハイドログラフ減水部の標準逓減曲線から得られる流域に固有な値であるが、北海道内の河川における佐藤ら²³⁾の解析結果を基に、本報告では、 $\lambda=0.019$ に固定した。なお、参考文献 6)には北海道内の一級河川 13 水系と指定河川・標津川における 650 既往洪水解析例が示されている。河川流域毎に表面・中間流出成分と地下水流出成分の分離時定数の平均値が求められており、その逆数を λ の値として用いる方法も考えられる。
- モデル定数 p_1 と p_2 に関しては、表面流が卓越する比較的大きな出水を解析対象とする場合、マニング則を想定すると、 $p_1=0.6$ 、 $p_2=0.4648$ に近似できることが知られている。したがって、本報告においても上記の値に固定した。
- モデル定数 k_{11} と k_{12} については、前章に示した式(2.7)と式(2.8)の関係式を考慮して、次の関数形を仮定した。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648} \end{cases} \quad (3.2)$$

ここで、 A ：流域面積(km²)、 $\bar{r}$ ：平均雨量強度(mm/h)、 c_{11}, c_{12} ：未知定数

表3.1 水系毎の1段タンク型貯留関数モデル定数統計量

水 系 名	洪水数	c_{11}		c_{12}		c_{13}		減衰係数 (λ)	
		平均 (μ)	標準偏差 (σ)	平均 (μ)	標準偏差 (σ)	平均 (μ)	標準偏差 (σ)	平均 (μ)	標準偏差 (σ)
天 塩 川	51	12.213	5.040	0.143	0.178	1.445	0.406	0.019	0.005
渚 滑 川	42	11.193	3.992	0.183	0.124	1.308	0.491	0.017	0.005
湧 別 川	32	10.157	2.219	0.181	0.072	1.438	0.289	0.014	0.003
常 呂 川	34	13.581	3.894	0.123	0.073	1.652	0.488	0.018	0.005
網 走 川	20	17.005	4.604	0.094	0.040	2.939	1.259	0.014	0.003
留 萌 川	39	11.293	2.816	0.193	0.087	1.477	0.479	0.017	0.010
石 狩 川	72	11.193	4.320	0.144	0.126	1.848	0.600	0.025	0.014
尻 別 川	69	12.624	4.172	0.106	0.058	1.854	0.484	0.017	0.004
後志利別川	65	9.232	2.382	0.148	0.081	1.469	0.396	0.020	0.006
鷗 川	34	10.591	2.580	0.146	0.065	1.491	0.680	0.023	0.005
沙 流 川	60	10.893	2.470	0.130	0.077	1.307	0.357	0.016	0.005
釧 路 川	42	21.878	7.517	0.078	0.047	3.370	1.287	0.018	0.006
十 勝 川	86	13.649	4.143	0.114	0.065	1.781	0.789	0.017	0.004
標 津 川	4	20.465	3.495	0.073	0.007	2.448	0.429	0.012	0.005
全 水 系	650	12.488	5.035	0.135	0.094	1.750	0.824	0.019	0.013

表3.2 全水系のモデル定数相関係数

	c_{11}	c_{12}	c_{13}
c_{11}	1.000	-0.443	0.486
c_{12}	-0.443	1.000	-0.227
c_{13}	0.486	-0.227	1.000

モデル定数 k_{11} は流域特性値に、 k_{12} は流域・降雨特性値の双方に依存して変化するので、各定数は大きく変動することが予想される。一方、係数 c_{11} と c_{12} は流域・降雨特性に依存しないことが望ましく、互いに無相関であれば、各係数の流出に及ぼす影響を独立に評価することができる。表3.1には、北海道内の一級河川 13 水系と指定河川・標津川における 650 ケースの洪水解析結果による 3 個のモデル定数 c_{11} 、 c_{12} 及び c_{13} ($=k_{13}+1$) の最適同定値の平均値 (μ) と標準偏差 (σ) が河川流域毎に示されている⁹⁾。また、式(3.1)に示される基底流出成分に含まれる減衰係数 λ (2 段タンク型貯留関数法で用いられる地下水流出成分の分離時定数の逆数に等しい) の値も表3.1に示されている。全水系 650 ケースの解析結果から得られた λ の平均値は 0.019 で佐藤ら²³⁾ による結果にほぼ等しくなっている。表3.2には全 650 ケースに関するモデル定数間の相関係数が示されている。河川流域毎の相関構造も表3.2と同様な特性を示している。表3.1と表3.2の結果からも係数の変動幅は小さく、その相関係数も高くないことから、係数はほぼ独立に分布していると仮定できる。

次章以降に、カルマン・フィルター理論の実時間洪水流出予測への適用を述べるが、カルマン・フィルター理論は流量や水位の予測に加えて、モデル定数のオンライン推定が可能である。そこで、本報告ではカルマン予測理論を用いた未知定数 c_{11} 、 c_{12} および c_{13} ($=k_{13}+1$) のオンライン同定問題も取り上げるこ

とにする。この時、表3.1と表3.2の情報を用いれば、カルマン・フィルタを実行する際の初期値設定とその誤差分散・共分散設定に利用できる。

3.1 線形近似解法

モデル定数 c_{11} 、 c_{12} 、 k_{13} 、 p_1 及び p_2 を既知として、式(3.1)の非線形貯留関数法を流出高、 q について解かなければならない。この時、実時間洪水流出予測という性格上、計算が速く行える解法を準備しておく必要がある。

今、式(3.1)を q について解くために、次の変数変換を行う。

$$\begin{cases} x_1 = q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (3.3)$$

上式を t について微分すると、

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (3.4)$$

式(3.4)にも示されるように、採用流出モデルはハイドログラフの上昇部の勾配及びピーク近傍での曲率の効果を反映していることがわかる。

式(3.3)を式(3.1)に代入すると、

$$s = k_{11}x_1^{p_1/p_2} + k_{12}x_2 \quad (3.5)$$

式(3.5)を t に関して微分し、式(3.1)の連続式を用いると次式が得られる。

$$\frac{ds}{dt} = k_{11} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \frac{dx_1}{dt} + k_{12} \frac{dx_2}{dt} = (r + q_0) - c_{13}x_1^{1/p_2} \quad (3.6)$$

ここで、

$$c_{13} = 1 + k_{13} \quad (3.7)$$

式(3.6)に式(3.4)の関係式を代入すると、 x_2 に関する次の微分方程式が求められる。

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}}(r + q_0) \quad (3.8)$$

式(3.4)と式(3.8)をまとめると、次の連立微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \end{cases} \quad (3.9)$$

式(3.9)を解くにあたり、式(3.10)の初期条件を設定する。

$$\begin{cases} x_1|_{t=0} = q_B^{p_2} & (q_B : \text{初期流出高}) \\ x_2|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

式(3.9)の非線形連立微分方程式は、ルンゲ・クッター・ギル法などの数値解法を利用して解くことができるが、本報告では計算が容易で、しかもカルマン・フィルター理論の適用に便利な線形化方程式に変換しておく。まず、以後の解析に容易のように式(3.9)をベクトル表示すると、

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (3.11)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

非線形関数 $F(X)$ をあらかじめ既知な $X = X^*$ において、テーラー級数展開を用いて線形化すると、次式が得られる。

$$F(X) = F(X^*) + A(X^*)(X - X^*) \quad (3.13)$$

ここで、 $A(X^*)$ は (2×2) 行列であり、次式で定義される。

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{X=X^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

式(3.14)の行列要素 a_1 と a_2 は次式で計算される。

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-2} x_2^* - \frac{c_{13}}{k_{12} p_2} (x_1^*)^{1/p_2-1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} \end{cases} \quad (3.15)$$

なお、 X^* の決定には次の手段を用いればよい。すなわち、任意の時刻、 $(k+1)$ 時点での X の値、 X_{k+1} を計算しようとすれば、 k 時刻での X_k の値はすでに既知であるから、実用上、 $X^* = X_k$ としてよからう。

式(3.11)の右辺 $F(X)$ に式(3.13)を代入すれば、次の線形微分方程式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (3.16)$$

ここで、

$$\begin{aligned} D(X^*) &= F(X^*) - A(X^*)X^* \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x_1^*, x_2^*) \\ f_2(x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= f_2(x_1^*, x_2^*) - a_1 x_1^* - a_2 x_2^* \\ &= \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \end{aligned} \quad (3.18)$$

式(3.16)は線形微分方程式であるが、計算機を用いた計算にはなじまない。そこで、計算が容易に行えるように、式(3.16)を次の差分方程式に変換する。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (3.19)$$

ここで、 X_k は任意の計算時間ステップ、 k における X の値である。また、各変数行列の要素は次式で定義される。

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k \quad D_k = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix}_k \quad (3.20)$$

3. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）

$$\begin{aligned}\Phi_k &= \exp(AT) = I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \frac{1}{24}(AT)^4 \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_k &= [\exp(AT) - I]A^{-1} \\ &= T \left[I + \frac{1}{2}(AT) + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 \right] \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.22)$$

式(3.21)と式(3.22)中の T は計算時間間隔であり、 I は (2×2) の単位行列である。また、 A は式(3.14)の行列である。

Φ_k と Γ_k の要素を計算するには、式(3.14)を用いて行列 A^2, A^3, A^4 の演算を行い、その結果を式(3.21)と式(3.22)に代入すればよい。整理した結果を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_1 = 1 + \frac{1}{2}a_1T^2 + \frac{1}{6}a_1a_2T^3 + \frac{1}{24}a_1a_3T^4 \\ \phi_2 = T(1 + \frac{1}{2}a_2T + \frac{1}{6}a_3T^2 + \frac{1}{24}a_2a_4T^3) \\ \phi_3 = a_1\phi_2 \\ \phi_4 = 1 + a_2T + \frac{1}{2}a_3T^2 + \frac{1}{6}a_2a_4T^3 + \frac{1}{24}(a_1a_3 + a_2^2a_4)T^4 \end{cases}\quad (3.23)$$

$$\begin{cases} \gamma_2 = T \left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_2T^2 + \frac{1}{24}a_3T^3 \right) \\ \gamma_4 = \phi_2 \end{cases}\quad (3.24)$$

ここで、

$$a_3 = a_1 + a_2^2, \quad a_4 = a_1 + a_3 \quad (3.25)$$

なお、行列 Γ_k の要素のうち、 γ_2 と γ_4 のみが実際の計算に必要となる。その理由は、式(3.20)に示されるベクトル D_k の要素のうち、最初の要素がゼロだからである。上に求めた行列の要素を式(3.19)に代入すると、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} (d_1)_k \quad (3.26)$$

式(3.26)の行列を展開すると、次に示すようにさらに計算が容易になる。

$$\begin{cases} (x_1)_{k+1} = \phi_1(x_1)_k + \phi_2(x_2)_k + \gamma_2(d_1)_k \\ (x_2)_{k+1} = \phi_3(x_1)_k + \phi_4(x_2)_k + \gamma_4(d_1)_k \end{cases} \quad (3.27)$$

式(3.27)の漸化式を用いれば、任意の離散時刻 $(k+1)$ における $x_1 (= q^{p_2})$ と $x_2 (= d(q^{p_2})/dt)$ の値を計算できる点で計算機演算に最適な計算手法と言えよう。最後に任意の離散時刻 k における所要の流出高も式(3.3)の逆変換で次式より算出される。

$$q = x_1^{1/p_2} \quad (3.28)$$

式(3.26)は任意の計算ステップ $(k+1)$ における変数 x_1 と x_2 の値を、前の計算ステップ k の値から順次計算できることを意味する。すなわち、 $(k+1)$ ステップでの計算流出高 q は、 k ステップにおける勾配と曲率の影響を取入れていることがわかる。この特性は、とくにハイドログラフのピーク近傍での流量予測に効果が現われると考えられる。

3.2 計算例と Fortran プログラム

以上、式(3.9)の連立非線形微分方程式を線形近似法で解く方法を述べた。このとき、この近似解法の計算精度を検討しておく必要がある。計算結果にもっとも影響を及ぼす要因は計算時間間隔 T である。当然のことながら、 T を小さくすれば、近似解法による解の精度は向上するが、計算時間は増大する。現実問題としても、計算時間があまりかかりすぎるのであれば、洪水予測モデルとしての機能を果たさないことになる。したがって、各開発建設部および直轄ダムに設置されている計算機能力に応じた計算時間間隔 T の決定が必要となる。洪水時における予測システムの運用状況をまず考えてみよう。

河川情報システムを媒介として得られる水文量データ(降雨量と水位)は、安全をみて1時間ごとに得られるものとする。現時点で得られる水文量観測値情報をもとに1時間先、2時間先、3時間先の流量予測が通常必要となろう。もちろん、予測時間(リードタイム)に応じた降雨予測のための演算時間も念頭に入れておく必要がある。降雨予測の計算時間はそのモデルの難易度に依存してくる。水文量観測データのサンプリング時間を1時間として、1時間の分割数を12個とすると、計算時間間隔は $T=1/12\text{hs}$ (すなわち、5分間)となる。この計算条件で3時間先の流出予測を終了するのに、計算ステップは毎回(すなわち、1時間ごとに)36回必要となる。したがって、この計算ステップ終了に要する演算時間は、各開発建設部が有する予測機器の能力に見合ったものでなければならない。

ここでは計算時間間隔 T を種々変化させたときの計算流量精度を仮定の降雨波形を用いて検討してみる。このためには、流量の“真値”が必要であるが、これには次の方法によった。すなわち、非線形連立微分方程式の数値解法には、計算が比較的速く、精度も高いルンゲ・クッター・ギル(Runge-Kutta-Gill)法がよく用いられている。したがって、計算時間間隔を $T=1/20\text{hs}$ (3分)として、ルンゲ・クッター・ギル法で求めた流量の数値解を“真値”とみなす。石狩川流域における納内地点(流域

3. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）

面積 $A=3558.0\text{km}^2$)における平成13年9月洪水を計算例として取り上げる。初期流出高 q_B を 0.12mm/h 、モデルパラメータを $c_{11}=6.386$ 、 $c_{12}=0.153$ 、 $c_{13}=1.743$ 、 $p_1=0.6$ 、 $p_2=0.4648$ に設定した。また、平均雨量強度は $\bar{r}=1.924\text{mm/h}$ を用いた。本報告で述べた非線形微分方程式の線形近似解法によるフローチャートを図3.2に示す。このとき、関連式番号で略記してある。ルンゲ・クッター・ギル法で用いた同じ計算条件で、計算時間間隔 T のみを変化させたときの線形近似解の精度を検討する。ルンゲ・クッター・ギル法と線形近似解法によって、ハイドログラフを計算して比較した一例が図3.3に示されている。当然のことながら、 T が小さくなるにしたがって、線形近似解はルンゲ・クッター・ギル法による解に近づく。図3.3に示される特定例においても、 $T=1/6\text{hs}$ (10分)による解の精度は極度に悪化していない。各開発建設部が有する計算機の計算速度にも依存するが、実用上、 $T=1/6\text{hs}$ (1時間を6分割)としてもさしつかえなさそうである。式(3.2)にも示されるように、パラメータ k_{11} と k_{12} は流域面積 A の関数である。したがって、対象流域の実績洪水資料を用いて、計算時間間隔 T を種々変化させて結果を比較検討し、誤差許容値内に収まるように T を決定する方法が得策である。

(1) Fortran プログラム

式(3.1)に示される非線形貯留関数モデルの線形近似解法プログラムを以下に示す。出力結果の一例として、表3.3に示される計算時間間隔 $T=1/6\text{hs}$ (すなわち、1時間の分割数=6)に対応する計算流量を100時間まで示した。各開発建設部においても、 T を種々変化させて、精度と演算時間をチェックしておくことを推奨する。

なお、主プログラム中の DATA 文の変数説明を以下に示す。

n	: 微分方程式の階数
nr	: 雨量標本数
nq	: 計算流量数
nl	: サンプル時間間隔の分割
$wc11$	: c_{11}
$wc12$	: c_{12}
$wc13$	: c_{13}
$wp1$	: p_1
$wp2$	: p_2

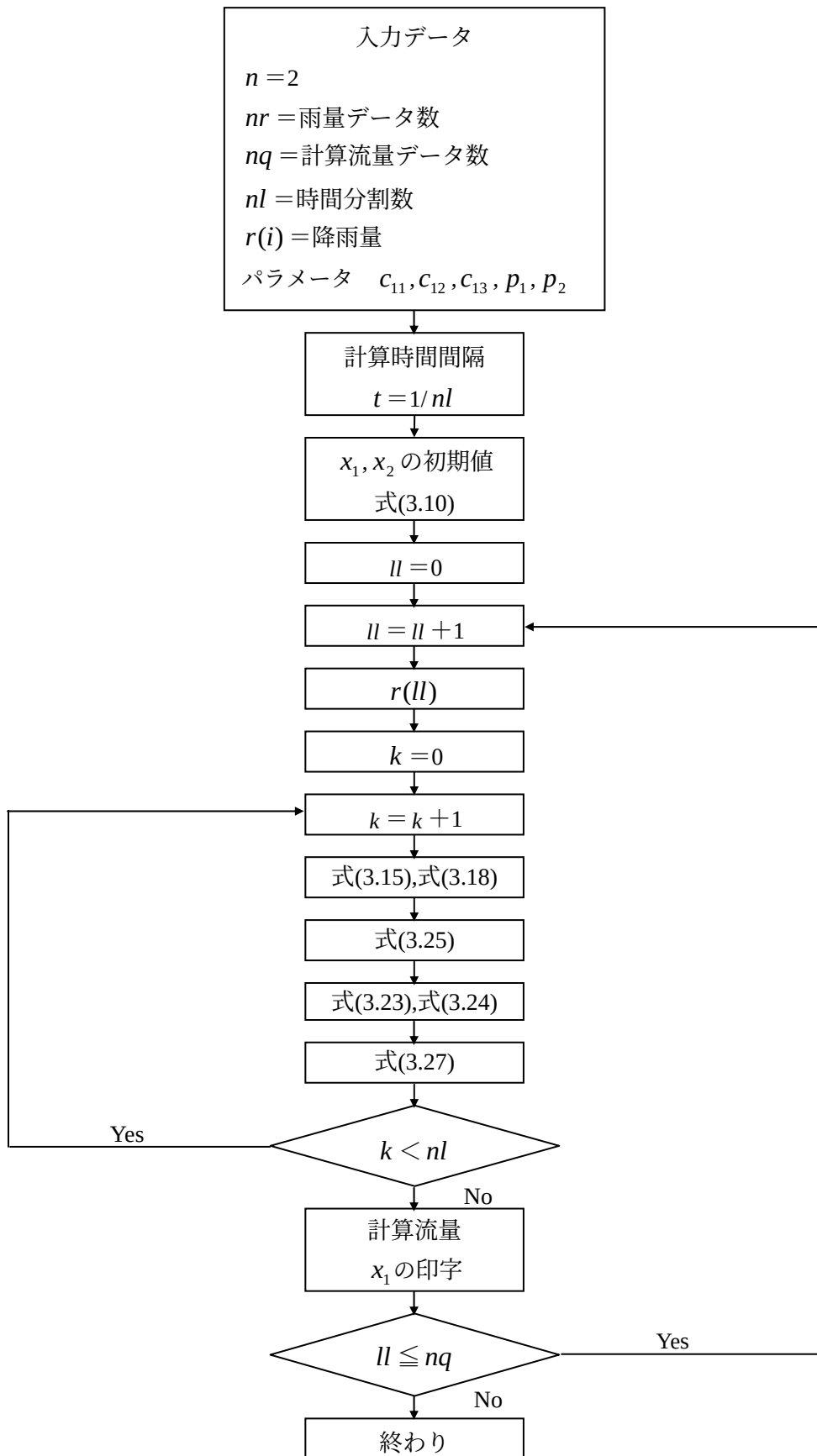


図3.2 線形近似解法のフローチャート

3. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）

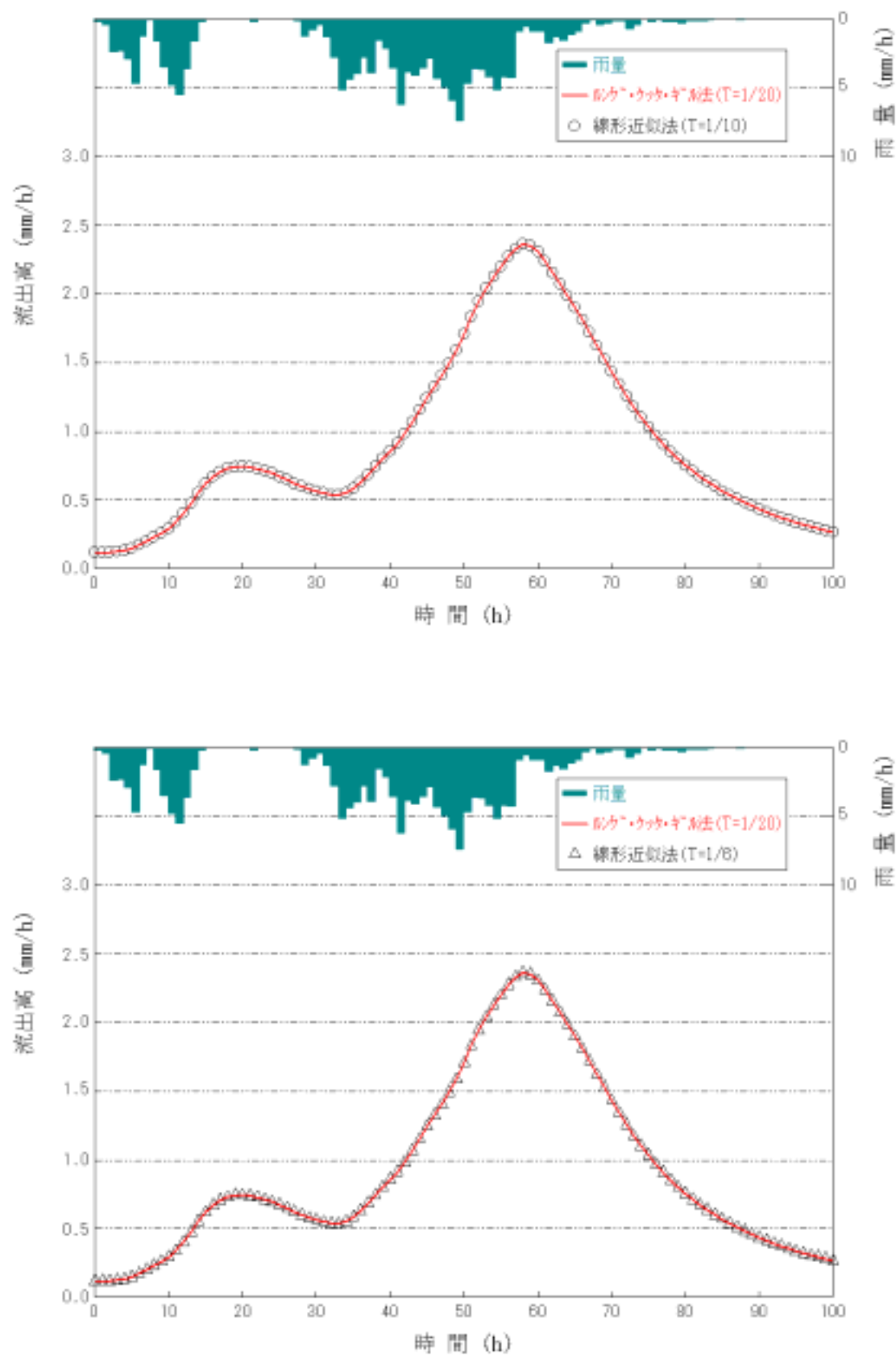


図3.3 計算時間間隔(T)の線形近似解に及ぼす影響

表3.3 式(3.27)による流量計算結果

時間	雨量(mm/h)	流出高(mm/h)	時間	雨量(mm/h)	流出高(mm/h)
1	0.29	0.1202	51	4.73	1.8312
2	0.46	0.1211	52	3.66	1.9446
3	2.42	0.1252	53	3.73	2.0399
4	2.38	0.1345	54	4.25	2.1215
5	3.00	0.1495	55	5.23	2.1988
6	4.74	0.1736	56	4.24	2.2705
7	1.36	0.2040	57	4.28	2.3312
8	0.14	0.2332	58	0.96	2.3626
9	1.70	0.2614	59	0.65	2.3499
10	3.56	0.2950	60	1.01	2.3039
11	4.90	0.3401	61	0.99	2.2354
12	5.58	0.4013	62	1.80	2.1561
13	3.67	0.4751	63	1.40	2.0724
14	1.66	0.5505	64	1.57	1.9864
15	0.24	0.6169	65	1.19	1.8994
16	0.03	0.6688	66	0.99	1.8108
17	0.00	0.7061	67	0.38	1.7190
18	0.00	0.7301	68	0.13	1.6230
19	0.00	0.7424	69	0.47	1.5267
20	0.00	0.7449	70	0.36	1.4332
21	0.05	0.7395	71	0.21	1.3428
22	0.31	0.7288	72	0.22	1.2561
23	0.03	0.7140	73	0.73	1.1759
24	0.00	0.6952	74	0.47	1.1031
25	0.00	0.6734	75	0.03	1.0344
26	0.00	0.6496	76	0.29	0.9696
27	0.03	0.6247	77	0.16	0.9092
28	0.18	0.5997	78	0.29	0.8533
29	1.29	0.5786	79	0.31	0.8021
30	0.87	0.5625	80	0.35	0.7554
31	0.49	0.5482	81	0.23	0.7127
32	1.40	0.5371	82	0.20	0.6732
33	2.90	0.5349	83	0.17	0.6364
34	5.21	0.5501	84	0.11	0.6021
35	4.44	0.5840	85	0.00	0.5697
36	4.07	0.6311	86	0.00	0.5388
37	2.82	0.6849	87	0.03	0.5097
38	3.99	0.7444	88	0.14	0.4827
39	1.63	0.8044	89	0.08	0.4578
40	2.20	0.8586	90	0.04	0.4344
41	3.63	0.9139	91	0.00	0.4125
42	6.28	0.9845	92	0.00	0.3918
43	3.93	1.0686	93	0.00	0.3723
44	4.19	1.1562	94	0.00	0.3540
45	3.59	1.2443	95	0.02	0.3369
46	2.91	1.3263	96	0.06	0.3209
47	4.37	1.4057	97	0.05	0.3061
48	5.01	1.4910	98	0.00	0.2923
49	5.99	1.5877	99	0.00	0.2792
50	7.45	1.7049	100	0.00	0.2669

(2) プログラムリスト

```

c      損失項を含む1段タンク型貯留関数法による洪水予測計算
c       $s = k11 * q^{**p1} + k12 * d(q^{**p2}) / dt$ 
c       $ds/dt = r - q - b + q0$ 
c       $b = k3 * q$ 
c       $q0 = qb * \exp(-\lambda * t)$ 
c
c       $k11 = c11 * a^{**0.24}$ 
c       $k12 = c12 * k11^{**2} * rr^{**(-0.2648)}$ 
c       $k13 = c13 - 1$ 
c       $p1 = 0.6$  (固定)
c       $p2 = 0.4648$  (固定)
c      分割数: nl=6
c
dimension x(5), r(200), q00(200)
common/st1/wk1, wk2, wc3, wp1, wp2, rain, q0, n
common/st2/h, h2, h3, h4
data area, rave/3558.00, 1.924/
data n, nr, nq, nl/2, 100, 100, 6/
data wc1, wc2, wc3, wp1, wp2/6.386, 0.153, 1.743, 0.6, 0.4648/
xnl=nl
read(5, '(10f8.0)') (r(i), i=1, nr)
c      流出計算時間間隔
h=1./xnl
h2=h**2
h3=h2*h
h4=h3*h
c      流量の初期値設定
qb=0.12
x(1)=qb**wp2
x(2)=0.0
c      地下水流出成分の低減係数(= 0.019 に仮定)
ram=0.019
q01=qb
do i=1, nq
    q02=qb*exp(-ram*i)
    q00(i)=(q01+q02)*0.5
    q01=q02
end do
c      貯留関数モデル定数 k11, k12 の設定
wk1=wc1*area**0.24
wk2=wc2*wk1**2*rave**(-0.2648)
write(6, 805) nl
805  format(7x, 'nl=', i5)
write(6, 807)
807  format(9x, 'no r(i)      q(i) '/')
do ll=1, nq
    rain=0.0
    if(ll.le.nr) rain=r(ll)
    q0=q00(ll)
    do k=1, nl
        call nolin2(x)
        if(x(1).lt.0.0) x(1)=0.0
    end do
    qcc=x(1)**(1./wp2)
    write(6, 809) ll, r(ll), qcc

```

```

809      format(1h ,i9,f6.2,f10.4)
      end do
      stop
      end

      subroutine nolin2(x)
c      nonlinear storage function model
c       $s = k_{l1}q^{**}p_1 + k_{l2}d(q^{**}p_2)/dt$ 
c      linearization of nonlinear vector equation
c       $x(k+1) = \phi x(k) + \gamma d(k)$ 
      dimension x(1),y(5)
      common/st1/wk1,wk2,wc3,wp1,wp2,rain,q0,n
      common/st2/h,h2,h3,h4
      y1=x(1)
      y2=x(2)
      aa=0.0
      bb=0.0
      cc=0.0
      dd=0.0
      if(y1.gt.0.0) go to 12
      if(y1.lt.0.0) go to 14
12      aa=y1**(wp1/wp2-2.)
      bb=y1**(1./wp2-1.)
      cc=y1**(wp1/wp2-1.)
      dd=y1**(1./wp2)
14      a1=-wk1/wk2*wp1/wp2*(wp1/wp2-1.)*aa*y2-wc3/wk2/wp2*bb
      a2=-wk1/wk2*wp1/wp2*cc
      d1=wk1/wk2*wp1/wp2*(wp1/wp2-1.)*cc*y2+wc3/wk2*(1./wp2-1.)*dd
      & +1./wk2*(rain+q0)
      a3=a1+a2**2.
      a4=a1+a3
c      elements of phi matrix
      f1=1.+0.5*a1*h2+a1*a2*h3/6.+a1*a3*h4/24
      f2=h*(1.+0.5*a2*h+a3*h2/6.+a2*a4*h3/24.)
      f3=a1*f2
      f4=1+a2*h+.5*a3*h2+a2*a4*h3/6.+(a1*a3+a2*a2*a4)*h4/24.
c      elements of gamma matrix
      g2=h*(.5*h+a2*h2/6.+a3*h3/24.)
      g4=f2
      y(1)=f1*x(1)+f2*x(2)+g2*d1
      y(2)=f3*x(1)+f4*x(2)+g4*d1
      x(1)=y(1)
      x(2)=y(2)
      return
      end

```

4. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）へのカルマン・フィルター理論の適用

洪水生起時に、時々刻々観測される降雨や水位などのテレメータデータを利用して、モデル誤差や観測誤差を考慮し、観測値と予測値の誤差を最小化しながら、洪水予測を繰り返していく方法は実時間流出予測として知られている。実時間流出予測手法には、これまでカルマン・フィルター、ファジー推論及びニューラルネットワークが適用されてきたが、どの方法にも一長一短があり、どの手法が最適であるかを確定することは困難である。

1980年に石狩川開発建設部にプラサドの貯留関数法とカルマン・フィルター理論を組み合わせた洪水予測システムが実運用開始された。その後、貯留関数モデルの改良や、実際の問題に対処するための解決策が種々考案されてきており、カルマン・フィルター理論の適用が現在でも「北海道開発局における洪水予測システム」に引継がれてきている。

カルマン・フィルターは、後述するように、システム方程式と観測方程式が完成すれば、あとは一連のカルマン・フィルター公式を機械的に適用していくことにより、逐次予測値とその誤差分散が算出される。また、テレメータ等により新しい観測値が入手されるたびに予測値と誤差分散が更新される。したがって、カルマン・フィルターは実時間流出予測に威力を発揮する一手法と考えられる。カルマン・フィルター理論の特徴を以下に要約して示す。

表4.1 カルマン・フィルター理論の特徴

- | |
|---|
| <p>(a) 人間の経験的直感による予測に近いことを計算機で自動的に行える。すなわち、洪水予測にあまり熟練を要しない。</p> <p>(b) 時々刻々の水文テレメータ情報を予測に組込む事ができる。すなわち、オンライン予測に適している。</p> <p>(c) 予測値の誤差分散(予測精度)が自動的に算定される。すなわち、予測値の信頼区間を知ることが出来る。</p> <p>(d) 過去の長い水文量情報を必要としない。すなわち、計算機のデータ容量が少なくてすむ。</p> |
|---|

表4.1に示される項目(c)の特徴は、図4.1によって容易に理解されよう。まず、テレメータ情報として、1時間毎に流域平均雨量と水位が観測されると仮定しよう。貯留関数法などの流出モデルを用いて流量を予測し、水位～流量曲線を介して予測水位が計算される。1時間毎に得られる観測水位と予測水位の差を補正して得られた最良推定値が図中の「フィルタリングした値」に相当しており、3時間目までの予測水位更新が与えられている。実際の洪水予測では、図に示される3時間先までの予測水位の大きさとその予測精度（予測誤差）が最大の課題となる。まず、3時間先までの予測降雨が必要である。現在、レーダ雨量計による降雨予測には移流モデル^{24,25)}が用いられているが、精度的に見ても1時間予測が限界のようである²⁶⁾。北海道開発局の各部局では、洪水時には3時間毎に予測雨量を気象協会より入手し、洪水予測システムに活用している。しかしながら、これらの予測降雨がどの程度の推定誤差を有しているか不明である。洪水流出予測精度は予測降雨精度に強く依存しているため、予測降雨の精度を定量的に把握することが不可欠となる。

計画高水位を超える確率 (%)	0	0	10	20
警戒水位を超える確率 (%)	0	30	60	70

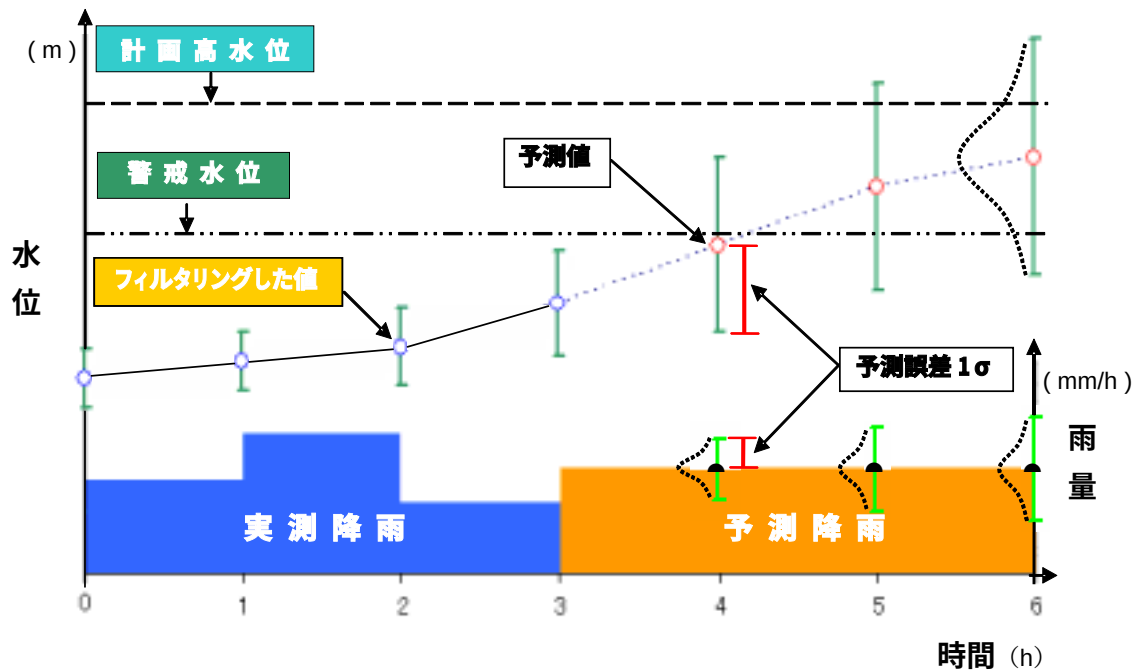


図4.1 洪水流出の実時間確率予測の概念図⁴⁾

図4.1には旧建設省が洪水予測業務において、過去3時間の移動平均値を将来3時間先予測降雨として用いる例が示されている。当然のことながら、リードタイム毎の降雨予測誤差の分散を取り込むモデルが必要となる。予測降雨とその誤差分散を入力として流出計算を行えば、将来の予測水位を計算することができる。この時、カルマン・フィルタ理論は、表4.1の(c)の項で述べたように、予測値の誤差分散を逐次推定してくれる。

この予測値と予測誤差の情報をもとに、たとえば、3時間後に警戒水位を超える確率は70%、計画高水位を超える確率は20%程度と判断されることから、水防予警報の伝達、避難、水防活動が迅速に行うことが可能となる。

まず、表4.2にカルマン・フィルタ理論の構成式を示す。この表を一見すると、カルマン・フィルタ理論は行列表示を含め、多くの数式から構成されているために、理解するのが難しいと感じる人も多い。しかしながら、理論を適用するための一連の公式であると考えれば、あとは行列演算規則にしたがって式を展開していけばよい。

表4.2に示されるカルマン・フィルタ理論を実時間流出予測に適用する際の実際的課題をとり上げながら、表4.2の構成式の意味を解説する。

- (a) カルマン・フィルタ理論を適用するには、まず「システム方程式」と「観測方程式」の定式化が基本となる。洪水流出予測を行うためには、何らかの流出モデルを選択しなければならない。表2.2に示したように、北海道開発局では kinematic wave 法を集中化した一般化貯留関数法が洪水流出解析に用いられていることから、式(3.1)に示される損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）を「システム方程式」として採用する。

表4.2 n 次元カルマン・フィルタ理論

定 義	公 式	式番号
システム方程式	$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}D_{k-1} + w_{k-1}$	(1)
観測方程式	$z_k = H_k x_k + v_k$	(2)
システム誤差	$E(w_k) = 0, \quad E(w_k w_k^T) = Q_k$	(3)
観測誤差	$E(v_k) = 0, \quad E(v_k^2) = R_k$	(4)
初期条件	$\hat{x}_0(+), \quad P_0(+)$	(5)
状態変量の伝達方程式	$\hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + \Gamma_{k-1}D_{k-1}$	(6)
状態変量の推定誤差共分散伝達方程式	$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_k$	(7)
カルマン・ゲイン	$K_k = P_k(-)H_k^T [H_k P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1}$	(8)
状態変量の更新方程式	$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)]$	(9)
状態変量の推定誤差共分散更新方程式	$P_k(+) = [I - K_k H_k] P_k(-)$	(10)

x_k : $(n \times 1)$ の状態変量ベクトル	v_k : 観測誤差
Φ_k : $(n \times n)$ の遷移行列	Q_k : $(n \times n)$ のシステム誤差分散・共分散行列
Γ_k : $(n \times n)$ の係数行列	R_k : 観測誤差分散
D_k : $(n \times 1)$ の確定変数(強制関数)ベクトル	P_k : $(n \times n)$ の推定誤差分散・共分散行列
w_k : $(n \times 1)$ のシステム誤差ベクトル	K_k : $(n \times 1)$ のカルマン・ゲインベクトル
z_k : (1×1) の観測値(状態変量のうちの1個)	I : $(n \times n)$ の単位行列
H_k : $(1 \times n)$ の係数ベクトル	T : 上添字は行列の転置
$\hat{x}_k(-)$: k 時刻で新しい観測値が入手される直前の状態変量推定値	
$\hat{x}_k(+)$: k 時刻で新しい観測値が入手される直後の状態変量更新値	
$P_k(-)$: 推定値 $\hat{x}_k(-)$ の誤差分散・共分散行列	
$P_k(+)$: 更新値 $\hat{x}_k(+)$ の誤差分散・共分散行列	

- (b) 一般には、流出モデルには流出高やその微係数、モデル定数および降雨量が含まれており、どの変数を「状態変量」 x_k に選定するかによって、「システム方程式」の定式化が異なり、状態変が多くなればなるほど、計算式も複雑となる。たとえば、式(3.1)を解くためには、式(3.3)に示される変数 x_1 と x_2 を状態変量とすれば、「システム方程式」は式(3.9)で表現される。また、モデル定数 c_{11} 、 c_{12} 及び c_{13} も洪水毎に変化することが予想されるので、モデル定数を「状態変量」に加えて、モデル定数のオンライン同定も可能となる。降雨流出過程の物理機構を十分に反映した流出モデルが採用されていれば、モデル定数のオンライン推定値は時間的に変動が小さくなることは容易に想像できよう。一般的に、モデル定数は観測不可能であるが、カルマン・フィルタ理論においては、すべての「状態変量」が観測されなくてもよいことになる。さらに、図4.1に示したように、予測降雨の誤差はリードタイムに応じて大きく変化することが予想され、それが予測水位の誤差にも大きく影響を及ぼす。したがって、降雨量を「状態変量」に加えて、推定値およびその誤差分散を伝達・更新する手法も考えられる。

- (c) 洪水時に得られる観測値情報は水位あるいは水位～流量曲線の変換から得られる流量（流出高）である。したがって、「**観測方程式**」として水位ないし流出高を採用すればよい。多くの場合は、観測値は1個だけとなるので、「**観測方程式**」はスカラー方程式となる。表4.2の「**観測方程式**」に示される z_k は水位ないし流出高であり、「**システム方程式**」の状態変量と結びつける関係式が必要となる。たとえば、式(3.3)において、 x_1 が状態変量であれば、流出高 q は 式(3.28)の逆変換によって計算されることになる。したがって、「**観測方程式**」は $z_k = x_1^{1/p_2}$ の非線形式で与えられることになる。同様に水位を観測値とすれば、「**観測方程式**」は x_1 の非線形関数で与えられることは容易に理解できよう。
- (d) 表4.2の「**システム方程式**」と「**観測方程式**」を見ると、共に線形方程式であることがわかる。すなわち、カルマン・フィルター理論は元来、線形最適化制御理論として開発されたものである。したがって、カルマン・フィルター理論を直接適用するためには、非線形方程式を前述した「**3.1線形近似解法**」によって解く方が賢明である。すなわち、式(3.27)が表4.2の「**システム方程式**」に対応していることがわかる。どんなに精密な流出モデルを用いても、出水現象を完全に記述することは不可能であり、流出モデル自身、定数および線形近似化にも相当の誤差が含まれており、その影響が「**システム誤差**」 w_k として導入されている。表中の Q_k はシステム誤差の分散・共分散を意味する。洪水期間に水位～流量曲線の見直しを行うことが現実問題として不可能であり、前年度に設定されている水位～流量曲線を使用せざるを得ない。観測水位から流量を推定する時も相当な誤差を覚悟しておかなければならない。この影響が「**観測誤差**」 v_k に反映されており、観測方程式が一次元の場合、 R_k は観測誤差の分散を意味する。
- (e) 前述したように、「**観測方程式**」が非線形であれば、前時刻の推定値のまわりにテーラー級数展開し、一次の項までとって、係数ベクトル H_k を算出して、以後の計算に H_k を用いればよい。非線形関数を線形化してカルマン・フィルター理論を適用する手法は拡張カルマン・フィルター(Extended Kalman Filter)として知られている。
- (f) 表4.2中の記号(-)と(+)は、それぞれテレメータ情報が入手される直前・直後の推定値を表す。表中の式(6)と式(7)において、(-)と(+)の記号を削除すると、「**状態変量の伝達方程式**」は、図4.1に示される任意のリードタイムにおける予測水位を計算するときの漸化式となっていることが分かる。このとき、ベクトル D_{k-1} には予測降雨が入力される。同様に、「**状態変量の推定誤差共分散伝達方程式**」は各リードタイムにおける予測水位の予測誤差を計算する漸化式である。このとき、行列 P_{k-1} には状態変量の誤差共分散を始め、モデル定数の誤差共分散や予測降雨の分散(図4.1を参照)が入力される。表4.2中の式(5)の初期条件 $\hat{x}_0(+)$ と $P_0(+)$ は計算前にあらかじめ設定しておく必要がある。
- (g) カルマン・フィルター理論を実時間流出予測に適用する際の難点は、システム誤差共分散 Q_k と観測誤差分散 R_k の設定にあった。しかしながら、京大グループ⁴⁾が状態変量の推定値に比例するという「**乗算的誤差**」の概念を導入した結果、 Q_k や R_k に関しても実運用が比較的容易となっている。
- (h) カルマン・フィルター理論の最も注目すべき点は表4.2の式(9)に示される「**状態変量の更新方程式**」にある。 $z_k - H_k \hat{x}_k(-)$ は観測値と流出モデルによる推定値との誤差に相当している。この誤差が小さければ、流出モデルによる推定値 $\hat{x}_k(-)$ は信頼性が高いことになる。一方、この誤差が大きければ、重み係数 K_k （カルマン・ゲイン）を用いて補正を行い、流出モデルによる推定値を更新することを意味する。したがって、「**状態変量の更新方程式**」は表4.1の(a)に述べたように、人間の経験的直感による予測に近いことを計算機で自動的に行えることに相当している。

カルマン・フィルタ理論を適用した洪水予測モデルを構築する際、表4.1に示されるシステム方程式と観測方程式をどのように定式化するかが重要な問題となる。

4.1 システム方程式の定式化

第3章で既に述べた損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）を流出モデルとして採用する。それを再記すれば次式で示される。

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r - q - b + q_0 \\ s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ b = k_{13}q \\ q_0 = q_B \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで、 s ：貯留高(mm)、 r ：観測雨量(mm/h)、 q ：計算流出高(mm/h)、 b ：損失高(mm/h)、 q_0 ：基底流出高(mm/h)、 q_B ：初期流出高(mm/h)、 k_{11}, k_{12} ：貯留係数、 k_{13} ：損失係数、 p_1, p_2 ：貯留指数、 λ ：減衰係数

また k_{11} と k_{12} および k_{13} は、次式で表現される。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648} \\ c_{13} = k_{13} + 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

ここで、 A ：流域面積(km²)、 $\bar{r}$ ：平均雨量強度(mm/h)、 c_{11}, c_{12}, c_{13} ：未知定数

式(4.1)を解くために、次の変数を「状態変量」に選定する。

$$\begin{cases} x_1 = q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (4.3)$$

モデル定数 c_{11} と c_{12} および c_{13} は、洪水毎に変化することが予想される。したがって、 c_{11} と c_{12} および c_{13} も「状態変量」に加えてシステム方程式を作成する。

状態変量をベクトル表示すると以下のように示される。

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ここで、

$$X_1 = [x_1 \quad x_2]^T, \quad X_2 = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}]^T \quad (4.5)$$

4.2 状態変量の伝達方程式

洪水予測では、状態変量の伝達方程式は l 時間先の流量、水位を予測することに対応しているので、**表4.2**に示す**式(6)「状態変量の伝達方程式」**について定式化を行う。

まず式(4.3)を微分すると、

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \end{cases} \quad (4.6)$$

このとき、モデル定数は時間的に変動しないものとして、次のように考える。

$$\begin{cases} \frac{dc_{11}}{dt} = f_3 = 0 \\ \frac{dc_{12}}{dt} = f_4 = 0 \\ \frac{dc_{13}}{dt} = f_5 = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

この方策はカルマン・フィルタ理論適用にあたって、しばしば用いられる。よって、状態変量に関する微分方程式は式(4.6)と式(4.7)より、式(4.8)で表現でき、システム方程式の原式として用いる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

上式を行列表示すると、

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (4.9)$$

ここで、

$$F(X) = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5]^T \quad (4.10)$$

カルマン・フィルタ理論は、元来線形システムの状態変量推定として導かれているため、式(4.8)を線形化する必要がある。

そこで、式(4.9)の $F(X)$ を $X = X^*$ においてテーラー級数展開すると、次の線形近似式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (4.11)$$

ここで、

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_1 & 0_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$0_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

式(4.13)の行列 A_1 と A_2 の要素は次式で計算される。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-2} (x_2^*) - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2-1} \\ a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} \\ a_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial c_{11}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = \left\{ -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) \right\} A^{0.24} \\ a_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial c_{12}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} \\ \quad = \frac{1}{k_{12}^2} \left\{ k_{11} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) + c_{13} (x_1^*)^{1/p_2} - (r + q_0) \right\} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ a_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{13}} \frac{\partial k_{13}}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}} (x_1^*)^{1/p_2} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

また、式(4.11)のベクトル $D(X^*)$ は次式で与えられる。

$$D(X^*) = F(X^*) - A(X^*)X^* \\ = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$d_2 = f_2(x_1^*, x_2^*, c_{11}, c_{12}, c_{13}) - a_{21}x_1^* - a_{22}x_2^* - a_{23}c_{11} - a_{24}c_{12} - a_{25}c_{13} \\ = \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-1} x_2^* + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{1/p_2} + \frac{2}{k_{12}} (r + q_0) \quad (4.17)$$

式(4.11)は線形常微分方程式であり、 $A(X^*)$ と $D(X^*)$ が定係数行列の場合、次の差分方程式に変換できる。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (4.18)$$

式(4.18)を行列表示すると、次式が得られる。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \left[\begin{array}{c|c} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (4.19)$$

ここで、

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_k \quad (4.20)$$

$$\Phi_k = \left[\begin{array}{c|c} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

次に、 Φ_1 と Φ_2 および Γ_1 の要素を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + a_{21}T\beta_1 \\ \phi_{12} = T\beta_2 \\ \phi_{21} = a_{21}\phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_{22}T + \frac{1}{2}a_1T^2 + \frac{1}{6}a_2T^3 + \frac{1}{24}(a_{21}a_1 + a_{22}a_2)T^4 \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} \phi_{13} = a_{23}T\beta_1 \\ \phi_{14} = a_{24}T\beta_1 \\ \phi_{15} = a_{25}T\beta_1 \\ \phi_{23} = a_{23}T\beta_2 \\ \phi_{24} = a_{24}T\beta_2 \\ \phi_{25} = a_{25}T\beta_2 \end{cases} \quad (4.24)$$

$$\begin{cases} \gamma_{12} = T\beta_1 \\ \gamma_{22} = \phi_{12} \end{cases} \quad (4.25)$$

ここで、

$$\begin{cases} a_1 = a_{21} + a_{22}^2 \\ a_2 = 2a_{21}a_{22} + a_{22}^3 \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_{22}T^2 + \frac{1}{24}a_1T^3 \\ \beta_2 = 1 + \frac{1}{2}a_{22}T + \frac{1}{6}a_1T^2 + \frac{1}{24}a_2T^3 \end{cases} \quad (4.27)$$

また、式(4.18)を行列要素で表すと次式になる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (4.28)$$

式(4.28)の行列を展開すると、表4.2に示す式(6)「状態変量の伝達方程式」に対応する式(4.18)は次のように記述できる。

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = \phi_{11}x_{1,k} + \phi_{12}x_{2,k} + \phi_{13}c_{11,k} + \phi_{14}c_{12,k} + \phi_{15}c_{13,k} + \gamma_{12}d_{2,k} \\ x_{2,k+1} = \phi_{21}x_{1,k} + \phi_{22}x_{2,k} + \phi_{23}c_{11,k} + \phi_{24}c_{12,k} + \phi_{25}c_{13,k} + \gamma_{22}d_{2,k} \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\begin{cases} c_{11,k+1} = c_{11,k} \\ c_{12,k+1} = c_{12,k} \\ c_{13,k+1} = c_{13,k} \end{cases} \quad (4.30)$$

すなわち式(4.29)は、基本式である式(4.6)の漸化式であり、モデルパラメータ c_{11}, c_{12}, c_{13} を状態変量に加えたときの状態変量 $x_1 (= q^{p_2})$ 、 $x_2 (= dq^{p_2}/dt)$ の伝達方程式となる。式(4.17)により右辺の d_2 に予測雨量を入れることで、状態変量 $x_{1,k+1}$ と $x_{2,k+1}$ の予測値を求めることが出来る。また、モデルパラメータは式(4.30)により観測値間では時間変化していないことがわかる。

流量を予測する場合、状態変量 x_1 の予測値と流量予測値 Q_k との関係を示す。

式(4.3)より流出高は次式で表現される。

$$q_k = x_{1,k}^{1/p_2} \quad (4.31)$$

ここで、 q_k : 流出高(mm/h)、 $x_{1,k}$: 式(4.29)から計算される状態変量、 $p_2=0.4648$ (固定値)

したがって、流量と流出高の関係から状態変量 $x_{1,k}$ を用いたときの流量予測式が次式で与えられる。

$$Q_k = \frac{A}{3.6} q_k = \frac{A}{3.6} x_{1,k}^{1/p_2} \quad (4.32)$$

ここで、 Q_k : 離散時刻 k における流量予測値、 $x_{1,k}$: 時刻 k における状態変量 x_1 の値

次に、水位を予測する場合、状態変量 $x_{1,k}$ の予測値と水位予測値 H_k との関係を示す。一般には流量観測資料に基づいて次の水位～流量曲線（ $H \sim Q$ 関係式）が予め設定されている。

$$Q_k = a(H_k + b)^2 \quad (4.33)$$

式(4.33)を水位に関して表現すると、以下ようになる。

$$H_k = -b + \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{Q_k} \quad (4.34)$$

すなわち、

$$b_0 = -b, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (4.35)$$

$$H_k = b_0 + b_1 \sqrt{Q_k} \quad (4.36)$$

式(4.32)を式(4.36)に代入すれば、状態変数 $x_{1,k}$ を用いたときの水位予測式が得られる。

$$H_k = b_0 + b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6}} (x_{1,k})^{1/2 p_2} \quad (4.37)$$

ここで、 H_k ：離散時刻 k における水位予測値、 $x_{1,k}$ ：時刻 k における状態変数 x_1 の値

4.3 状態変数の推定誤差共分散伝達方程式の定式化

洪水予測では、状態変数の推定誤差共分散伝達方程式は l 時間先の流量ないし水位予測値の精度（分散）に対応しているので、表4.2に示される式(7)「推定誤差共分散伝達方程式」について定式化を行う。

そこで、まず次式を定義する。

$$\tilde{X}_k = X_k - \hat{X}_k \quad (4.38)$$

$\tilde{X}_k$ は、状態変数の真値 X_k と最良推定値 $\hat{X}_k$ の差、すなわち誤差（ $\sim$ は以後誤差を表わすものとする）になっているので、状態変数推定誤差と呼ぶ。

また、 $\tilde{X}_k$ は式(4.18)の $\Gamma_k D_k$ を確定変数とすると、次式で表される。

$$\tilde{X}_{k+1} = \Phi_k \tilde{X}_k \quad (4.39)$$

この $\tilde{X}_k$ の分散・共分散 (P_k) を計算すると、 P_k は式(4.40)で表される。

$$\begin{aligned} P_k &= E(\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T) = E \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \tilde{X}_1^T & \tilde{X}_2^T \end{bmatrix}_k \right\} \\ &= \begin{bmatrix} E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2^T)_k \\ E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_2^T)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} \\ P_{2,k}^T & U_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.40)$$

ここで、 $P_{1,k}$ ： X_1 に関する (2×2) の分散・共分散行列、 $P_{2,k}$ ： X_1 と X_2 に関する (2×3) の共分散行列、 U_k ： X_2 に関する (3×3) の分散・共分散行列

式(4.39)を式(4.40)に代入すると、表4.2の式(7)に示される $\tilde{X}_{k+1}$ の分散・共分散行列 P_{k+1} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E(\tilde{X}_{k+1} \tilde{X}_{k+1}^T) \\ &= \Phi_k P_k \Phi_k^T \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} \\ P_{2,k}^T & U_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^T & 0 \\ \Phi_2^T & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.41)$$

また、 $P_{1,k}$ の行列を要素展開すると、式(4.42)となる。

$$P_{1,k} = \begin{bmatrix} \text{Var}(x_{1,k}) & \text{Cov}(x_{1,k}, x_{2,k}) \\ \text{Cov}(x_{2,k}, x_{1,k}) & \text{Var}(x_{2,k}) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

ここで、 $\text{Var}(x_{1,k})$: $x_{1,k}$ の分散、 $\text{Cov}(x_{1,k}, x_{2,k})$: $x_{1,k}$ と $x_{2,k}$ の共分散

流量を予測する場合、式(4.32)により計算される流量予測値の精度（分散）は、次式で求められる。

$$\text{Var}(Q_k) = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial x_{1,k}} \right)^2 \text{Var}(x_{1,k}) = \left(\frac{A}{3.6} \right)^2 \left(\frac{1}{p_2} x_{1,k}^{1/p_2-1} \right)^2 \text{Var}(x_{1,k}) \quad (4.43)$$

すなわち、 $\text{Var}(x_{1,k})$ は式(4.42)から求められる。

また、水位を予測する場合、式(4.37)により計算される水位予測値の精度（分散）は、次式で求められる。

$$\text{Var}(H_k) = \left(\frac{\partial H_k}{\partial Q_k} \right)^2 \text{Var}(Q_k) = \frac{b_1^2}{4} Q_k^{-1} \text{Var}(Q_k) \quad (4.44)$$

すなわち、 Q_k の値に式(4.32)を、また $\text{Var}(Q_k)$ に式(4.43)を用いる。

要約すると、 l 時間先の予測流量(Q_l)および予測水位(H_l)の推定誤差分散は、式(4.43)と式(4.44)を順次適用していけばよい。

式(4.41)のベクトル $\Phi_k P_k \Phi_k^T$ を展開すると下式になる。

$$P_{1,k+1} = \Phi_1 P_{1,k} \Phi_1^T + \Phi_2 P_{2,k}^T \Phi_1^T + \Phi_1 P_{2,k} \Phi_2^T + \Phi_2 U_k \Phi_2^T \quad (4.45)$$

$$P_{2,k+1} = \Phi_1 P_{2,k} + \Phi_2 U_k \quad (4.46)$$

$$U_{k+1} = U_k \quad (4.47)$$

式(4.45)の $P_{1,k+1}$ は、状態変量 X_1 の推定値誤差分散・共分散である。モデル定数を状態変量に加え、システム方程式を拡大することによって、 Φ_2 と $P_{2,k}$ 及び U_k の影響が $P_{1,k+1}$ に反映されていることになる。

式(4.47)のモデル定数の誤差分散・共分散 U_k は、新しい観測値が入手されるまでは変化しないことを意味している。その理由は、 U_k は状態変量ベクトル $X_2 = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}]$ の推定値誤差分散・共分散であり、式(4.30)に示されるように一定値が伝達されているからである。

U_k の値をあらかじめ設定しておく必要がある。モデル定数、 c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} が互いに独立であると仮定すると、 U_k は以下のように表すことができる。

$$U_k = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{13}^2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

ここで、 $\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{13}^2$ はそれぞれモデル定数、 c_{11}, c_{12}, c_{13} の分散の初期値である。この U_k は、式(4.45)と(4.46)において使用される。

4.4 乗算的ノイズによるシステム誤差の定式化

式(4.41)にはシステム誤差分散・共分散行列 Q_k が含まれておらず、表4.2に示される式(7)「状態変量の推定誤差共分散伝達方程式」を満たすために、システム誤差分散・共分散行列 Q_k をどのように導入するかという問題が残る。

式(4.18)はカルマン・フィルタ理論における観測値間、 $t_k \leq t < t_{k+1}$ での状態変量の伝達方程式に相当しており、この間システム誤差を考慮しない。その代り、図4.2に示すように、 $t = t_{k+1}$ において瞬間的にシステムノイズが付加されると考える。すなわち、この時点でシステムノイズの誤差分散・共分散 Q_{k+1} を作用させることになる。このとき、ノイズの大きさは状態変量推定値に比例すると仮定する。この考えが京大グループによって提案された「乗算的ノイズ」の導入である。今、式(4.18)の解より得られる $t = t_{k+1}$ における状態変量を $x_1(t_{k+1})$ 及び $x_2(t_{k+1})$ とする。また、図4.2の(-)、(+)の記号はそれぞれ流量観測値情報入手直前と直後を意味する。したがって、乗算的ノイズを導入することにより、次の定式化を行なうことができる。

$$\begin{aligned} X_{1,k+1}(-) &= X_1(t_{k+1})(1+W_{k+1}) \\ &= X_1(t_{k+1}) + B_{k+1}W_{k+1} \end{aligned} \quad (4.49)$$

ここで、

$$\left\{ \begin{aligned} X_{1,k+1}(-) &= \begin{bmatrix} x_{1,k+1}(-) \\ x_{2,k+1}(-) \end{bmatrix} \\ B_{k+1} &= \begin{bmatrix} b_{1,k+1} & 0 \\ 0 & b_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) & 0 \\ 0 & x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} \\ W_{k+1} &= \begin{bmatrix} w_{1,k+1} \\ w_{2,k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (4.50)$$

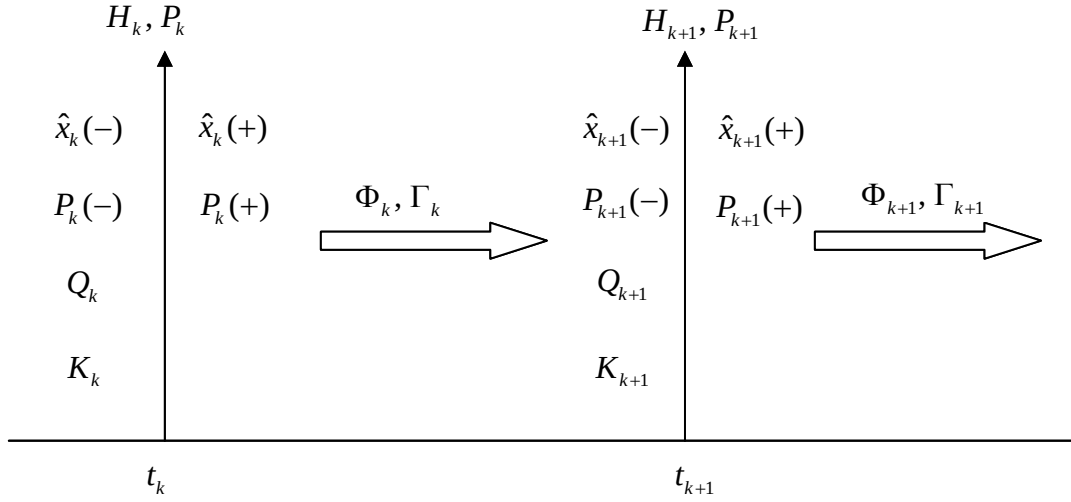


図4.2 状態変量・誤差共分散行列の伝達・更新概念図

式(4.49)と(4.50)にも示されるように、システム誤差は状態変量に比例している。システム誤差ベクトル W_{k+1} は次の統計的性質をもつものとする。

$$\begin{cases} E(W_{k+1}) = 0 \\ E(W_{k+1}W_{k+1}^T) = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.51)$$

システム誤差として状態変量の $100\alpha_1\%$ ($\alpha_1 = 0.1 \sim 0.2$ が適当) の大きさを想定している。 W_{k+1} は式(4.51)の性質を有しているので、 $X_{1,k+1}(-)$ の推定値は式(4.49)から次式で与えられる。

$$\hat{X}_{1,k+1}(-) = E[X_{1,k+1}(-)] = \hat{X}_1(t_{k+1}) \quad (4.52)$$

すなわち、 $\hat{X}_{1,k+1}(-)$ は式(4.18)の伝達方程式を解いたときの $t = t_{k+1}$ における値に等しい。式(4.52)から式(4.49)を引くと、次式が得られる。

$$\{\hat{X}_{1,k+1}(-)\} - \{X_{1,k+1}(-)\} = \{\hat{X}_1(t_{k+1})\} - \{X_1(t_{k+1})\} - B_{k+1}W_{k+1} \quad (4.53)$$

すなわち、

$$\tilde{X}_{1,k+1}(-) = \tilde{X}_1(t_{k+1}) - B_{k+1}W_{k+1} \quad (4.54)$$

式(4.54)を用いることにより、推定誤差分散・共分散は次式で計算できる。

$$\begin{aligned}
P_{1,k+1}(-) &= E \left[\tilde{X}_{1,k+1}(-) \tilde{X}_{1,k+1}^T(-) \right] \\
&= P_{1,k+1} + B_{k+1} E \left(W_{k+1} W_{k+1}^T \right) B_{k+1}^T \\
&= P_{1,k+1} + Q_{k+1}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
Q_{k+1} &= B_{k+1} E \left(W_{k+1} W_{k+1}^T \right) B_{k+1}^T = B_{k+1} (\alpha_1^2 I) B_{k+1}^T \\
&= \begin{bmatrix} (b_{1,k+1} \alpha_1)^2 & 0 \\ 0 & (b_{2,k+1} \alpha_1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_1(t_{k+1}) \alpha_1\}^2 & 0 \\ 0 & \{x_2(t_{k+1}) \alpha_1\}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

式(4.55)の右辺第1項の $P_{1,k+1}$ は式(4.45)で計算される。式(4.56)においては、行列 B_{k+1} は状態変量推定値に依存して観測値入手直前まで変化するので、 α_1 が一定値であっても Q_{k+1} は時間的に変化していることになる。すなわち、システムノイズに非定常性が考慮されていることになる。しかも、計算が非常に容易であり、実際の運用にあたっても困難を生じない。

なお、 B_{k+1} の要素は式(4.52)に示されるように、観測値情報が入手される直前の $\hat{x}_{1,k+1}(-)$ と $\hat{x}_{2,k+1}(-)$ を用いばよい。また、式(4.56)の Q_{k+1} は前述した通り(図4.2を参照)、観測値情報が入手される直前に作用させる。すなわち、予測計算期間中は式(4.45)と式(4.46)の伝達方程式を用い、 Q_{k+1} を作用させないことに留意すべきである。

4.5 観測方程式の定式化

カルマン・フィルタ理論を適用するために、表4.2に示される**式(2)「観測方程式」**の定式化を行う。流出高を観測値とすると、式(4.32)で流量を流出高に変換した値と状態変量 x_1 の間には式(4.3)の関係が成立するので、観測方程式を次のように定義する。

$$z_k = x_{1,k}^{1/p_2} (1 + v_k) = x_{1,k}^{1/p_2} + c_k v_k \tag{4.57}$$

ここで、

$$c_k = x_{1,k}^{1/p_2} \tag{4.58}$$

z_k : サンプル時刻 k における流出高観測値、 v_k : 観測誤差

表4.2に示されるようにカルマン・フィルタ理論は、元来、線形システム方程式と線形観測方程式に関して理論展開がなされている。このため、式(4.57)の非線形観測方程式は直接カルマン・フィルタ理論に適用することができない。よって、式(4.57)の線形化を行う。

$$\begin{aligned}
 h(x_1) &= x_1^{1/p_2} \\
 &= h(x_1^*) + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)_{x_1^*} (x_1 - x_1^*) \\
 &= h_1 x_1 + h(x_1^*) - h_1 x_1^* \\
 &= H_k X_k + h_3
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

ここで、

$$H_k = [H_1 \mid H_2] \quad , \quad H_1 = [h_1 \quad 0] \quad , \quad H_2 = [0 \quad 0 \quad 0] \tag{4.60}$$

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{bmatrix} \tag{4.61}$$

$$h_1 = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)_{x_1^*} = \frac{1}{p_2} (x_{1,k}^*)^{1/p_2 - 1} \tag{4.62}$$

$$h_3 = h(x_1^*) - \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)_{x_1^*} x_1^* = (x_1^*)^{1/p_2} - \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2} = \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) (x_1^*)^{1/p_2} \tag{4.63}$$

なお、上式に含まれている x_1^* の値として $\hat{x}_{1,k+1}(-)$ の値を用いればよい。

4.6 状態変量の更新方程式

観測値として流出高が得られた後、表4.2に示される式(9)「状態変量の更新方程式」は、次式で与えられる。

$$\hat{X}_k(+) = \hat{X}_k(-) + K_k [z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2}] \tag{4.64}$$

すなわち、 $z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2}$ は流出高の観測値と貯留関数法による計算値との差を表わしており、 $\hat{X}_k(-)$ ベクトルを要素展開すると次式のようなになる。

$$\hat{X}_k(-) = \begin{bmatrix} \hat{X}_1(-) \\ \hat{X}_2(-) \end{bmatrix}_k \tag{4.65}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1(-) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(-) \\ \hat{x}_2(-) \end{bmatrix}_k \quad (4.66)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_2(-) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11}(-) \\ \hat{c}_{12}(-) \\ \hat{c}_{13}(-) \end{bmatrix}_k \quad (4.67)$$

式(4.64)を状態変量の要素を用いて表すと、「状態変量の更新方程式」は次のように表現できる。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(-) \end{bmatrix}_k + K_{1,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_2(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_2(-) \end{bmatrix}_k + K_{2,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \end{cases} \quad (4.68)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{c}_{11}(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11}(-) \end{bmatrix}_k + K_{3,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \\ \begin{bmatrix} \hat{c}_{12}(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{c}_{12}(-) \end{bmatrix}_k + K_{4,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \\ \begin{bmatrix} \hat{c}_{13}(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{c}_{13}(-) \end{bmatrix}_k + K_{5,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \end{cases} \quad (4.69)$$

式(4.68)と式(4.69)の $K_{i,k}$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$) は、カルマン・ゲイン K_k の要素である。式(4.69)によれば、モデル定数 c_{11} 、 c_{12} および c_{13} は新しい観測値が入手されたのち更新されることになる。

4.7 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化

カルマン・フィルターを実行するには、表4.2に示される式(4)「観測誤差分散」が必要となる。 R_k は式(4.57)より次式で与えられる。

$$\begin{cases} R_k = E \left[(c_k v_k)^2 \right] = c_k^2 E \left[v_k^2 \right] = c_k^2 \alpha_2^2 \\ \alpha_2^2 = E \left[v_k^2 \right] \quad (\alpha_2 = 0.1 \sim 0.2) \end{cases} \quad (4.70)$$

すなわち、 α_2 については c_k (最新流出高推定値) の 10% ないし 20% の誤差を仮定していることを意味する。このとき、式(4.58)で定義される c_k の x_1 の値として $\hat{x}_{1,k}(-)$ を用いればよい。

4.8 カルマン・ゲインの算定

表4.1に示される式(8)「カルマン・ゲイン」 K_k は、以下の手順で計算する。まず、分散・共分散行列 $P_k(-)$ は式(4.40)に示すように以下で定義する。

$$P_k(-) = \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ P_{2,k}^T(-) & U_k(-) \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

K_k には逆行列が含まれているが、観測方程式が一次元(スカラー量)式である場合には、この項はその逆数をとればよい。カルマン・ゲインに含まれる行列演算を式(4.60)の定係数ベクトル H_1 と式(4.40)の小行列を用いて行くと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} P_k(-)H_k^T &= \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ P_{2,k}^T(-) & U_k(-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.72)$$

式(4.60)に示されるように、ベクトル H_1 の要素は h_1 と 0 である。式(4.72)の演算は行列 $P_{1,k}(-)$ と $P_{2,k}^T(-)$ のうち、第1列目の要素に h_1 を乗じた値となる。

表4.2に示される式(8)の右辺第2項を再記すれば、次式のようにになる。

$$\begin{aligned} H_k P_k(-)H_k^T + R_k &= \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{bmatrix} + R_k \\ &= H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k \end{aligned} \quad (4.73)$$

式(4.73)の $H_k P_k(-)H_k^T$ は、行列 $P_{1,k}(-)$ の1行1列目の要素 $p_{11}(-)$ に h_1^2 を乗じた値に等しい。したがって、

$$S = H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k = h_1^2 p_{11}(-) + R_k \quad (4.74)$$

カルマン・ゲイン K_k は、式(4.72)を式(4.74)で割ればよいので、次式で与えられる。

$$K_k = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{bmatrix} S^{-1} \quad (4.75)$$

4.9 状態変量の推定誤差共分散更新方程式

表4.2に示される式(10)「推定誤差共分散の更新方程式」は次のように変形される。

$$\begin{aligned}
 I - K_k H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1,k} \\ K_{2,k} \\ K_{3,k} \\ K_{4,k} \\ K_{5,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 K_{1,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{2,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{3,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{4,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{5,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & I \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

ここで、

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 - h_1 K_{1,k} & 0 \\ -h_1 K_{2,k} & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -h_1 K_{3,k} & 0 \\ -h_1 K_{4,k} & 0 \\ -h_1 K_{5,k} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.77}$$

の行列を定義すると、誤差共分散行列は式(4.78)で更新される。

$$\begin{aligned}
 P_k(+) &= \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ P_{2,k}^T(-) & U_k(-) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} M_1 P_{1,k}(-) & M_1 P_{2,k}(-) \\ M_2 P_{1,k}(-) + P_{2,k}^T(-) & M_2 P_{2,k}(-) + U_k(-) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

すなわち、 $P_k(+)$ の小行列は次式で計算される。

$$\begin{cases} P_{1,k}(+) = M_1 P_{1,k}(-) \\ P_{2,k}(+) = M_1 P_{2,k}(-) = P_{1,k}^T(-) M_2^T + P_{2,k}(-) \\ U_k(+) = M_2 P_{2,k}(-) + U_k(-) \end{cases} \tag{4.79}$$

式(4.79)によれば、新しい観測値が入手される毎に、状態変量ベクトル X_1 と X_2 の分散・共分散が更新される。同様に、モデル定数 c_{11} 、 c_{12} および c_{13} の分散・共分散行列も更新されることに着目すべきである。

4.10 単一流域を対象とした洪水予測モデルの適用例

洪水予測対象地点は、単一流域である石狩川水系石狩川納内地点（流域面積 3558.0km²）を対象とし、適用例として最近起こった平成 13 年 9 月 9 日 1:00～15 日 24:00 までの洪水を選定した。

（1）初期条件の設定

予測計算を行う際の状態変数及びその推定誤差分散・共分散の伝達方程式（表4.2 式(6)及び式(7)）を適用するためには初期値を設定しなくてはならない。そこで状態変数及びその推定誤差分散・共分散は次のように設定する。

表4.3 状態変数の初期条件

x_1	x_2	c_{11}	c_{12}	c_{13}
$q_B^{p_2}$	0	6.386	0.153	1.743

x_1 に含まれる q_B は初期流出高であり、貯留指数 p_1 と p_2 はそれぞれ 0.6 と 0.4648 を与える。 x_2 は dx_1/dt であるので、初期値は 0 を与える。また c_{11} と c_{12} および c_{13} の値は、既往洪水定数解析の平均値を与えた。

表4.4 状態変数の誤差分散・共分散の初期条件

x_1 の誤差分散	x_2 の誤差分散	σ_{11}^2	σ_{12}^2	σ_{13}^2
$(0.1x_1)^2$	$(0.1x_1)^2$	$(0.2c_{11})^2$	$(0.2c_{12})^2$	$(0.2c_{13})^2$

式(4.48)の U_k は X_2 の分散・共分散行列であり、その要素 σ_{11}^2 、 σ_{12}^2 、 σ_{13}^2 は、モデル定数の分散の初期値である。今回は経験的に初期値をそれぞれ c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} の2割を設定した。 x_2 の初期値はゼロで与えるが、その分散をゼロとするのは不合理であるため、 x_2 の誤差分散を $(0.1x_1)^2$ に設定してある。

（2）計算条件の設定

表4.5 計算条件

減衰係数 λ	0.019
平均降雨強度 $\bar{r}$	2.138mm/h
計算時間間隔 nl	12
観測誤差分散 R_k	$(0.1x_{1,k}^{1/p_2})^2$
システム誤差分散 $Q_{1,k}, Q_{2,k}$	$(0.1x_1)^2, (0.1x_2)^2$

観測誤差分散 R_k は、式(4.58)と式(4.70)より $(0.1x_{1,k}^{1/p_2})^2$ を与え、システム誤差分散 $Q_{1,k}$ と $Q_{2,k}$ は、式(4.56)よりそれぞれ $(0.1x_1)^2$ と $(0.1x_2)^2$ を与える。また、平均降雨強度 $\bar{r}$ は既往洪水の平均値とし、1時間あたりの計算時間分割数 nl は12と設定した。

実際の洪水予測を想定し、対象洪水より一年前の水位～流量曲線を使用する(図4.3参照)。表4.6に示される a と b は式(4.33)の係数である。また、 b_0 と b_1 は式(4.35)より算出した。

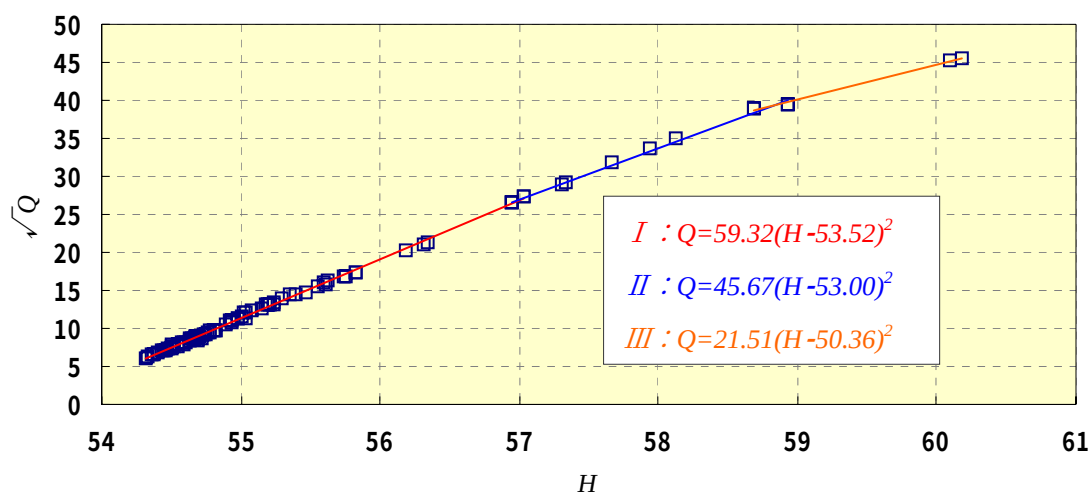


図4.3 水位～流量曲線図 納内地点 (平成12年)

表4.6 水位～流量曲線

曲線分類	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
適用期間	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24
適用水位(m)	54.32～57.24	57.25～58.78	58.79～59.02
<i>a</i>	59.32	45.67	21.51
<i>b</i>	-53.52	-53.00	-50.36
<i>b₀</i>	53.52	53.00	50.36
<i>b₁</i>	0.1298	0.1480	0.2156

表4.7に、予測計算に必要な実測雨量と実績水位を示す。また、流量および流出高は図4.3に示す水位～流量曲線を用いて算出した。なお、本節での計算例では実測雨量を予測雨量とみなしている。

表4.7に示すように、ピーク水位は65時間目に起こっており、その値は60.09mである。

表4.7 洪水データ一覧表

地点名 : 納内地点

洪水期間: 平成 13 年 9 月 9 日 1:00~15 日 24:00

時間	雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)	時間	雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)
1	0.00	55.05	0.14	138.86	43	2.82	56.49	0.53	523.26
2	0.00	55.03	0.14	135.26	44	3.99	56.61	0.57	566.39
3	0.00	55.01	0.13	131.70	45	1.63	56.78	0.64	630.43
4	0.00	55.01	0.13	131.70	46	2.20	56.95	0.71	697.89
5	0.00	55.00	0.13	129.93	47	3.63	57.16	0.80	785.97
6	0.00	54.98	0.13	126.45	48	6.28	57.44	0.91	900.32
7	0.29	54.97	0.13	124.72	49	3.93	57.74	1.04	1026.10
8	0.46	54.96	0.12	123.01	50	4.19	57.92	1.12	1105.51
9	2.42	54.95	0.12	121.30	51	3.59	58.10	1.20	1187.88
10	2.38	54.95	0.12	121.30	52	2.91	58.27	1.28	1268.39
11	3.00	54.93	0.12	117.93	53	4.37	58.45	1.37	1356.51
12	4.74	54.93	0.12	117.93	54	5.01	58.57	1.43	1416.91
13	1.36	54.93	0.12	117.93	55	5.99	58.70	1.50	1483.82
14	0.14	54.92	0.12	116.27	56	7.45	58.82	1.56	1539.50
15	1.70	54.93	0.12	117.93	57	4.73	58.96	1.61	1590.88
16	3.56	55.06	0.14	140.68	58	3.66	59.09	1.66	1639.34
17	4.90	55.43	0.22	216.41	59	3.73	59.22	1.71	1688.53
18	5.58	56.05	0.38	379.70	60	4.25	59.42	1.79	1765.62
19	3.67	56.78	0.64	630.43	61	5.23	59.61	1.86	1840.45
20	1.66	57.44	0.91	900.32	62	4.24	59.81	1.94	1920.90
21	0.24	57.68	1.01	1000.28	63	4.28	59.98	2.01	1990.63
22	0.03	57.79	1.06	1047.86	64	0.96	60.07	2.05	2028.05
23	0.00	57.89	1.10	1092.07	65	0.65	60.09	2.06	2036.41
24	0.00	57.96	1.14	1123.55	66	1.01	60.04	2.04	2015.54
25	0.00	57.98	1.15	1132.63	67	0.99	59.95	2.00	1978.23
26	0.00	57.89	1.10	1092.07	68	1.80	59.83	1.95	1929.04
27	0.05	57.72	1.03	1017.46	69	1.40	59.73	1.91	1888.51
28	0.31	57.44	0.91	900.32	70	1.57	59.58	1.85	1828.53
29	0.03	57.11	0.77	764.52	71	1.19	59.40	1.78	1757.83
30	0.00	57.04	0.74	735.00	72	0.99	59.19	1.70	1677.11
31	0.00	57.01	0.73	722.52	73	0.38	58.95	1.61	1587.18
32	0.00	56.97	0.71	706.06	74	0.13	58.73	1.52	1499.48
33	0.03	56.94	0.70	693.83	75	0.47	58.55	1.42	1406.75
34	0.18	56.91	0.69	681.71	76	0.36	58.39	1.34	1326.81
35	1.29	56.84	0.66	653.85	77	0.21	58.26	1.28	1263.58
36	0.87	56.70	0.61	599.87	78	0.22	58.13	1.22	1201.89
37	0.49	56.54	0.55	541.02	79	0.73	58.01	1.16	1146.32
38	1.40	56.40	0.50	492.02	80	0.47	57.89	1.10	1092.07
39	2.90	56.31	0.47	461.75	81	0.03	57.78	1.06	1043.49
40	5.21	56.27	0.45	448.61	82	0.29	57.68	1.01	1000.28
41	4.44	56.25	0.45	442.11	83	0.16	57.57	0.97	953.81
42	4.07	56.31	0.47	461.75	84	0.29	57.48	0.93	916.61

表4.7 洪水データ一覧表(つづき)

時間	雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)	時間	雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)
85	0.31	57.38	0.89	876.15	127	0.00	55.81	0.31	311.08
86	0.35	57.30	0.85	844.44	128	0.00	55.80	0.31	308.37
87	0.23	57.22	0.82	812.09	129	0.00	55.78	0.31	302.98
88	0.20	57.15	0.79	781.65	130	0.00	55.78	0.31	302.98
89	0.17	57.08	0.76	751.80	131	0.00	55.76	0.30	297.64
90	0.11	56.95	0.71	697.89	132	0.00	55.74	0.30	292.35
91	0.00	56.87	0.67	665.72	133	0.00	55.73	0.29	289.72
92	0.00	56.82	0.65	645.99	134	0.00	55.71	0.29	284.50
93	0.03	56.76	0.63	622.72	135	0.00	55.70	0.29	281.91
94	0.14	56.71	0.61	603.65	136	0.00	55.69	0.28	279.33
95	0.08	56.67	0.60	588.60	137	0.00	55.67	0.28	274.21
96	0.04	56.62	0.58	570.06	138	0.00	55.66	0.27	271.66
97	0.00	56.58	0.56	555.45	139	0.00	55.66	0.27	271.66
98	0.00	56.54	0.55	541.02	140	0.00	55.65	0.27	269.13
99	0.00	56.49	0.53	523.26	141	0.00	55.64	0.27	266.61
100	0.00	56.45	0.52	509.26	142	0.00	55.63	0.27	264.10
101	0.02	56.41	0.50	495.45	143	0.00	55.62	0.26	261.60
102	0.06	56.39	0.49	488.61	144	0.00	55.60	0.26	256.64
103	0.05	56.35	0.48	475.09	145	0.00	55.58	0.25	251.73
104	0.00	56.31	0.47	461.75	146	0.00	55.56	0.25	246.87
105	0.00	56.28	0.46	451.88	147	0.00	55.55	0.25	244.45
106	0.00	56.26	0.45	445.35	148	0.00	55.55	0.25	244.45
107	0.00	56.23	0.44	435.65	149	0.00	55.53	0.24	239.66
108	0.00	56.20	0.43	426.06	150	0.00	55.52	0.24	237.28
109	0.00	56.17	0.42	416.57	151	0.00	55.51	0.24	234.91
110	0.00	56.15	0.42	410.31	152	0.00	55.50	0.24	232.56
111	0.00	56.13	0.41	404.09	153	0.00	55.49	0.23	230.22
112	0.04	56.10	0.40	394.86	154	0.00	55.48	0.23	227.88
113	0.04	56.08	0.39	388.76	155	0.00	55.48	0.23	227.88
114	0.00	56.05	0.38	379.70	156	0.00	55.47	0.23	225.56
115	0.00	56.03	0.38	373.72	157	0.00	55.46	0.23	223.26
116	0.00	56.01	0.37	367.79	158	0.00	55.45	0.22	220.96
117	0.00	55.99	0.37	361.91	159	0.00	55.44	0.22	218.68
118	0.00	55.96	0.36	353.17	160	0.00	55.42	0.22	214.14
119	0.00	55.94	0.35	347.40	161	0.00	55.42	0.22	214.14
120	0.00	55.93	0.35	344.54	162	0.00	55.42	0.22	214.14
121	0.00	55.91	0.34	338.84	163	0.00	55.41	0.21	211.90
122	0.04	55.90	0.34	336.01	164	0.00	55.39	0.21	207.44
123	0.00	55.88	0.33	330.39	165	0.00	55.39	0.21	207.44
124	0.00	55.86	0.33	324.81	166	0.00	55.38	0.21	205.22
125	0.00	55.84	0.32	319.28	167	0.00	55.38	0.21	205.22
126	0.00	55.83	0.32	316.54	168	0.00	55.37	0.21	203.02

(3) 洪水予測シミュレーション

上記の初期条件、計算条件をもとに納内地点(流域面積 3558.0km²)において、表4.7 に示す**流域平均雨量**と**実績水位**から算出した1時間～3時間先予測までの予測シミュレーションの結果を図4.3に示す。逐次更新されるパラメータ (c_{11} , c_{12} , c_{13}) の値は、初期値を 100%として1時間ごとの変化率で図4.4に示す。モデル定数の時間変動率は小さく、10%以内に収まっている。また、1時間～3時間先予測までの予測水位と標準偏差およびパラメータの更新値を表4.9に示す。

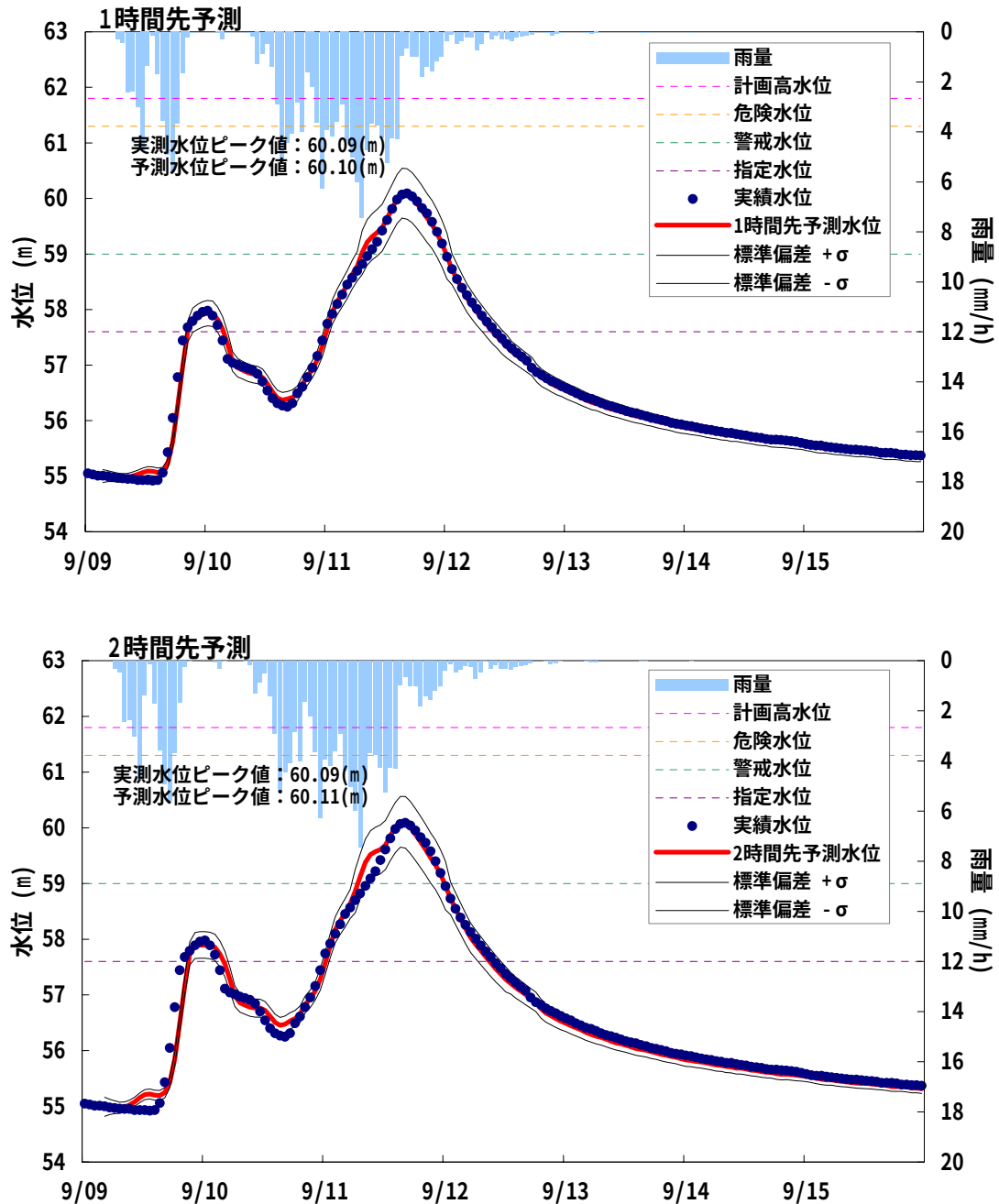
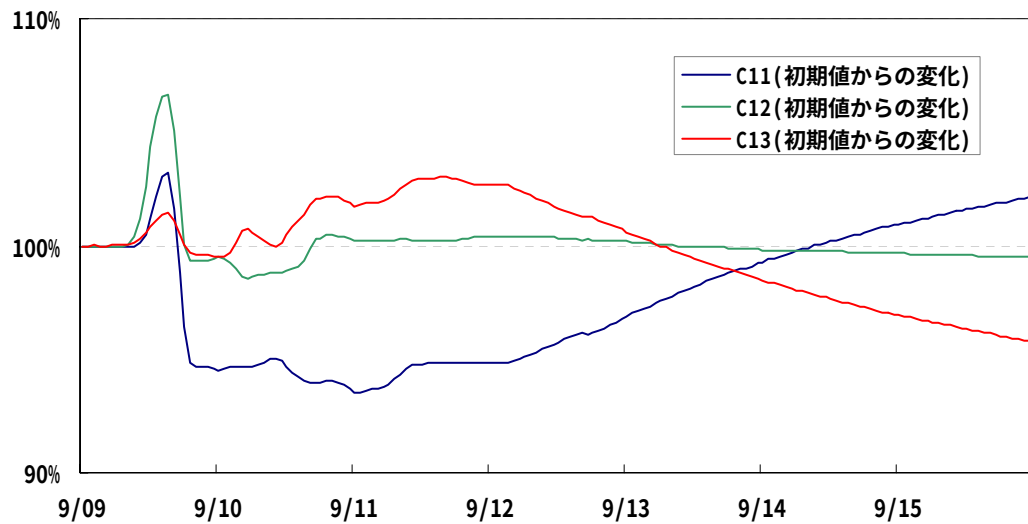
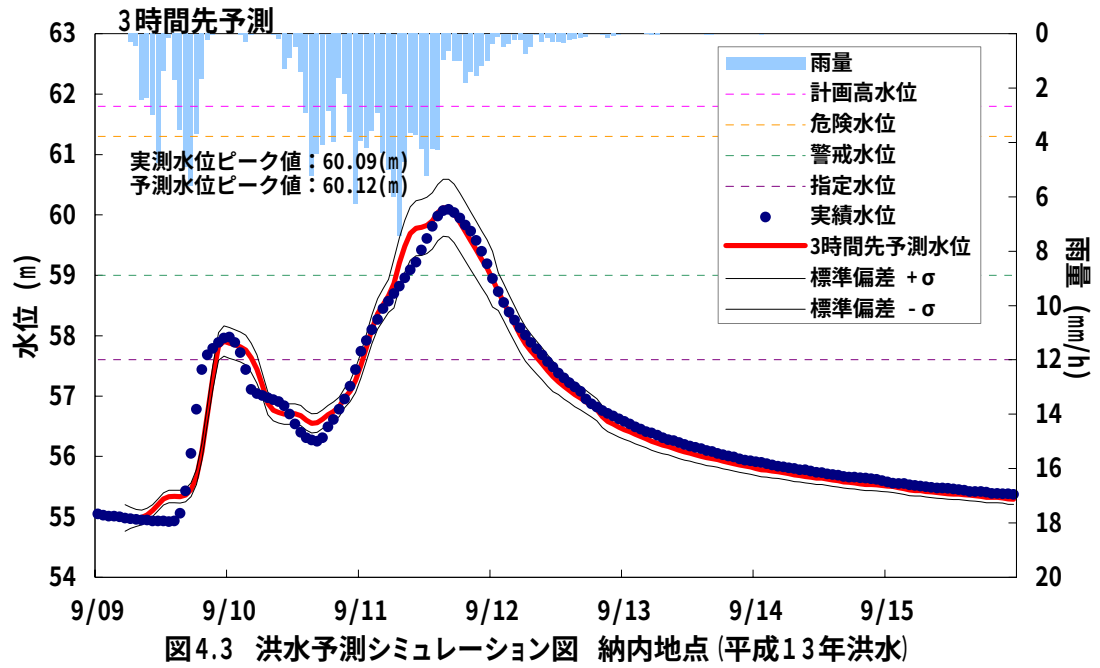


図4.3 洪水予測シミュレーション図 納内地点 (平成13年洪水)



洪水の再現性を評価する方法として、予測水位 H_{ci} (m) と実測水位 H_{oi} (m) の平均 2 乗誤差の平方根 (RMSE: Root Mean Squares Error) を用いた。表 4.8 に計算結果を示す。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_{ci} - H_{oi})^2} \quad (4.80)$$

表 4.8 1 段タンク型貯留関数法を用いた予測水位の比較

	1時間先予測	2時間先予測	3時間先予測
実測ピーク水位	60.09m	60.09m	60.09m
予測ピーク水位	60.10m	60.11m	60.12m
予測水位+標準偏差	60.54m	60.56m	60.59m
RMSE	0.09m	0.17m	0.23m

表4.9 洪水予測シミュレーション結果一覧表

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
1	55.05	55.05	55.04	0.22	0.32	0.41	6.3860	0.1530	1.7430
2	55.03	55.02	55.01	0.14	0.22	0.29	6.3860	0.1530	1.7430
3	55.00	54.99	54.98	0.12	0.17	0.22	6.3860	0.1530	1.7431
4	55.00	54.99	54.99	0.10	0.14	0.17	6.3860	0.1530	1.7430
5	54.99	54.98	54.98	0.09	0.12	0.14	6.3860	0.1530	1.7430
6	54.97	54.97	54.99	0.08	0.10	0.12	6.3858	0.1530	1.7432
7	54.97	54.99	55.04	0.08	0.09	0.11	6.3856	0.1530	1.7433
8	54.98	55.03	55.11	0.07	0.08	0.10	6.3853	0.1530	1.7436
9	55.00	55.08	55.20	0.07	0.08	0.10	6.3847	0.1531	1.7444
10	55.04	55.16	55.30	0.07	0.09	0.10	6.3857	0.1536	1.7459
11	55.07	55.21	55.34	0.08	0.09	0.10	6.3945	0.1548	1.7491
12	55.10	55.22	55.34	0.08	0.09	0.11	6.4174	0.1570	1.7531
13	55.09	55.20	55.33	0.08	0.09	0.11	6.4614	0.1597	1.7579
14	55.07	55.20	55.36	0.08	0.09	0.11	6.5211	0.1617	1.7629
15	55.08	55.25	55.45	0.08	0.09	0.11	6.5800	0.1630	1.7673
16	55.23	55.43	55.66	0.08	0.10	0.12	6.5911	0.1632	1.7680
17	55.62	55.86	56.08	0.09	0.11	0.14	6.4886	0.1608	1.7618
18	56.27	56.50	56.69	0.11	0.13	0.15	6.3109	0.1563	1.7520
19	56.98	57.17	57.30	0.14	0.15	0.20	6.1567	0.1531	1.7437
20	57.60	57.74	57.82	0.19	0.21	0.23	6.0573	0.1520	1.7373
21	57.81	57.89	57.91	0.22	0.23	0.25	6.0453	0.1520	1.7363
22	57.87	57.90	57.88	0.23	0.24	0.26	6.0481	0.1520	1.7367
23	57.91	57.90	57.85	0.23	0.24	0.25	6.0455	0.1520	1.7363
24	57.94	57.89	57.82	0.23	0.24	0.25	6.0404	0.1521	1.7352
25	57.93	57.85	57.76	0.23	0.24	0.25	6.0367	0.1522	1.7341
26	57.82	57.73	57.64	0.23	0.23	0.24	6.0388	0.1521	1.7350
27	57.65	57.55	57.44	0.22	0.23	0.24	6.0428	0.1519	1.7381
28	57.38	57.28	57.18	0.22	0.22	0.20	6.0465	0.1515	1.7448
29	57.07	56.97	56.88	0.18	0.18	0.19	6.0457	0.1509	1.7551
30	56.95	56.86	56.77	0.17	0.17	0.18	6.0449	0.1508	1.7563
31	56.91	56.82	56.73	0.16	0.17	0.17	6.0481	0.1509	1.7534
32	56.87	56.78	56.70	0.16	0.16	0.17	6.0528	0.1510	1.7503
33	56.84	56.76	56.70	0.16	0.16	0.17	6.0595	0.1511	1.7468
34	56.82	56.76	56.71	0.16	0.16	0.17	6.0671	0.1512	1.7434
35	56.78	56.72	56.68	0.15	0.16	0.17	6.0691	0.1512	1.7425
36	56.66	56.61	56.60	0.15	0.16	0.16	6.0602	0.1512	1.7460
37	56.52	56.50	56.55	0.15	0.15	0.16	6.0460	0.1513	1.7516
38	56.41	56.45	56.56	0.14	0.15	0.15	6.0314	0.1514	1.7574
39	56.37	56.48	56.62	0.14	0.14	0.15	6.0194	0.1516	1.7624
40	56.39	56.53	56.69	0.13	0.14	0.16	6.0090	0.1520	1.7675
41	56.42	56.57	56.74	0.14	0.15	0.16	6.0011	0.1528	1.7742
42	56.49	56.66	56.82	0.14	0.15	0.16	6.0014	0.1535	1.7789

表4.9 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
43	56.66	56.83	56.97	0.14	0.15	0.16	6.0011	0.1535	1.7787
44	56.78	56.93	57.08	0.15	0.16	0.17	6.0060	0.1537	1.7805
45	56.93	57.08	57.26	0.15	0.16	0.20	6.0065	0.1537	1.7807
46	57.09	57.28	57.51	0.16	0.19	0.21	6.0032	0.1536	1.7799
47	57.34	57.57	57.80	0.19	0.20	0.22	5.9933	0.1536	1.7779
48	57.66	57.89	58.10	0.21	0.22	0.24	5.9809	0.1535	1.7754
49	57.96	58.17	58.36	0.22	0.23	0.25	5.9707	0.1534	1.7735
50	58.14	58.33	58.51	0.23	0.25	0.27	5.9750	0.1534	1.7743
51	58.30	58.48	58.66	0.24	0.26	0.27	5.9800	0.1534	1.7753
52	58.45	58.64	58.87	0.25	0.26	0.41	5.9833	0.1534	1.7759
53	58.63	58.86	59.21	0.26	0.39	0.42	5.9835	0.1534	1.7759
54	58.78	59.13	59.48	0.26	0.40	0.43	5.9898	0.1534	1.7774
55	59.03	59.39	59.69	0.40	0.41	0.44	5.9974	0.1534	1.7793
56	59.21	59.52	59.78	0.41	0.43	0.46	6.0100	0.1534	1.7826
57	59.31	59.57	59.79	0.42	0.44	0.46	6.0254	0.1535	1.7867
58	59.39	59.61	59.83	0.42	0.44	0.47	6.0391	0.1535	1.7903
59	59.47	59.69	59.90	0.42	0.44	0.47	6.0490	0.1534	1.7931
60	59.65	59.86	60.04	0.43	0.44	0.47	6.0520	0.1534	1.7940
61	59.82	60.01	60.12	0.43	0.45	0.47	6.0538	0.1534	1.7946
62	60.00	60.11	60.11	0.44	0.46	0.48	6.0545	0.1534	1.7948
63	60.10	60.10	60.03	0.45	0.46	0.49	6.0551	0.1534	1.7951
64	60.08	60.01	59.88	0.45	0.47	0.49	6.0560	0.1534	1.7955
65	60.01	59.88	59.72	0.45	0.47	0.49	6.0557	0.1534	1.7953
66	59.91	59.75	59.57	0.45	0.46	0.48	6.0552	0.1534	1.7949
67	59.78	59.61	59.42	0.44	0.46	0.47	6.0546	0.1534	1.7940
68	59.65	59.46	59.27	0.44	0.45	0.47	6.0545	0.1535	1.7931
69	59.53	59.33	59.13	0.43	0.44	0.46	6.0551	0.1535	1.7914
70	59.38	59.17	58.94	0.43	0.44	0.46	6.0558	0.1536	1.7904
71	59.19	58.96	58.73	0.42	0.43	0.31	6.0564	0.1536	1.7899
72	58.96	58.73	58.56	0.41	0.29	0.31	6.0565	0.1536	1.7898
73	58.73	58.55	58.37	0.28	0.29	0.30	6.0560	0.1536	1.7901
74	58.55	58.37	58.20	0.27	0.28	0.30	6.0563	0.1536	1.7899
75	58.37	58.19	58.02	0.26	0.27	0.29	6.0562	0.1536	1.7900
76	58.21	58.03	57.86	0.25	0.27	0.28	6.0576	0.1536	1.7894
77	58.08	57.91	57.75	0.25	0.26	0.28	6.0624	0.1536	1.7875
78	57.95	57.79	57.64	0.24	0.25	0.27	6.0679	0.1536	1.7855
79	57.84	57.69	57.53	0.23	0.25	0.27	6.0742	0.1536	1.7834
80	57.73	57.57	57.42	0.23	0.24	0.26	6.0797	0.1536	1.7817
81	57.62	57.47	57.32	0.22	0.24	0.25	6.0860	0.1536	1.7798
82	57.52	57.38	57.24	0.22	0.23	0.22	6.0936	0.1536	1.7775
83	57.42	57.28	57.16	0.21	0.23	0.21	6.0997	0.1536	1.7758
84	57.33	57.21	57.10	0.21	0.19	0.21	6.1077	0.1536	1.7735

表4.9 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
85	57.24	57.13	57.03	0.18	0.19	0.20	6.1139	0.1535	1.7718
86	57.18	57.07	56.97	0.18	0.18	0.20	6.1217	0.1535	1.7698
87	57.11	57.00	56.90	0.17	0.18	0.19	6.1284	0.1535	1.7680
88	57.04	56.94	56.84	0.17	0.18	0.19	6.1350	0.1535	1.7662
89	56.97	56.87	56.77	0.17	0.17	0.18	6.1410	0.1534	1.7647
90	56.85	56.76	56.66	0.16	0.17	0.18	6.1376	0.1535	1.7655
91	56.77	56.67	56.58	0.16	0.16	0.17	6.1402	0.1534	1.7649
92	56.72	56.62	56.54	0.15	0.16	0.17	6.1482	0.1534	1.7628
93	56.66	56.57	56.49	0.15	0.16	0.17	6.1552	0.1534	1.7611
94	56.61	56.53	56.44	0.15	0.15	0.16	6.1630	0.1534	1.7592
95	56.58	56.49	56.41	0.15	0.15	0.16	6.1720	0.1533	1.7570
96	56.53	56.45	56.37	0.14	0.15	0.16	6.1791	0.1533	1.7553
97	56.49	56.41	56.33	0.14	0.15	0.15	6.1872	0.1533	1.7533
98	56.45	56.37	56.30	0.14	0.14	0.15	6.1951	0.1532	1.7514
99	56.41	56.33	56.25	0.14	0.14	0.15	6.2011	0.1532	1.7500
100	56.37	56.29	56.22	0.13	0.14	0.15	6.2082	0.1532	1.7483
101	56.33	56.26	56.19	0.13	0.14	0.14	6.2151	0.1532	1.7466
102	56.31	56.24	56.17	0.13	0.14	0.14	6.2248	0.1531	1.7444
103	56.27	56.20	56.14	0.13	0.13	0.14	6.2312	0.1531	1.7429
104	56.24	56.17	56.10	0.13	0.13	0.14	6.2368	0.1531	1.7415
105	56.21	56.14	56.07	0.13	0.13	0.14	6.2437	0.1531	1.7399
106	56.19	56.12	56.06	0.13	0.13	0.13	6.2520	0.1530	1.7379
107	56.16	56.09	56.03	0.12	0.13	0.13	6.2587	0.1530	1.7363
108	56.13	56.07	56.01	0.12	0.13	0.13	6.2650	0.1530	1.7349
109	56.10	56.04	55.98	0.12	0.12	0.13	6.2710	0.1530	1.7334
110	56.08	56.02	55.96	0.12	0.12	0.13	6.2782	0.1529	1.7317
111	56.06	56.00	55.95	0.12	0.12	0.13	6.2854	0.1529	1.7300
112	56.04	55.98	55.92	0.12	0.12	0.12	6.2908	0.1529	1.7287
113	56.02	55.96	55.90	0.12	0.12	0.12	6.2972	0.1529	1.7272
114	55.99	55.93	55.88	0.12	0.12	0.12	6.3020	0.1529	1.7260
115	55.97	55.91	55.86	0.11	0.12	0.12	6.3079	0.1528	1.7246
116	55.95	55.90	55.84	0.11	0.12	0.12	6.3138	0.1528	1.7232
117	55.93	55.88	55.83	0.11	0.12	0.12	6.3195	0.1528	1.7218
118	55.90	55.85	55.80	0.11	0.11	0.12	6.3236	0.1528	1.7208
119	55.88	55.83	55.78	0.11	0.11	0.12	6.3288	0.1528	1.7195
120	55.87	55.82	55.77	0.11	0.11	0.11	6.3354	0.1528	1.7179
121	55.85	55.81	55.76	0.11	0.11	0.11	6.3406	0.1527	1.7166
122	55.84	55.80	55.75	0.11	0.11	0.11	6.3468	0.1527	1.7151
123	55.83	55.78	55.73	0.11	0.11	0.11	6.3516	0.1527	1.7139
124	55.81	55.76	55.71	0.11	0.11	0.11	6.3562	0.1527	1.7128
125	55.79	55.74	55.70	0.11	0.11	0.11	6.3605	0.1527	1.7117
126	55.78	55.73	55.69	0.11	0.11	0.11	6.3661	0.1527	1.7103

表4.9 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
127	55.76	55.71	55.67	0.10	0.11	0.11	6.3704	0.1527	1.7092
128	55.75	55.70	55.66	0.10	0.11	0.11	6.3758	0.1526	1.7079
129	55.73	55.69	55.64	0.10	0.10	0.11	6.3798	0.1526	1.7069
130	55.73	55.69	55.64	0.10	0.10	0.11	6.3862	0.1526	1.7053
131	55.71	55.67	55.63	0.10	0.10	0.11	6.3902	0.1526	1.7042
132	55.69	55.65	55.61	0.10	0.10	0.11	6.3939	0.1526	1.7033
133	55.68	55.64	55.60	0.10	0.10	0.10	6.3986	0.1526	1.7021
134	55.66	55.62	55.58	0.10	0.10	0.10	6.4022	0.1526	1.7012
135	55.65	55.61	55.57	0.10	0.10	0.10	6.4068	0.1526	1.7000
136	55.64	55.60	55.56	0.10	0.10	0.10	6.4114	0.1525	1.6988
137	55.63	55.59	55.55	0.10	0.10	0.10	6.4147	0.1525	1.6980
138	55.62	55.58	55.54	0.10	0.10	0.10	6.4191	0.1525	1.6969
139	55.61	55.58	55.54	0.10	0.10	0.10	6.4247	0.1525	1.6954
140	55.61	55.57	55.53	0.10	0.10	0.10	6.4292	0.1525	1.6943
141	55.60	55.56	55.52	0.10	0.10	0.10	6.4334	0.1525	1.6932
142	55.59	55.55	55.51	0.10	0.10	0.10	6.4375	0.1525	1.6921
143	55.58	55.54	55.50	0.10	0.10	0.10	6.4416	0.1525	1.6911
144	55.56	55.52	55.49	0.10	0.10	0.10	6.4443	0.1525	1.6903
145	55.54	55.50	55.47	0.09	0.10	0.10	6.4468	0.1525	1.6897
146	55.52	55.48	55.45	0.09	0.09	0.10	6.4493	0.1525	1.6890
147	55.51	55.47	55.44	0.09	0.09	0.10	6.4529	0.1524	1.6881
148	55.51	55.47	55.44	0.09	0.09	0.09	6.4579	0.1524	1.6868
149	55.49	55.46	55.42	0.09	0.09	0.09	6.4605	0.1524	1.6861
150	55.48	55.45	55.41	0.09	0.09	0.09	6.4640	0.1524	1.6852
151	55.47	55.44	55.40	0.09	0.09	0.09	6.4675	0.1524	1.6843
152	55.46	55.43	55.39	0.09	0.09	0.09	6.4710	0.1524	1.6833
153	55.45	55.42	55.39	0.09	0.09	0.09	6.4744	0.1524	1.6824
154	55.44	55.41	55.38	0.09	0.09	0.09	6.4778	0.1524	1.6816
155	55.44	55.41	55.38	0.09	0.09	0.09	6.4823	0.1524	1.6804
156	55.43	55.40	55.37	0.09	0.09	0.09	6.4856	0.1524	1.6795
157	55.42	55.39	55.36	0.09	0.09	0.09	6.4888	0.1524	1.6786
158	55.41	55.38	55.35	0.09	0.09	0.09	6.4919	0.1524	1.6778
159	55.40	55.37	55.34	0.09	0.09	0.09	6.4950	0.1523	1.6770
160	55.39	55.36	55.32	0.09	0.09	0.09	6.4968	0.1523	1.6765
161	55.38	55.35	55.32	0.09	0.09	0.09	6.5008	0.1523	1.6755
162	55.38	55.35	55.32	0.09	0.09	0.09	6.5050	0.1523	1.6743
163	55.38	55.35	55.32	0.09	0.09	0.09	6.5081	0.1523	1.6735
164	55.36	55.33	55.30	0.09	0.09	0.09	6.5097	0.1523	1.6731
165	55.36	55.33	55.30	0.08	0.09	0.09	6.5135	0.1523	1.6720
166	55.35	55.32	55.29	0.08	0.09	0.09	6.5164	0.1523	1.6713
167	55.35	55.32	55.29	0.08	0.09	0.09	6.5202	0.1523	1.6702
168	55.34	55.31	55.28	0.08	0.08	0.09	6.5230	0.1523	1.6695

4.11 Fortran プログラム

1 段タンク型貯留関数法にカルマン・フィルター理論を適用して、3 時間先までの水位予測値($\text{dis}(i,j)$)と標準偏差($\text{sig}(i,j)$)およびモデルパラメータ更新値($x_{\text{prn}}(i)$)を計算する Fortran プログラムと入力変数名を以下に示す。また、プログラム中にはコメント文を加えたので、変数名と計算内容が容易に理解できるものとする。

(1) 主プログラムの機能

洪水予測を行うに際して、降雨量と水位の観測値が 1 時間ごとに得られるものとして、各地点での 3 時間先までの水位予測値(dis)と標準偏差(sig)およびモデルパラメータ更新値(x_{prn})を計算する。このとき、新しい流量観測値に基づいて、1 時間ごとに状態変量と誤差共分散が更新される。予測を行った後の状態変量と誤差共分散の更新・伝達は、予測の出発点にもどる。このプログラム例では、将来の降雨量予測を行っておらず、実測値を用いている点に注意すべきである。

(2) サブプログラムの機能

(a) Subroutine no2kal

式(4.29)の状態変量の伝達方程式により、 X_k を計算する。同時に、式(4.45)と式(4.46)の推定誤差分散・共分散伝達方程式により、 $P_{1,k}$ および $P_{2,k}$ を計算する。

(b) Subroutine no2upd

1 時間ごとに観測値が入手されるとして、式(4.68)と式(4.69)により状態変量とパラメータの更新値を計算する。このとき、同時に式(4.79)により状態変量とパラメータの推定誤差分散・共分散($P_{1,k}, P_{2,k}, U_k$)を更新する。

(c) Subroutine input

状態変量 X_k 及びその誤差分散・共分散の初期値 P_1 と P_2 を設定する。パラメータ c_{11}, c_{12}, c_{13} の初期値とその誤差分散・共分散 U_k を指定する。また、システム誤差分散・共分散 Q_k と観測誤差分散 R_k を入力する。

(d) Subroutine mul31,mul21

式(4.45)と式(4.46)に含まれる行列演算、 ABC^T と AB を出力する。

(e) Subroutine hqcurv

水位～流量曲線により、水位または流量を変換する。

(f) Subroutine hqcheck

適用下限水位と現在の値をチェックし、曲線分類ナンバーを出力する。

(3) 主な入力変数の内容**(a) Input Data**

pa_c1, pa_c2, pa_c3	それぞれ、パラメータ c_{11} , c_{12} , c_{13} 初期値
rah	平均雨量強度(既往洪水平均値)
ram	地下流出成分の減衰係数($\lambda=0.019$ に仮定)
suikei	水系名
kasen	河川名
chiten	地点名
title	洪水名
area	流域面積
hwl	計画高水位
xwl	危険水位
dwl	警戒水位
swl	指定水位
iy, im, id, ih	開始年、月、日、時
nr, nq	降雨データ数、水位データ数
r(i)	雨量データ
hrea(i)	水位データ
ax(i), bx(i), hx(i)	$H \sim Q$ 式における a , b , 適用下限水位

(b) Main Program

n	更新する状態変数数($n=2$)
np	c_{11} , c_{12} , c_{13} に関する配列数($np=3$)
iyoso	リードタイム(3時間先予測まで可能)
wp1	モデル定数 p_1 ($wp1=0.6$)
zp2	モデル定数 p_2 ($zp2=0.4678$)
nl	計算時間間隔(1時間)の分割数($nl=12$)
varq	式(4.43)の流量予測誤差分散
varh	式(4.44)の水位予測誤差分散
sig(i, j)	標準偏差
x(i)	状態変数 x_1 , x_2 ($i=1 \sim 2$)
p1(i, j)	X_1 に関する(2×2)の分散・共分散
p2(i, j)	X_2 に関する(2×3)の分散・共分散
z	式(4.57)の現在時刻の観測流出高

(c) Subroutine no2kal

x(i)	状態変数 c_{11} , c_{12} , c_{13} ($i=3 \sim 5$)
a21~a26	A_1 , A_2 の要素である式(4.15)の値
f(i)	Φ の要素である式(4.23), (4.24)の値
g(i)	Γ の要素である式(4.25)の値

d2	式(4.17)の d_2
(d) Subroutine no2upd	
ck	式(4.58)の c_k
rq	観測誤差分散 R_k
s	表4.2式(8)「カルマン・ゲイン」の右辺第2項
q(i,j)	システム誤差分散・共分散 Q_k
u(i,j)	パラメータの誤差分散・共分散 U_k
(e) Subroutine input	
alph1	システム誤差として x_1 と x_2 に乗ずる定数
alph2	初期値の誤差分散に乗ずる定数
alph3	モデルパラメータの誤差分散に乗ずる定数
alph4	観測誤差として c_k に乗ずる定数

(4) データ入力

6.386	0.153	1.743	2.138	0.019						
石狩川										
石狩川										
納内										
平成13年 9月11日洪水										
3558.00	61.80	61.30	59.00	57.60						
2001	9	9	1							
168	168									
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.46	2.42	2.38	
3.00	4.74	1.36	0.14	1.70	3.56	4.90	5.58	3.67	1.66	
0.24	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.31	0.03	0.00	
0.00	0.00	0.03	0.18	1.29	0.87	0.49	1.40	2.90	5.21	
4.44	4.07	2.82	3.99	1.63	2.20	3.63	6.28	3.93	4.19	
3.59	2.91	4.37	5.01	5.99	7.45	4.73	3.66	3.73	4.25	
5.23	4.24	4.28	0.96	0.65	1.01	0.99	1.80	1.40	1.57	
1.19	0.99	0.38	0.13	0.47	0.36	0.21	0.22	0.73	0.47	
0.03	0.29	0.16	0.29	0.31	0.35	0.23	0.20	0.17	0.11	
0.00	0.00	0.03	0.14	0.08	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.02	0.06	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.04	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
55.05	55.03	55.01	55.01	55.00	54.98	54.97	54.96	54.95	54.95	
54.93	54.93	54.93	54.92	54.93	55.06	55.43	56.05	56.78	57.44	
57.68	57.79	57.89	57.96	57.98	57.89	57.72	57.44	57.11	57.04	
57.01	56.97	56.94	56.91	56.84	56.70	56.54	56.40	56.31	56.27	
56.25	56.31	56.49	56.61	56.78	56.95	57.16	57.44	57.74	57.92	
58.10	58.27	58.45	58.57	58.70	58.82	58.96	59.09	59.22	59.42	
59.61	59.81	59.98	60.07	60.09	60.04	59.95	59.83	59.73	59.58	
59.40	59.19	58.95	58.73	58.55	58.39	58.26	58.13	58.01	57.89	
57.78	57.68	57.57	57.48	57.38	57.30	57.22	57.15	57.08	56.95	
56.87	56.82	56.76	56.71	56.67	56.62	56.58	56.54	56.49	56.45	
56.41	56.39	56.35	56.31	56.28	56.26	56.23	56.20	56.17	56.15	
56.13	56.10	56.08	56.05	56.03	56.01	55.99	55.96	55.94	55.93	
55.91	55.90	55.88	55.86	55.84	55.83	55.81	55.80	55.78	55.78	
55.76	55.74	55.73	55.71	55.70	55.69	55.67	55.66	55.66	55.65	
55.64	55.63	55.62	55.60	55.58	55.56	55.55	55.55	55.53	55.52	
55.51	55.50	55.49	55.48	55.48	55.47	55.46	55.45	55.44	55.42	
55.42	55.42	55.41	55.39	55.39	55.38	55.38	55.37			
3	H12年のH-Q式									
59.32	-53.52	54.32								
45.67	-53.00	57.25								
21.51	-50.36	58.79								

(5) 計算出力

地 点 名 : 納内

開始時間 : 2001 年 9 月 9 日 1 時

流域面積 : 3558.00

分割数(nl): 12

<---貯留指数---><---パラメータ初期値--->

p1	p2	c11	c12	c13
0.6000	0.4648	6.386	0.153	1.743

		<----- 予測値 ----->			<----- 標準偏差 ----->			<----- モデル定数 ----->			
N0	雨量	実測値	1 時間後	2 時間後	3 時間後	1 時間後	2 時間後	3 時間後	c11	c12	c13
1	0.00	55.05	55.049	55.047	55.044	0.2230	0.3215	0.4144	6.3860	0.1530	1.7430
2	0.00	55.03	55.025	55.018	55.011	0.1403	0.2222	0.2938	6.3860	0.1530	1.7430
3	0.00	55.01	55.002	54.992	54.982	0.1151	0.1706	0.2201	6.3860	0.1530	1.7431
4	0.00	55.01	55.000	54.991	54.985	0.0980	0.1367	0.1725	6.3860	0.1530	1.7430
5	0.00	55.00	54.991	54.984	54.983	0.0877	0.1154	0.1420	6.3860	0.1530	1.7430
6	0.00	54.98	54.974	54.972	54.990	0.0809	0.1009	0.1211	6.3858	0.1530	1.7432
7	0.29	54.97	54.968	54.986	55.035	0.0761	0.0908	0.1069	6.3856	0.1530	1.7433
8	0.46	54.96	54.979	55.028	55.106	0.0732	0.0848	0.0990	6.3853	0.1530	1.7436
9	2.42	54.95	55.003	55.081	55.201	0.0723	0.0828	0.0981	6.3847	0.1531	1.7444
10	2.38	54.95	55.036	55.156	55.299	0.0731	0.0850	0.1012	6.3857	0.1536	1.7459
11	3.00	54.93	55.068	55.209	55.336	0.0757	0.0891	0.1031	6.3945	0.1548	1.7491
12	4.74	54.93	55.095	55.221	55.338	0.0783	0.0910	0.1050	6.4174	0.1570	1.7531
13	1.36	54.93	55.086	55.201	55.333	0.0788	0.0909	0.1066	6.4614	0.1597	1.7579
14	0.14	54.92	55.065	55.195	55.360	0.0779	0.0905	0.1085	6.5211	0.1617	1.7629
15	1.70	54.93	55.083	55.245	55.449	0.0775	0.0923	0.1140	6.5800	0.1630	1.7673
16	3.56	55.06	55.225	55.429	55.659	0.0801	0.0987	0.1240	6.5911	0.1632	1.7680
17	4.90	55.43	55.620	55.855	56.082	0.0894	0.1111	0.1368	6.4886	0.1608	1.7618
18	5.58	56.05	56.268	56.499	56.689	0.1087	0.1298	0.1533	6.3109	0.1563	1.7520
19	3.67	56.78	56.979	57.165	57.303	0.1369	0.1548	0.2009	6.1567	0.1531	1.7437
20	1.66	57.44	57.603	57.744	57.823	0.1906	0.2078	0.2301	6.0573	0.1520	1.7373
21	0.24	57.68	57.810	57.887	57.912	0.2183	0.2328	0.2519	6.0453	0.1520	1.7363
22	0.03	57.79	57.870	57.895	57.880	0.2270	0.2396	0.2560	6.0481	0.1520	1.7367
23	0.00	57.89	57.912	57.896	57.849	0.2291	0.2397	0.2535	6.0455	0.1520	1.7363
24	0.00	57.96	57.937	57.888	57.815	0.2302	0.2388	0.2501	6.0404	0.1521	1.7352
25	0.00	57.98	57.925	57.851	57.762	0.2304	0.2374	0.2467	6.0367	0.1522	1.7341
26	0.00	57.89	57.822	57.734	57.635	0.2290	0.2347	0.2427	6.0388	0.1521	1.7350
27	0.05	57.72	57.649	57.551	57.444	0.2238	0.2289	0.2364	6.0428	0.1519	1.7381
28	0.31	57.44	57.379	57.275	57.176	0.2154	0.2205	0.1999	6.0465	0.1515	1.7448
29	0.03	57.11	57.065	56.973	56.880	0.1782	0.1828	0.1894	6.0457	0.1509	1.7551
30	0.00	57.04	56.952	56.859	56.767	0.1654	0.1705	0.1778	6.0449	0.1508	1.7563
31	0.00	57.01	56.909	56.816	56.727	0.1603	0.1656	0.1732	6.0481	0.1509	1.7534
32	0.00	56.97	56.868	56.778	56.702	0.1583	0.1636	0.1712	6.0528	0.1510	1.7503
33	0.03	56.94	56.839	56.762	56.702	0.1564	0.1617	0.1693	6.0595	0.1511	1.7468
34	0.18	56.91	56.822	56.761	56.706	0.1551	0.1603	0.1676	6.0671	0.1512	1.7434
35	1.29	56.84	56.776	56.721	56.677	0.1540	0.1588	0.1656	6.0691	0.1512	1.7425
36	0.87	56.70	56.658	56.614	56.600	0.1515	0.1559	0.1624	6.0602	0.1512	1.7460
37	0.49	56.54	56.517	56.504	56.548	0.1459	0.1504	0.1578	6.0460	0.1513	1.7516
38	1.40	56.40	56.407	56.452	56.556	0.1396	0.1450	0.1547	6.0314	0.1514	1.7574
39	2.90	56.31	56.372	56.476	56.617	0.1353	0.1428	0.1543	6.0194	0.1516	1.7624
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
168	0.00	55.37	55.337	55.308	55.279	0.0842	0.0849	0.0859	6.5230	0.1523	1.6695

(6) プログラムリスト

```

      program kalman1t
c-----
c      損失項を含む1段タンク型貯留関数法+カルマンフィルター
c      による洪水予測計算
c
c      kalman1t < data > out
c
c      s = k1*q**p1 + k2*d(q**p2)/dt
c      ds/dt = r - q - b + q0
c      b = k3 * q
c      q0 = qb * exp(-λ*t)
c
c      k11 = c11 * A**0.24
c      k12 = c12 * k1**2 *rr**(-0.2648)
c      k13 = c13 - 1
c      p1 = 0.6 (固定)
c      p2 = 0.4648 (固定)
c-----
c
c      character suikei*80, kasen*80, chiten*80, title*80
c
c      dimension x(7), x_prn(7)
c      dimension p1(5,5), p2(5,5), q(5,5), u(5,5)
c      dimension xex(5), plex(5,5), p2ex(5,5)
c      dimension qq(200), re(200), qbase(200), dis(24,200)
c      dimension r(200), qq0(200), hrea(200)
c      dimension xpr(24), sig(24,200)
c      dimension mdays(12)
c
c      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
c      common /st2/ h,h2,h3,h4
c      common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4
c      common /hqcv/ ax(5),bx(5),hx(5),qx(5)
c
c      data mdays /31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31/
c
c      n=2          ! 更新する状態変数 x1,x2
c      np=3         ! c1,c2,c3 に関する配列
c      iyoso=3      ! 予測時間幅
c      wp1=0.6      ! モデル定数 p1
c      zp2=0.4648   ! モデル定数 p2
c      wp2=1.0/zp2
c
c      nl=12        ! 計算時間間隔（1時間の分割数）
c      xn1=nl
c      h=1.0/xn1
c      h2=h**2
c      h3=h2*h
c      h4=h3*h
c
c
c      c*****
c      データ読み込み開始
c      c11,c12,c13,平均雨量強度,減衰係数 λ
c      read(5,'(5f8.0)') pa_c1,pa_c2,pa_c3,rah,ram
c

```

4. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）へのカルマン・フィルター理論の適用

```

c      水系名
      read(5,'(a80)') suikei
c
c      河川名
      read(5,'(a80)') kasen
c
c      地点名
      read(5,'(a80)') chiten
c
c      洪水名
      read(5,'(a80)') title
c
c      流域面積、HWL、危険水位、警戒水位、指定水位
      read(5,'(5f8.0)') area,hwl,xwl,dwl,swl
c
c      開始年、月、日、時
      read(5,'(4i5)') iy,im,id,ih
c
c      降雨、水位データ数
      read(5,'(2i5)') nr,nq
c
c      雨量
      read(5,'(10f8.0)') (r(i),i=1,nr)
c
c      水位
      read(5,'(10f8.0)') (hrea(i),i=1,nq)
      read(5,'(i5)') nhq      ! H-Q式数
      do j = 1, nhq
        read(5,'(3f8.0)') ax(j),bx(j),hx(j) ! a, b, Hkagen
        qx(j)=ax(j)*(hx(j)-bx(j))**2
      end do
      do j = nhq, 5
        ax(j)=ax(nhq)
        bx(j)=bx(nhq)
        hx(j)=hx(nhq)
        qx(j)=qx(nhq)
      end do
c      流量算定
      call hqcurv( 1, 1, nq, hrea, qq0 )
c      データ読み込み終了
c*****
c
c      wc1=pa_c1
c      wc2=pa_c2
c      wc3=pa_c3
c
c
c*****
c      ヘッダ部分出力開始
      write(6,'(''地 点 名 : '' ,a80)') chiten
      write(6,'(''開始時間 : '' ,i4,'年',i2,'月',
+      i2,'日',i2,'時')')iy,im,id,ih
      write(6,'(''流域面積 : '' ,f8.2)')area
      write(6,'(''分割数(n1): '' ,i2)')n1
      write(6,'(''<---貯留指数---><---パラメータ初期値--->'')')
      write(6,'(''      p1      p2      c11      c12      c13'')')
      write(6,'(2f8.4,3f8.3)') wp1, zp2, wc1, wc2, wc3
      write(6,807)
807  format(/19x,'<----- 予測値 ----->',

```

```

+          ' <----- 標準偏差 ----->',
+          ' <----- モデル定数 ----->')
write(6,808)
808  format(' N0 ',x,'雨量 実測値',3x,
&        '1 時間後',1x,'2 時間後',1x,'3 時間後',1x,2x,
&        '1 時間後',2x,'2 時間後',2x,'3 時間後',2x,
&        '      c11      c12      c13')
c ヘッダ部分出力終了
c*****
c
c
c      do i=1,nr
c        re(i)=r(i)
c      end do
c
c      do i=1,nq
c        qq(i)=3.6*qq0(i)/area ! qq(i) : 観測流出高
c      end do
c
c      ih=ih-1
c      if(mod(iy,4).eq.0) mdays(2)=29
c      if(iy.gt.1988) then
c        iy=iy-1988
c      else
c        iy=iy-1925
c      end if
c
c
c
c 初期値の設定
c  call input(x,p1,p2,q,u,qq(1))
c
c q0 の算出
c  do ll=2,nq+iyoso
c    ex1 = exp(-ram*(ll-1))
c    ex2 = exp(-ram*(ll-2))
c    ex0 = ( ex1 + ex2 ) * 0.5
c    qbase(ll) = qq(1) * ex0
c  end do
c
c
c
c*****
c 計算開始
c*****
c      do 3000 ll=2,nq+1 ! ll は現在時刻のループ
c
c        do i = 1, n+np
c          x_prn(i) = x(i)
c        end do
c
c        wk1 = x(3) * area**0.24
c        zk2 = x(4) * wk1**2.0 * rah**(-0.2648)
c        wk2 = 1.0 / zk2
c
c
c
c*****
c 予測計算開始
c*****
c      do lt=1,iyoso
c        rain=0.0

```

4. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）へのカルマン・フィルター理論の適用

```

        if(ll+lt.le.nr) rain=re(ll+lt-1)
        q_00 = qbase(ll+lt-1)
c
c      状態変量、誤差分散・共分散の伝達
        do k=1,nl
            call no2kal(q_00,x,p1,p2,u)
            if(x(1).lt.0.0) x(1)=0.0
        end do
c
c      予測流量算出
        xpr(lt)=area*x(1)**wp2/3.6
c
c      予測誤差分散算出
        call hqcurv( 2, 1, 1, hpr, xpr(lt) )
        dis(lt,ll)=hpr
        call hqcheck(hpr,no_hq)
        b11 = 1.0 / (ax(no_hq))**0.5
        varq = (area/3.6)**2.0*( (x(1)**(wp2-1.0)*wp2)**2.0*p1(1,1)
+          + p1(3,3) + 2.0*x(1)**(wp2-1.0)*wp2*p1(1,3) )
        varh = b11**2.0/4.0
+          *(area/3.6*(x(1)**wp2 + x(3)))**(-1.0) * varq
c
c      標準偏差算出
        sig(lt,ll) = varh**0.5
c
c      if( lt. eq. 1 ) then
c
c      状態変量 X1(x1,x2)の保存
        do i=1,n
            xex(i)=x(i)
        end do
c
c      X1 に関する (2*2)の分散・共分散の保存
        do i=1,n
            do j=1,n
                plex(i,j)=p1(i,j)
            end do
        end do
c
c      X2 に関する (2*4)の分散・共分散の保存
        do i=1,n
            do j=1,np
                p2ex(i,j)=p2(i,j)
            end do
        end do
c
c      end if
c
c      end do
c*****
c      予測計算終了
c*****
c
c
c
        z0=hrea(ll-1)
        ih=ih+1
        if(ih.gt.24) then
            ih=1
            id=id+1

```

```

        if(id.gt.mdays(im)) then
            id=1
            im=im+1
            if(im.gt.12) then
                im=1
                iy=iy+1
            end if
        end if
    end if
end if

c
c
c*****
c      計算結果出力
c*****
c      write(6,809) ll-1,r(ll-1),z0,
&          (dis(i,ll),i=1,3),
&          (sig(i,ll),i=1,3),
&          (x_prn(i),i=3,5)
809      format(i3,f6.2,f8.2,2x,3f8.3,x,3f9.4,2x,3f8.4)

c
c      状態変量 X1(x1,x2)を元に戻す
c      do i=1,n
c          x(i)=xex(i)
c      end do

c
c      X1 に関する (2*2)の分散・共分散を元に戻す
c      do i=1,n
c          do j=1,n
c              p1(i,j)=plex(i,j)
c          end do
c      end do

c
c      X2 に関する (2*4)の分散・共分散を元に戻す
c      do i=1,n
c          do j=1,np
c              p2(i,j)=p2ex(i,j)
c          end do
c      end do

c
c      P1 に乗算的ノイズを設定
c      do i=1,n
c          q(i,i)=(x(i)*alph1)**2 ! 観測誤差の分散 R (ck* α 4)^2
c          p1(i,i)=p1(i,i)+q(i,i)
c      end do

c
c      z=qq(ll) ! 現在時刻の観測流出高

c
c      カルマンフィルターによる状態変量、誤差分散・共分散の更新
c      call no2upd(x,p1,p2,u,z)

c
c      3000 continue
c*****
c      計算終了
c*****
c
c      stop
c      end
c

```

4. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）へのカルマン・フィルタ理論の適用

```

c
  subroutine no2kal(q_00,x,p1,p2,u)
c
  -----
c
    s = k1*q**p1 + k2*d(q**p2)/dt
c
    extrapolation equation of kalman filter
c
    linearization of nonlinear vector equation
c
    x(k+1) = phi*x(k) + gamma*d(k)
c
  -----
  dimension x(1),y(5),f(15),g(4),z(10)
  dimension p1(5,5),p2(5,5),p3(5,5),p4(5,5)
  dimension phi1(5,5),phi2(5,5)
  dimension u(5,5)
c
  common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
  common /st2/ h,h2,h3,h4
c
  np=3    ! c11,c12,c13 に関する配列
c
c.. 方程式の拡張部分を配列に割り当てる
  z(1) = x(3)    ! 状態変数 c11
  z(2) = x(4)    ! 状態変数 c12
  z(3) = x(5)    ! 状態変数 c13
c
  cc1=0.0
  cc2=0.0
  cc3=0.0
c
  y1=x(1)
  y2=x(2)
c
c.. 計算上の変数への割り当て
  if(y1.gt.0.0) then
    cc1=y1**(wp1*wp2-1.0) ! x1^(p1/p2-1)
    cc2=y1**(wp1*wp2-2.0) ! x1^(p1/p2-2)
    cc3=y1**(wp2-1.0)     ! x1^(1/p2-1)
  end if
  e1 = wk1*wk2*wp1*wp2 ! (k1/k2)*(p1/p2)
  e2 = wp1*wp2         ! p1/p2
c
c.. a21～a26 の計算
  a21 = -e1*(e2-1.0)*cc2*y2 - z(3)*wk2*wp2*cc3
  a22 = -e1*cc1
  a23 = (-wk2*e2*cc1*y2) * area**0.24
  a24 = wk2**2 * ( wk1*e2*cc1*y2 + z(3)*y1**wp2 - (rain+q_00) )
  +      * zk2/z(2)
  a25 = -wk2*y1**wp2
  a26 = wk2
c.. d2 の計算
  d2 = e1*cc1*y2*(e2-1.0) + z(3)*wk2*y1**wp2*(wp2-1.0)
  +      + 2.0*(rain+q_00)*wk2
c
c.. 計算上の変数への割り当て
  a1 = a21 + a22**2.0
  a2 = 2.0*a21*a22 + a22**3.0
  bt1 = h/2.0 + a22*h2/6.0 + a1*h3/24.0
  bt2 = 1.0 + a22*h/2.0 + a1*h2/6.0 + a2*h3/24.0
c
c.. Φ、Γ の要素の計算

```

```

f(1) = 1.0 + a21*h*bt1          !  $\phi_{11}$ 
f(2) = h*bt2                    !  $\phi_{12}$ 
f(3) = a21*f(2)                  !  $\phi_{21}$ 
f(4) = 1.0 + a22*h + a1*h2/2.0 + a2*h3/6.0
+      + (a21*a1+a22*a2)*h4/24.0 !  $\phi_{22}$ 
c
f(5) = a23*h*bt1                !  $\phi_{13}$ 
f(6) = a24*h*bt1                !  $\phi_{14}$ 
f(7) = a25*h*bt1                !  $\phi_{15}$ 
f(8) = a23*h*bt2                !  $\phi_{23}$ 
f(9) = a24*h*bt2                !  $\phi_{24}$ 
f(10) = a25*h*bt2               !  $\phi_{25}$ 
c
g(1) = h*bt1                    !  $\gamma_{12}$ 
g(2) = f(2)                     !  $\gamma_{22}$ 
c
 $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  の配列への割り当て ( i:行, j:列 )
c
..... phi1(i,j) and phi2(i,j) matrices .....
k=0
do i=1,n
  do j=1,n
    k=k+1
    phi1(i,j)=f(k)              !  $\Phi_1 \dots (2 \times 2)$  行列
  end do
end do
c
k=4
do i=1,n
  do j=1,np
    k=k+1
    phi2(i,j)=f(k)              !  $\Phi_2 \dots (2 \times 3)$  行列
  end do
end do
c
状態変量の伝達方程式 (状態変量 x1,x2 の更新)
c
..... extrapolation of state variables .....
do i=1,n
  y(i)=0.0
  do j=1,n
    y(i)=y(i)+phi1(i,j)*x(j)    !  $\phi_1$  の項
  end do
  do j=1,np
    y(i)=y(i)+phi2(i,j)*z(j)    !  $\phi_2$  の項
  end do
  y(i)=y(i)+g(i)*d2             !  $\gamma$  の項
end do
c
do i=1,n
  x(i)=y(i)                     ! 状態変量の更新
end do
c
誤差分散・共分散行列の伝達方程式
c
..... extrapolation equation .....
c
p1(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
行列演算:  $\Phi_1^T P_1 \Phi_1$  の計算
call mul31(2,2,2,2,phi1,p1,phi1,p3)
c

```

4. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）へのカルマン・フィルタ理論の適用

```

c      行列演算： $\Phi^1 P^2 \Phi^{2T}(p4)$  の計算
c      call mul31(2,2,2,3,phi1,p2,phi2,p4)
c
c      do i=1,n
c        do j=i,n
c          p3(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)
c        end do
c      end do
c
c      do i=1,n
c        do j=i,n
c          p3(i,j)=p3(i,j)+p4(j,i)
c        end do
c      end do
c
c      行列演算： $\Phi^2 U \Phi^{2T}(p4)$  の計算
c      call mul31(2,2,3,3,phi2,u,phi2,p4)
c
c      do i=1,n
c        do j=i,n
c          p1(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)      ! P1(更新値)(2*2)行列の計算
c          if(i.ne.j) p1(j,i)=p1(i,j)
c        end do
c      end do
c
c      p2(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
c      do i=1,5
c        do j=1,5
c          p3(i,j) = 0.0
c          p4(i,j) = 0.0
c        end do
c      end do
c
c      行列演算： $\Phi^1 P^2$  の計算 (2*3)行列
c      call mul21(2,3,2,phi1,p2,p3)
c
c      行列演算： $\Phi^2 U$  の計算 (2*3)行列
c      call mul21(2,3,3,phi2,u,p4)
c
c      do i=1,n
c        do j=1,np
c          p2(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)      ! P2(更新値)(2*3)行列の計算
c        end do
c      end do
c
c      return
c      end
c
c      subroutine no2upd(x,p1,p2,u,z)
c      -----
c      update equation of kalman filter
c      -----
c      dimension x(1),p1(5,5),p2(5,5),u(5,5)
c      dimension xm1(5),xm2(5),xkal(10)
c      dimension p3(5,5),zm1(5,5),zm2(5)
c
c      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area

```



```

common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4
c
np=3  ! c11,c12,c13 に関する配列
c
err=z-x(1)**wp2
c
ck=x(1)**wp2
c
観測誤差分散
rq=(ck*alph4)**2
c
hh1 = wp2 * x(1)**(wp2-1.0)      ! hh1 の計算
s = p1(1,1) * hh1**2 + rq        ! H PHT+R (カルマンゲインの
                                ! 右辺第2項)
c
カルマンゲイン K1, K2 の計算 (状態変数 x1,x2 に対するもの)
do i=1,n
  xm1(i) = p1(i,1) * hh1
  xkal(i) = xm1(i) / s
end do
c
カルマンゲイン K3~K5 の計算 (c11,c12,c13 に対するもの)
do i=1,np
  xm2(i) = p2(1,i) * hh1
  xkal(i+2) = xm2(i) / s
end do
c
状態変数 x1,x2,c11,c12,c13 の更新
do i=1,n+np
  x(i) = x(i) + xkal(i) * err
end do
c
マトリックス M1 の計算
zm1(1,1) = 1.0 - hh1 * xkal(1)
zm1(1,2) = 0.0
zm1(2,1) = -hh1 * xkal(2)
zm1(2,2) = 1.0
c
マトリックス M2 の計算
zm2(1) = -hh1 * xkal(3)
zm2(2) = -hh1 * xkal(4)
zm2(3) = -hh1 * xkal(5)
c
X1 に関する (2*2) の誤差分散・共分散 P1 の更新
call mul21(2,2,2,zm1,p1,p3)
do i=1,n
  do j=i,n
    p1(i,j) = p3(i,j)
    if( i. ne. j ) p1(j,i) = p1(i,j)
  end do
end do
c
パラメータの誤差分散・共分散 U の更新
do i=1,np
  do j=i,np
    u(i,j) = zm2(i) * p2(1,j) + u(i,j)
    if( i. ne. j ) u(j,i) = u(i,j)
  end do
end do

```

4. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）へのカルマン・フィルター理論の適用

```

c
c      X2 に関する (2*3) の誤差分散・共分散 P2 の更新
c      call mul21(2,3,2,zm1,p2,p3)
c      do i=1,n
c          do j=1,np
c              p2(i,j) = p3(i,j)
c          end do
c      end do

c
c      return
c      end

c
c
c      subroutine mul31(np,n2,n3,n4,a,b,c,d)
c      -----
c          multiplication of matrices a, b, and ct
c      -----
c      dimension a(5,5),b(5,5),c(5,5),d(5,5)
c
c      do 10 i=1,np
c      do 10 j=1,n2
c      d(i,j)=0.0
c      do 12 k=1,n3
c      do 12 l=1,n4
12 d(i,j)=d(i,j)+a(i,k)*b(k,l)*c(j,l)
10 continue
c      return
c      end

c
c
c      subroutine mul21(np,n2,n3,a,b,c)
c      -----
c          multiplication of matrices a and b
c      -----
c      dimension a(5,5),b(5,5),c(5,5)
c      do 10 i=1,np
c      do 10 j=1,n2
c      c(i,j)=0.0
c      do 12 k=1,n3
12 c(i,j)=c(i,j)+a(i,k)*b(k,j)
10 continue
c      return
c      end

c
c
c      subroutine input(x,p1,p2,q,u,qinit)
c      -----
c          input data for implementing kalman filter
c          初期値の設定
c      -----
c      dimension x(1),p1(5,5),p2(5,5)
c      dimension q(5,5),u(5,5)

c
c      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
c      common /st2/ h,h2,h3,h4
c      common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4

c
c      alph1 = 0.10    ! システム誤差として x1 と x2 に乗ずる定数
c      alph2 = 0.10    ! 初期値の誤差分散に乗ずる定数

```

```

alph3 = 0.20    ! モデルパラメータの誤差分散に乗ずる定数
alph4 = 0.10    ! 観測誤差として ck に乗ずる定数
c
np=3    ! c11,c12,c13 に関する配列
c
do i=1,n
  x(i)=0.0
end do
c
x(1)=qinit**zp2! 状態変数 x1 の初期値
x(2)=0.0          ! 状態変数 x2 の初期値
x(3)=wc1          ! 状態変数 x3 の初期値
x(4)=wc2          ! 状態変数 x4 の初期値
x(5)=wc3          ! 状態変数 x5 の初期値
c
do i=1,n
  do j=1,n
    p1(i,j) = 0.0    ! X2 に関する (2*4) の分散・共分散
  end do
end do
p1(1,1) = (alph2*x(1))**2.0 ! X1(x1) に関する (2*2) の分散・共分散
p1(2,2) = (alph2*x(1))**2.0 ! X1(x2)          "
c
do i=1,n
  do j=1,np
    p2(i,j) = 0.0    ! X2 に関する (2*3) の分散・共分散
  end do
end do
c
do i=1,n
  do j=1,n
    q(i,j) = 0.0    ! システム誤差 分散・共分散
  end do
end do
c
do i=1,np
  do j=1,np
    u(i,j) = 0.0    ! UとVのパラメータ誤差 分散・共分散
  end do
end do
c
u(1,1)=(wc1*alph3)**2
u(2,2)=(wc2*alph3)**2
u(3,3)=(wc3*alph3)**2
c
return
end
c
c
subroutine hqcurv(itype,ist,ied,h,q)
dimension h(1),q(1)
common/hqcv/ ax(5),bx(5),hx(5),qx(5)
go to (1,2),itype
c
1 do 10 j=ist,ied
  if(h(j).ge.0.0) then
    k=1
    if(h(j).ge.hx(2)) k=2
    if(h(j).ge.hx(3)) k=3

```

4. 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）へのカルマン・フィルタ理論の適用

```

        if(h(j).ge.hx(4)) k=4
        if(h(j).ge.hx(5)) k=5
        q(j)=ax(k)*(h(j)+bx(k))**2.0
    else
        q(j)=-999
    endif
10 continue
    return
c
2 do 20 j=ist,ied
    if(q(j).ge.0.0) then
        k=1
        if(q(j).ge.qx(2)) k=2
        if(q(j).ge.qx(3)) k=3
        if(q(j).ge.qx(4)) k=4
        if(q(j).ge.qx(5)) k=5
        h(j)=(q(j)/ax(k))**0.5-bx(k)
    else
        h(j)=-999
    endif
20 continue
    return
end
c
c
subroutine hqcheck(hdata,no_hq)
common/hqcv/ ax(5),bx(5),hx(5),qx(5)
c
    no_hq=1
    if(hdata.ge.hx(2)) no_hq=2
    if(hdata.ge.hx(3)) no_hq=3
    if(hdata.ge.hx(4)) no_hq=4
    if(hdata.ge.hx(5)) no_hq=5
c
    return
end

```

5. 河道効果による降雨遅れのモデル化

「1 段タンク型貯留関数法」による洪水予測モデルは、元来、小流域を対象とした単一流域モデルであり、大流域に適用する場合、貯留効果、流下時間が無視され、洪水逐次予測上の課題となる。

そこで、大流域における降雨の地域分布及び降雨の到達時間の違いを考慮するために、細分化された予測地点上流域に、各分割流域の降雨に遅れ時間を与えて、遅れ降雨を計算し合成する「Nash Model」を降雨モデルに採用し、洪水予測モデルへの適用を図った。

5.1 ナッシュモデル

ナッシュモデルは図5.1に示すように、同じ時定数を持つ2 段タンク型の貯留関数モデルである。図からわかるように1 段目のタンクに雨が入力され、2 段目のタンクで支川、本川の貯留効果を表わす。なお、ここで出力されるものは流出量ではなく降雨量である。すなわち、降雨量自体に河道貯留を考慮して補正しようとするのが本モデルの特徴である。これを数学的に表わすと次式のようなになる。

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{dt} = r - y_0, s_1 = \alpha y_0 \dots\dots & \text{1 段目タンク} \\ \frac{ds_2}{dt} = y_0 - y, s_2 = \alpha y \dots\dots & \text{2 段目タンク} \end{cases} \quad (5.1)$$

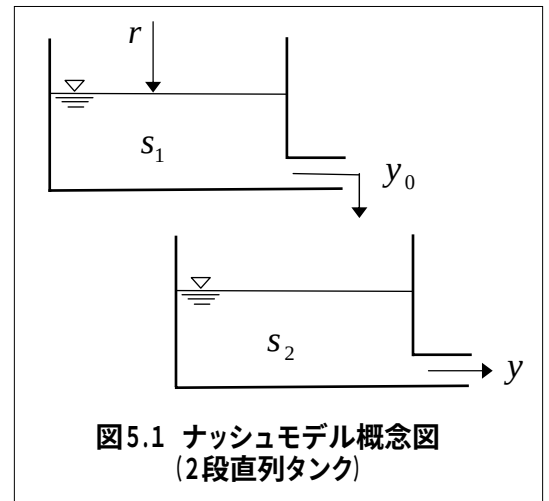
ここで、 s_1, s_2 は1 段目、2 段目タンクの貯留高 (mm)、 r は入力となる降雨量 (mm/h)、 y_0, y は1 段目、2 段目タンクから出力される補正降雨量 (mm/h)

式(5.1)から次式が得られる。

$$\alpha \frac{dy_0}{dt} + y_0 = r, \alpha \frac{dy}{dt} + y = y_0 \quad (5.2)$$

式(5.2)を y に関して解くと、式(5.3)となる。

$$\alpha^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy}{dt} + y = r \quad (5.3)$$



式(5.3)がナッシュモデルの基礎式であり、二価性貯留関数と同様な形式となっている。このモデルにおけるパラメータは α のみであり、時間の遅れを表わす。

5.2 ナッシュモデルの数値解法

α が既値であれば降雨量 r (mm/h) から補正降雨量 y (mm/h) を求めることができる。 y について解くために、次の変数変換を行う。

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (5.4)$$

式(5.4)を t で微分すると、

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2z_2}{\alpha} - \frac{z_1}{\alpha^2} + \frac{r}{\alpha^2} \end{cases} \quad (5.5)$$

式(5.5)を行列表示すると、

$$\frac{dZ}{dt} = AZ + B \quad (5.6)$$

ここで、

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\alpha^2} & -\frac{2}{\alpha} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r}{\alpha^2} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

式(5.6)を数値計算の便宜上、離散化方程式に変換する。

$$Z_{k+1} = \Phi_k Z_k + \Gamma_k B_k \quad (5.8)$$

Φ および Γ は次の級数和で求める。実用上問題のない第5項まで展開すると、

$$\begin{aligned} \Phi_k &= e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \frac{1}{24}(AT)^4 \\ &= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= [e^{AT} - I]A^{-1} \\ &= T \left[I + \frac{1}{2}(AT) + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 \right] \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

ここで、 I : (2×2) の単位行列、 T : 計算時間間隔、 A : 式(5.7)の行列。

式(5.7)より A^2 と A^3 および A^4 の演算を行い、それぞれ式(5.9)、式(5.10)に代入して求めた Φ_k と Γ_k の要素を以下に示す。なお、ベクトル B_k の最初の要素が 0 であることから、 Γ_k の要素は γ_{12} と γ_{22} についてのみ求める。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + \frac{1}{2}a_{21}T^2 + \frac{1}{6}a_{21}a_{22}T^3 + \frac{1}{24}a_{21}a_9T^4 \\ \phi_{12} = T + \frac{1}{2}a_{22}T^2 + \frac{1}{6}a_9T^3 + \frac{1}{24}a_{10}T^4 \\ \phi_{21} = a_{21}T + \frac{1}{2}a_{21}a_{22}T^2 + \frac{1}{6}a_{21}a_9T^3 + \frac{1}{24}a_{21}a_{10}T^4 = a_{21}\phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_{22}T + \frac{1}{2}a_9T^2 + \frac{1}{6}a_{10}T^3 + \frac{1}{24}(a_{21}a_9 + a_{22}a_{10})T^4 \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \gamma_{12} = T \left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_{22}T^2 + \frac{1}{24}a_9T^3 \right) \\ \gamma_{22} = T \left(1 + \frac{1}{2}a_{22}T + \frac{1}{6}a_9T^2 + \frac{1}{24}a_{10}T^3 \right) = \phi_{12} \end{cases} \quad (5.12)$$

ここで、

$$a_9 = a_{21} + a_{22}^2, \quad a_{10} = 2a_{21}a_{22} + a_{22}^3 \quad (5.13)$$

式(5.8)に式(5.7)、(5.9)および(5.10)を代入して整理すると、

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} \left(\frac{r}{\alpha^2} \right)_k \quad (5.14)$$

式(5.14)の行列を展開すると、

$$\begin{cases} (z_1)_{k+1} = \phi_{11}(z_1)_k + \phi_{12}(z_2)_k + \gamma_{12} \left(\frac{r}{\alpha^2} \right)_k \\ (z_2)_{k+1} = \phi_{21}(z_1)_k + \phi_{22}(z_2)_k + \gamma_{22} \left(\frac{r}{\alpha^2} \right)_k \end{cases} \quad (5.15)$$

5. 河道効果による降雨遅れのモデル化

式(5.15)により任意のタイムステップ $(k+1)$ における変数 $(z_1)_{k+1}$ と $(z_2)_{k+1}$ の値を、 k における変数 $(z_1)_k$ と $(z_2)_k$ を使って算出する。

補正降雨量 y は式(5.4)より

$$y = z_1 \quad (5.16)$$

となる。

5.3 補正雨量（到達時間考慮雨量）の算出

各分割流域の補正雨量（到達時間考慮雨量）は、流域平均雨量を与え、「5.2 ナッシュモデルの数値解法」により算出する。

さらに、上記で求めた各分割流域の補正雨量を式(5.17)を用いて加重平均し、予測地点の補正雨量（到達時間考慮雨量） r^* を求める。

$$r^* = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N A_i y_i \quad (5.17)$$

ここで、 A : 全流域面積 (km^2)、 A_i : i 流域の流域面積 (km^2)、 y_i : i 流域の補正雨量 (mm/h)、 N : 分割流域数

式(5.17)で各分割流域の補正降雨量を算出するためには、各分割流域の降雨量（流域平均雨量）並びに降雨遅れを表す時定数 α の値を決定する必要がある。

各分割流域の降雨量はティーセン法を用いて次式で算出する。

$$\bar{R} = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \cdots + w_n R_n \quad (5.18)$$

ここで、 $\bar{R}$: 流域平均雨量 (mm/h)、 w : ティーセン係数

5.4 ナッシュモデルの適用例

一例として、石狩川流域（図5.2）を対象に、平成13年9月11日洪水においてナッシュモデルを用いて石狩大橋地点での合成雨量を算出した。なお、時間遅れを表す α は表5.1の石狩大橋地点の値を用いる。

図5.3は、表5.2に示している各分割流域の流域平均雨量をもとに式(5.8)を用いて算出した河道効果を考慮した雨量を示している。また、その数値計算結果を表5.3に示す。石狩川上流や雨竜川などの上流部の雨量は、ピークがつぶれ河道遅れを再現しており、各分割流域の流域平均雨量が補正されていることがわかる。

図5.4は、図5.3で求めた分割流域ごとの降雨から流域面積の加重平均（式(5.17)）により石狩大橋地点の合成雨量を算出した結果を示している。また、その一覧表を表5.4に示す。



図5.2 石狩川流域の概要

表5.1 石狩川分割流域の基準点でのパラメータ(α)と流域面積

分割流域	地点	納内	橋本町	奈井江大橋	月形	岩見沢大橋	石狩大橋	篠路
I 石狩川上流	0	3,558.0km ²	5	3,558.0km ²	6	3,558.0km ²	9	9
II 雨竜川			3	4	6	7	8	8
			1,660.7	1,660.7	1,660.7	1,660.7	1,660.7	1,660.7
III 空知川				3	4	5	5	5
				2,531.1	2,531.1	2,531.1	2,531.1	2,531.1
IV 幾春別川						3	3	3
						324.7	324.7	324.7
V 夕張川						2	2	2
						1,115.7	1,115.7	1,115.7
VI 千歳川						2	2	2
						1,141.8	1,141.8	1,141.8
VII 豊平川								1
								650.6
VIII 石狩川残(1)			1	1	2	3	3	3
			491.9	1,193.4	1,193.4	1,193.4	1,193.4	1,193.4
IX 石狩川残(2)					1	1	1	2
					362.3	461.9	1,171.3	1,171.3
X 石狩川残(3)								1
								805.7

上段：パラメータ α
下段：流域面積

表5.2 各分割流域の流域平均雨量

地点名 : 石狩大橋地点の各分割流域

洪水期間 : 平成 13 年 9 月 9 日 1:00~15 日 24:00

時間	石狩川上流	雨竜川	空知川	幾春別川	夕張川	千歳川	石狩川残(1)	石狩川残(2)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.16	0.03
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.10	0.00	0.08	0.00	0.00	0.00
7	0.29	0.06	0.00	0.40	0.79	0.17	0.01	0.27
8	0.46	0.00	1.00	0.50	0.70	0.14	0.11	0.28
9	2.42	0.00	1.75	0.15	0.63	0.08	0.00	0.00
10	2.38	0.00	2.24	0.21	2.51	0.35	0.00	0.00
11	3.00	0.00	2.16	1.12	0.37	0.00	0.00	0.00
12	4.74	0.52	0.52	0.15	1.15	0.17	0.22	0.00
13	1.36	4.42	0.23	1.21	1.15	0.60	0.34	0.63
14	0.14	10.68	0.28	0.76	0.46	0.12	6.78	0.45
15	1.70	9.61	0.52	0.40	0.66	0.59	14.37	4.18
16	3.56	5.86	0.57	0.00	0.38	0.74	10.42	4.94
17	4.90	2.64	1.60	0.27	0.42	0.69	10.27	2.14
18	5.58	2.04	0.44	0.00	0.00	0.00	7.17	2.13
19	3.67	0.95	0.35	0.00	0.00	0.17	5.09	1.06
20	1.66	0.36	0.02	0.00	0.00	0.48	1.22	0.20
21	0.24	0.80	0.00	0.00	0.00	0.26	0.11	0.15
22	0.03	1.16	0.02	0.00	0.01	0.19	0.06	0.00
23	0.00	0.55	0.00	0.00	0.00	0.20	0.26	0.00
24	0.00	0.22	0.00	0.00	0.00	0.27	0.26	0.03
25	0.00	0.15	0.09	0.00	0.00	0.26	0.71	0.00
26	0.00	1.99	0.00	0.00	0.26	0.21	0.41	0.00
27	0.05	4.91	0.00	0.00	0.51	0.40	1.00	0.18
28	0.31	2.99	0.02	0.14	0.06	0.47	1.97	0.37
29	0.03	1.22	0.05	0.51	1.01	0.58	1.25	0.35
30	0.00	1.45	0.00	0.05	0.37	0.74	1.06	0.15
31	0.00	1.38	0.02	0.14	0.35	0.38	0.78	0.56
32	0.00	2.12	0.22	0.24	0.31	0.26	0.65	0.56
33	0.03	5.33	0.10	0.48	0.55	0.07	1.71	1.29
34	0.18	5.08	0.05	0.20	0.07	0.46	1.06	0.00
35	1.29	2.05	0.14	0.00	0.27	0.44	3.23	0.00
36	0.87	4.40	0.24	0.00	0.15	0.60	5.35	1.21
37	0.49	8.33	0.22	1.29	1.32	1.61	5.48	4.43
38	1.40	3.92	0.52	4.44	3.98	2.71	5.22	9.27
39	2.90	3.42	2.19	2.87	4.98	1.63	4.06	2.44
40	5.21	1.70	3.01	0.52	2.92	1.74	1.06	0.51
41	4.44	2.25	3.33	1.15	0.69	1.83	1.08	0.29
42	4.07	5.08	1.86	0.72	0.58	1.08	4.94	1.93

表5.2 各分割流域の流域平均雨量(つづき)

時間	石狩川上流	雨竜川	空知川	幾春別川	夕張川	千歳川	石狩川残(1)	石狩川残(2)
43	2.82	5.45	2.21	0.80	0.77	0.66	6.01	3.82
44	3.99	4.97	2.22	1.07	1.34	1.39	5.04	3.23
45	1.63	3.62	1.81	3.72	2.74	2.97	3.75	2.48
46	2.20	2.40	4.46	7.45	3.73	4.47	3.02	2.91
47	3.63	3.54	5.99	4.45	4.73	2.26	5.32	2.50
48	6.28	4.02	7.09	3.34	1.22	1.34	3.31	1.48
49	3.93	3.43	3.97	2.96	1.91	1.99	3.40	3.54
50	4.19	1.89	7.56	3.94	3.66	3.36	2.71	2.51
51	3.59	2.04	5.11	4.86	4.25	7.47	3.42	3.64
52	2.91	1.98	6.72	6.11	8.56	8.74	3.35	4.06
53	4.37	2.43	7.33	8.27	9.09	8.46	3.91	4.74
54	5.01	3.38	7.60	9.16	10.43	10.38	5.12	6.75
55	5.99	4.58	10.06	9.53	13.32	9.27	6.71	7.54
56	7.45	4.97	10.24	7.43	9.39	7.91	6.13	6.20
57	4.73	3.32	6.07	7.41	8.62	9.12	4.54	6.06
58	3.66	3.26	5.72	6.56	7.46	8.45	5.28	6.52
59	3.73	3.20	5.53	5.27	7.12	8.28	5.21	6.11
60	4.25	2.59	6.25	5.68	6.97	9.06	4.69	6.37
61	5.23	2.13	6.79	5.65	7.25	9.78	2.59	4.75
62	4.24	1.30	7.07	6.59	8.02	8.73	3.62	4.78
63	4.28	0.60	5.07	5.59	5.28	5.42	1.98	3.29
64	0.96	0.22	3.44	3.49	4.69	5.44	0.78	1.07
65	0.65	0.31	2.65	1.05	2.12	3.29	1.12	0.66
66	1.01	0.37	2.16	0.81	1.28	1.74	0.84	0.58
67	0.99	0.18	1.41	1.13	0.72	1.81	0.51	1.24
68	1.80	0.07	2.31	2.52	1.96	2.39	0.75	0.85
69	1.40	0.11	2.47	1.73	2.57	3.29	0.49	0.98
70	1.57	0.00	3.25	1.73	5.14	5.16	0.01	0.30
71	1.19	0.00	4.02	2.44	4.22	4.19	0.46	1.50
72	0.99	0.14	2.39	0.90	1.83	1.87	0.48	0.64
73	0.38	0.12	0.38	0.14	0.88	1.76	0.58	0.28
74	0.13	0.00	0.41	0.43	0.28	1.08	0.24	0.72
75	0.47	0.07	0.40	0.11	0.40	0.53	0.39	0.19
76	0.36	0.46	0.10	0.55	0.50	1.05	0.86	0.28
77	0.21	0.32	0.43	0.43	1.13	1.69	0.62	0.35
78	0.22	0.00	0.50	0.84	0.35	0.89	0.38	1.19
79	0.73	0.36	0.30	0.11	0.06	0.63	0.46	0.15
80	0.47	0.16	0.27	0.00	0.00	0.68	0.18	0.00
81	0.03	0.32	0.10	0.00	0.18	0.30	0.10	0.44
82	0.29	0.41	0.20	0.05	0.16	0.10	0.29	0.00
83	0.16	0.30	0.24	0.00	0.00	0.08	0.00	0.00
84	0.29	0.17	0.27	0.41	0.12	0.08	0.18	0.21

表5.2 各分割流域の流域平均雨量(つづき)

時間	石狩川上流	雨竜川	空知川	幾春別川	夕張川	千歳川	石狩川残(1)	石狩川残(2)
85	0.31	0.07	0.39	0.11	0.00	0.13	0.10	0.01
86	0.35	0.02	0.12	0.00	0.30	0.00	0.11	0.00
87	0.23	0.00	0.25	0.00	0.26	0.00	0.27	0.47
88	0.20	0.06	0.90	0.93	0.92	0.21	0.25	1.21
89	0.17	0.00	0.42	0.36	0.82	0.27	0.00	0.00
90	0.11	0.00	0.25	0.11	0.10	0.10	0.00	0.00
91	0.00	0.00	0.09	0.00	0.01	0.10	0.00	0.19
92	0.00	0.09	0.06	0.07	0.55	0.14	0.13	0.00
93	0.03	0.00	0.00	0.00	0.36	0.02	0.00	0.00
94	0.14	0.02	0.15	0.00	0.00	0.08	0.21	0.01
95	0.08	0.00	0.05	0.11	0.30	0.00	0.00	0.00
96	0.04	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
97	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.22
98	0.00	0.00	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
99	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
100	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
101	0.02	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
102	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
103	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
104	0.00	0.00	0.00	0.00	0.60	0.00	0.00	0.00
105	0.00	0.00	0.11	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00
106	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
107	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
108	0.00	0.00	0.06	0.00	0.01	0.23	0.00	0.00
109	0.00	0.09	0.07	0.15	0.30	0.00	0.00	0.00
110	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
111	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.02	0.00	0.00
112	0.04	0.00	0.00	0.00	0.26	0.00	0.00	0.00
113	0.04	0.00	0.04	0.51	0.00	0.00	0.01	0.20
114	0.00	0.00	0.00	0.35	0.00	0.00	0.00	0.00
115	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.20
116	0.00	0.00	0.09	0.00	0.26	0.00	0.00	0.00
117	0.00	0.00	0.00	0.00	0.40	0.02	0.00	0.00
118	0.00	0.00	0.00	0.05	0.07	0.00	0.00	0.00
119	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
120	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
121	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
122	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
123	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
124	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
125	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
126	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

表5.2 各分割流域の流域平均雨量(つづき)

時間	石狩川上流	雨竜川	空知川	幾春別川	夕張川	千歳川	石狩川残(1)	石狩川残(2)
127	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
128	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
129	0.00	0.00	0.05	0.11	0.00	0.00	0.00	0.00
130	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
131	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
132	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
133	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
134	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.10	0.00	0.00
135	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
136	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
137	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
138	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
139	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.15
140	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
141	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
142	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
143	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
144	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
145	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
146	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
147	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
148	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
149	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
150	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
151	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00
152	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
153	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
154	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
155	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
156	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.02	0.00	0.00
157	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
158	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
159	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
160	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
161	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
162	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.16	0.00
163	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
164	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
165	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
166	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
167	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
168	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

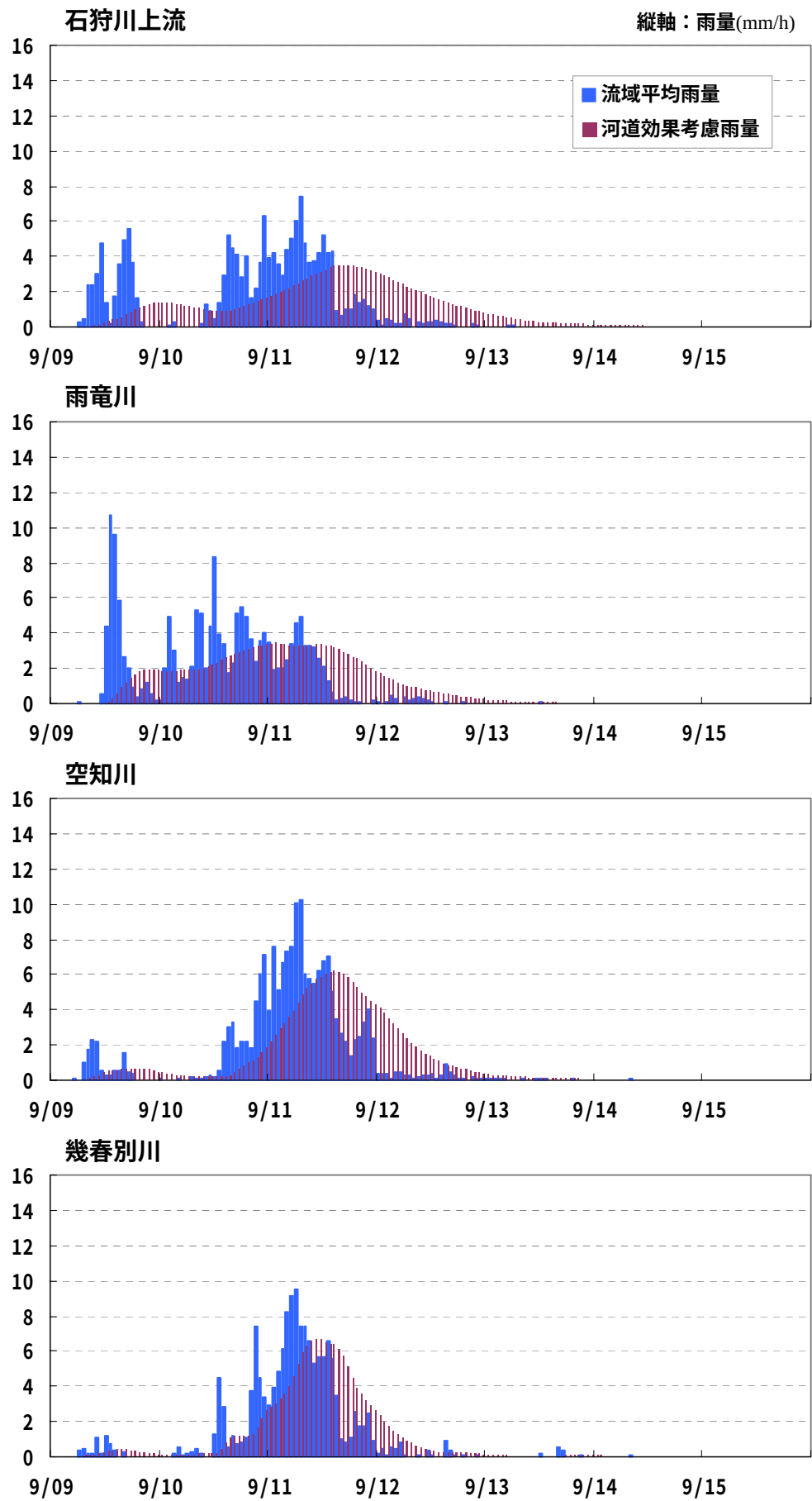


図5.3 各分割流域の流域平均雨量と河道効果を考慮した雨量の比較図

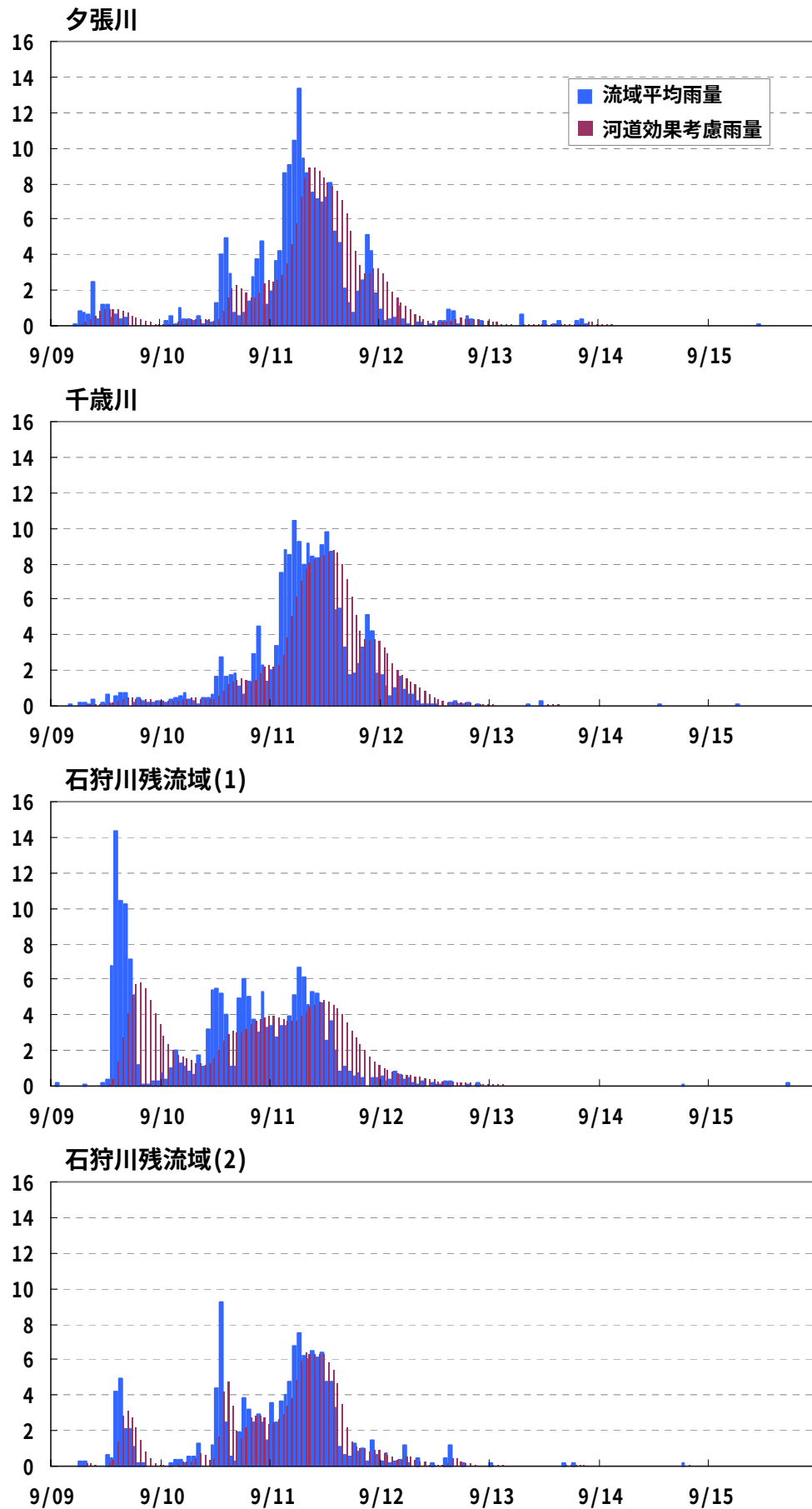


図5.3 各分割流域の流域平均雨量と河道効果を考慮した雨量の比較図(つづき)

表 5.3 河道効果を考慮した雨量

時間	石狩川上流	雨竜川	空知川	幾春別川	夕張川	千歳川	石狩川残(1)	石狩川残(2)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01
4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01
5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.00
7	0.00	0.00	0.00	0.02	0.09	0.04	0.02	0.07
8	0.01	0.00	0.02	0.06	0.21	0.06	0.02	0.16
9	0.03	0.00	0.08	0.10	0.33	0.08	0.02	0.15
10	0.07	0.00	0.18	0.13	0.59	0.11	0.02	0.09
11	0.13	0.00	0.32	0.19	0.79	0.12	0.02	0.04
12	0.23	0.01	0.44	0.26	0.87	0.13	0.03	0.02
13	0.33	0.06	0.52	0.33	0.94	0.17	0.05	0.18
14	0.42	0.23	0.56	0.41	0.94	0.21	0.38	0.33
15	0.50	0.53	0.59	0.47	0.88	0.26	1.40	1.38
16	0.58	0.89	0.60	0.48	0.80	0.34	2.78	2.85
17	0.69	1.21	0.63	0.45	0.71	0.42	4.10	3.14
18	0.83	1.48	0.66	0.41	0.59	0.44	5.14	2.78
19	0.98	1.68	0.67	0.36	0.46	0.39	5.74	2.19
20	1.12	1.81	0.66	0.30	0.34	0.36	5.83	1.43
21	1.23	1.88	0.64	0.25	0.24	0.35	5.45	0.82
22	1.30	1.92	0.60	0.20	0.17	0.33	4.82	0.43
23	1.35	1.94	0.55	0.16	0.12	0.30	4.13	0.21
24	1.37	1.92	0.50	0.13	0.08	0.28	3.46	0.10
25	1.38	1.87	0.46	0.10	0.05	0.27	2.88	0.05
26	1.36	1.83	0.41	0.08	0.06	0.26	2.40	0.02
27	1.34	1.82	0.37	0.06	0.12	0.27	2.01	0.06
28	1.30	1.85	0.32	0.05	0.16	0.30	1.78	0.16
29	1.26	1.88	0.29	0.07	0.24	0.34	1.64	0.25
30	1.22	1.89	0.25	0.10	0.33	0.41	1.53	0.25
31	1.17	1.89	0.22	0.11	0.37	0.46	1.42	0.32
32	1.12	1.89	0.20	0.12	0.38	0.45	1.31	0.42
33	1.06	1.93	0.18	0.15	0.39	0.40	1.25	0.69
34	1.01	2.01	0.17	0.18	0.38	0.37	1.22	0.62
35	0.96	2.10	0.16	0.19	0.34	0.37	1.29	0.36
36	0.93	2.18	0.15	0.17	0.31	0.39	1.58	0.50
37	0.90	2.32	0.15	0.21	0.38	0.53	2.04	1.66
38	0.87	2.50	0.15	0.46	0.79	0.84	2.54	4.20
39	0.87	2.65	0.20	0.84	1.52	1.15	2.96	4.76
40	0.90	2.76	0.31	1.09	2.14	1.35	3.13	3.40
41	0.97	2.82	0.48	1.20	2.29	1.49	3.05	2.00
42	1.06	2.89	0.66	1.23	2.09	1.53	3.02	1.56

表5.3 河道効果を考慮した雨量(つづき)

時間	石狩川上流	雨竜川	空知川	幾春別川	夕張川	千歳川	石狩川残(1)	石狩川残(2)
43	1.16	2.99	0.82	1.21	1.80	1.43	3.21	2.15
44	1.26	3.10	0.98	1.18	1.58	1.34	3.49	2.74
45	1.36	3.20	1.12	1.27	1.59	1.46	3.70	2.82
46	1.45	3.27	1.28	1.69	1.86	1.87	3.78	2.81
47	1.53	3.32	1.52	2.23	2.34	2.23	3.86	2.74
48	1.64	3.37	1.85	2.63	2.57	2.28	3.93	2.36
49	1.77	3.41	2.19	2.88	2.51	2.21	3.92	2.50
50	1.89	3.43	2.53	3.06	2.55	2.28	3.84	2.67
51	2.01	3.41	2.89	3.26	2.79	2.84	3.74	2.92
52	2.12	3.38	3.23	3.55	3.49	3.88	3.66	3.36
53	2.23	3.33	3.58	4.00	4.58	4.99	3.62	3.88
54	2.34	3.29	3.95	4.61	5.80	6.11	3.68	4.82
55	2.47	3.27	4.35	5.31	7.23	7.08	3.89	5.93
56	2.61	3.28	4.82	5.91	8.34	7.65	4.20	6.37
57	2.77	3.31	5.23	6.35	8.84	8.01	4.45	6.32
58	2.91	3.32	5.53	6.61	8.89	8.26	4.61	6.33
59	3.03	3.34	5.74	6.69	8.65	8.36	4.75	6.30
60	3.14	3.34	5.88	6.63	8.32	8.46	4.83	6.29
61	3.24	3.32	6.00	6.53	8.01	8.65	4.77	5.89
62	3.34	3.28	6.11	6.44	7.85	8.80	4.61	5.39
63	3.43	3.20	6.18	6.37	7.57	8.55	4.37	4.68
64	3.49	3.10	6.16	6.17	7.06	7.97	4.01	3.45
65	3.51	2.97	6.04	5.75	6.27	7.17	3.57	2.22
66	3.50	2.83	5.85	5.14	5.26	6.14	3.14	1.41
67	3.46	2.68	5.58	4.50	4.23	5.08	2.72	1.14
68	3.41	2.52	5.28	3.96	3.41	4.24	2.34	1.04
69	3.35	2.35	4.98	3.53	2.94	3.73	2.00	0.99
70	3.28	2.19	4.72	3.16	2.95	3.64	1.69	0.80
71	3.20	2.03	4.50	2.89	3.20	3.75	1.41	0.89
72	3.11	1.87	4.31	2.65	3.24	3.65	1.19	0.92
73	3.02	1.72	4.09	2.35	2.95	3.33	1.03	0.72
74	2.91	1.58	3.82	2.03	2.47	2.91	0.89	0.63
75	2.79	1.45	3.52	1.73	1.96	2.42	0.78	0.51
76	2.68	1.33	3.22	1.46	1.54	1.99	0.71	0.39
77	2.56	1.22	2.92	1.24	1.29	1.75	0.67	0.35
78	2.43	1.12	2.64	1.08	1.10	1.58	0.64	0.57
79	2.31	1.03	2.37	0.95	0.88	1.38	0.61	0.57
80	2.20	0.95	2.13	0.81	0.67	1.20	0.57	0.36
81	2.08	0.87	1.90	0.67	0.51	1.02	0.51	0.31
82	1.97	0.81	1.69	0.55	0.39	0.82	0.46	0.24
83	1.86	0.75	1.50	0.45	0.30	0.64	0.40	0.13
84	1.76	0.70	1.33	0.37	0.23	0.48	0.35	0.12

表5.3 河道効果を考慮した雨量(つづき)

時間	石狩川上流	雨竜川	空知川	幾春別川	夕張川	千歳川	石狩川残(1)	石狩川残(2)
85	1.66	0.65	1.19	0.33	0.18	0.37	0.31	0.10
86	1.56	0.60	1.06	0.28	0.16	0.28	0.27	0.06
87	1.47	0.56	0.94	0.23	0.17	0.20	0.24	0.15
88	1.38	0.51	0.86	0.23	0.25	0.16	0.23	0.49
89	1.30	0.47	0.79	0.26	0.37	0.16	0.22	0.50
90	1.22	0.43	0.73	0.27	0.42	0.16	0.19	0.30
91	1.15	0.39	0.67	0.26	0.38	0.15	0.16	0.21
92	1.07	0.36	0.61	0.24	0.36	0.14	0.14	0.14
93	1.00	0.33	0.55	0.21	0.36	0.13	0.12	0.07
94	0.94	0.30	0.50	0.18	0.33	0.11	0.11	0.04
95	0.87	0.27	0.45	0.15	0.30	0.09	0.11	0.02
96	0.81	0.25	0.40	0.13	0.26	0.07	0.09	0.01
97	0.76	0.22	0.36	0.11	0.20	0.05	0.08	0.06
98	0.71	0.20	0.32	0.09	0.15	0.04	0.07	0.07
99	0.66	0.18	0.29	0.07	0.11	0.03	0.05	0.05
100	0.61	0.16	0.26	0.06	0.08	0.02	0.04	0.02
101	0.56	0.15	0.24	0.05	0.05	0.01	0.04	0.01
102	0.52	0.13	0.21	0.04	0.04	0.01	0.03	0.01
103	0.48	0.12	0.19	0.03	0.02	0.01	0.02	0.00
104	0.45	0.11	0.17	0.02	0.07	0.00	0.02	0.00
105	0.41	0.10	0.15	0.02	0.11	0.01	0.01	0.00
106	0.38	0.08	0.13	0.01	0.11	0.02	0.01	0.00
107	0.35	0.08	0.12	0.01	0.10	0.02	0.01	0.00
108	0.32	0.07	0.11	0.01	0.08	0.04	0.01	0.00
109	0.30	0.06	0.10	0.01	0.08	0.06	0.00	0.00
110	0.27	0.06	0.09	0.02	0.09	0.05	0.00	0.00
111	0.25	0.05	0.08	0.02	0.09	0.05	0.00	0.00
112	0.23	0.05	0.07	0.02	0.11	0.04	0.00	0.00
113	0.21	0.04	0.07	0.04	0.11	0.03	0.00	0.05
114	0.20	0.04	0.06	0.08	0.10	0.02	0.00	0.07
115	0.18	0.03	0.05	0.11	0.08	0.01	0.00	0.09
116	0.17	0.03	0.05	0.11	0.08	0.01	0.00	0.09
117	0.15	0.03	0.05	0.11	0.12	0.01	0.00	0.05
118	0.14	0.03	0.04	0.10	0.15	0.01	0.00	0.03
119	0.13	0.02	0.04	0.09	0.14	0.01	0.00	0.01
120	0.12	0.02	0.04	0.07	0.12	0.01	0.00	0.01
121	0.11	0.02	0.03	0.06	0.09	0.00	0.00	0.00
122	0.10	0.02	0.03	0.05	0.07	0.00	0.00	0.00
123	0.09	0.01	0.02	0.04	0.05	0.00	0.00	0.00
124	0.08	0.01	0.02	0.03	0.03	0.00	0.00	0.00
125	0.08	0.01	0.02	0.03	0.02	0.00	0.00	0.00
126	0.07	0.01	0.02	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00

表5.3 河道効果を考慮した雨量(つづき)

時間	石狩川上流	雨竜川	空知川	幾春別川	夕張川	千歳川	石狩川残(1)	石狩川残(2)
127	0.07	0.01	0.01	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
128	0.06	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
129	0.05	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
130	0.05	0.01	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
131	0.05	0.01	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
132	0.04	0.01	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
133	0.04	0.00	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
134	0.04	0.00	0.01	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00
135	0.03	0.00	0.01	0.01	0.00	0.02	0.00	0.00
136	0.03	0.00	0.01	0.01	0.00	0.02	0.00	0.00
137	0.03	0.00	0.01	0.01	0.00	0.02	0.00	0.00
138	0.02	0.00	0.01	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00
139	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.04
140	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.05
141	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03
142	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02
143	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
144	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
145	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
146	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
147	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
148	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
149	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
150	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
151	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
152	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
153	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
154	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
155	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
156	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00
157	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00
158	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00
159	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00
160	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00
161	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
162	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00
163	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00
164	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00
165	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00
166	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00
167	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00
168	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00

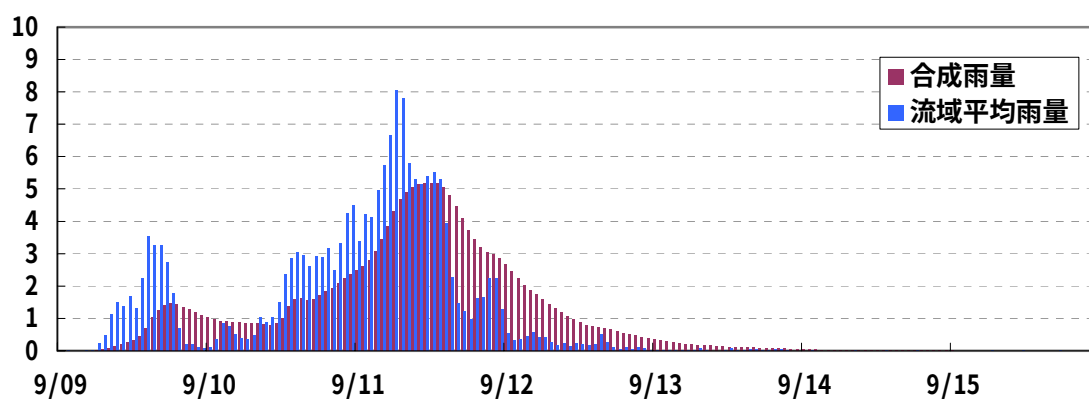


図5.4石狩大橋地点の合成雨量図

表5.4 石狩大橋地点の合成雨量

時間	合成雨量	時間	合成雨量	時間	合成雨量	時間	合成雨量	時間	合成雨量
1	0.00	35	0.80	69	3.20	103	0.19	137	0.01
2	0.00	36	0.84	70	3.04	104	0.18	138	0.01
3	0.00	37	1.01	71	2.97	105	0.17	139	0.01
4	0.00	38	1.38	72	2.85	106	0.16	140	0.01
5	0.00	39	1.60	73	2.67	107	0.14	141	0.01
6	0.00	40	1.62	74	2.46	108	0.13	142	0.01
7	0.02	41	1.57	75	2.23	109	0.12	143	0.01
8	0.05	42	1.59	76	2.02	110	0.12	144	0.01
9	0.08	43	1.70	77	1.86	111	0.11	145	0.01
10	0.13	44	1.83	78	1.73	112	0.10	146	0.00
11	0.19	45	1.94	79	1.59	113	0.10	147	0.00
12	0.25	46	2.08	80	1.44	114	0.09	148	0.00
13	0.33	47	2.25	81	1.31	115	0.09	149	0.00
14	0.44	48	2.36	82	1.18	116	0.08	150	0.00
15	0.70	49	2.47	83	1.06	117	0.08	151	0.00
16	1.04	50	2.60	84	0.97	118	0.07	152	0.00
17	1.27	51	2.79	85	0.88	119	0.06	153	0.00
18	1.40	52	3.08	86	0.80	120	0.06	154	0.00
19	1.45	53	3.43	87	0.75	121	0.05	155	0.00
20	1.43	54	3.84	88	0.73	122	0.04	156	0.00
21	1.36	55	4.31	89	0.70	123	0.04	157	0.00
22	1.28	56	4.68	90	0.65	124	0.03	158	0.00
23	1.19	57	4.91	91	0.59	125	0.03	159	0.00
24	1.11	58	5.06	92	0.55	126	0.03	160	0.00
25	1.03	59	5.14	93	0.50	127	0.02	161	0.00
26	0.96	60	5.18	94	0.46	128	0.02	162	0.00
27	0.92	61	5.18	95	0.42	129	0.02	163	0.00
28	0.90	62	5.16	96	0.38	130	0.02	164	0.00
29	0.89	63	5.05	97	0.35	131	0.02	165	0.00
30	0.88	64	4.80	98	0.32	132	0.02	166	0.00
31	0.86	65	4.46	99	0.29	133	0.01	167	0.00
32	0.84	66	4.09	100	0.26	134	0.01	168	0.00
33	0.84	67	3.74	101	0.24	135	0.01		
34	0.82	68	3.44	102	0.21	136	0.01		

5.5 平成 13 年洪水における河道効果を考慮した洪水予測モデルの適用例

石狩川石狩大橋地点（流域面積 12697.0km²）を対象に、カルマン・フィルター理論を適用した予測モデルを用いて洪水予測を行う。まず、石狩大橋地点における雨量系列として 5.4 節で算出した河道効果を考慮した合成雨量（表 5.4 を参照）を与え、単一流域におけるカルマン・フィルター理論を適用すれば、複合流域（石狩大橋地点）における予測計算が可能となる。

(1) 初期条件の設定

予測計算を行う際の状態変数及びその推定誤差分散・共分散の伝達方程式（表 4.2 式(6)及び式(7)）を適用するためには初期値を設定しなくてはならない。そこで状態変数及びその推定誤差分散・共分散は次のように設定する。

表 5.5 状態変数の初期条件

x_1	x_2	c_{11}	c_{12}	c_{13}
$q_B^{p_2}$	0	6.490	0.159	1.797

x_1 に含まれる q_B は初期流出高であり、貯留指数 p_1 と p_2 はそれぞれ、0.6 と 0.4648 を与える。 x_2 は dx_1/dt であるので、初期値は 0 を与える。また c_{11} と c_{12} および c_{13} の値は、既往洪水定数解析の平均値を与えた。 x_2 の初期値はゼロであるが、その推定誤差分散として $(0.1x_1)^2$ を与えた。

表 5.6 状態変数の誤差分散・共分散の初期条件

x_1 の誤差分散	x_2 の誤差分散	σ_{11}^2	σ_{12}^2	σ_{13}^2
$(0.1x_1)^2$	$(0.1x_1)^2$	$(0.2c_{11})^2$	$(0.2c_{12})^2$	$(0.2c_{13})^2$

式(4.48)の U_k は X_2 の分散・共分散行列であり、その要素 $\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{13}^2$ は、モデル定数の分散の初期値である。今回は経験的に初期値をそれぞれ c_{11}, c_{12}, c_{13} の 2 割を設定した。

(2) 計算条件の設定

表 5.7 計算条件

減衰係数 λ	0.019
平均降雨強度 $\bar{r}$	1.009mm/h
計算時間間隔 nl	12
観測誤差分散 R_k	$(0.1x_{1,k}^{1/p_2})^2$
システム誤差分散 $Q_{1,k}, Q_{2,k}$	$(0.1x_1)^2, (0.1x_2)^2$

観測誤差分散 R_k は、式(4.58)と式(4.70)より $(0.1x_{1,k}^{1/p_2})^2$ を与え、システム誤差分散 $Q_{1,k}$ と $Q_{2,k}$ は、式(4.56)よりそれぞれ $(0.1x_1)^2$ と $(0.1x_2)^2$ を与える。また、平均降雨強度 $\bar{r}$ は既往洪水の平均値とし、1 時間あたりの計算時間分割数 nl は 12 と設定した。

実際の洪水予測を想定し、対象洪水より一年前の水位～流量曲線を使用する（図 5.5 参照）。表 5.8 に示される、 a と b は式(4.33)の係数である。また、 b_0 と b_1 は式(4.35)より算出した。

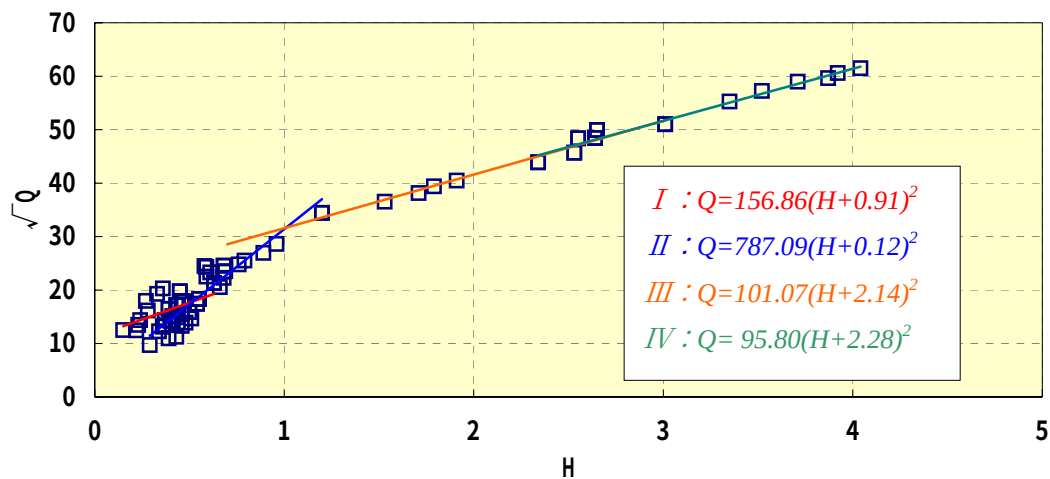


図5.5 水位～流量曲線図 石狩大橋地点 (平成12年)

表5.8 水位～流量曲線

曲線分類	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
適用期間	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24
適用水位 (m)	0.15～0.52	0.53～1.01	1.02～3.02	3.03～4.04
<i>a</i>	156.86	787.09	101.07	95.80
<i>b</i>	0.91	0.12	2.14	2.28
<i>b₀</i>	-0.91	-0.12	-2.14	-2.28
<i>b₁</i>	0.0798	0.0356	0.0995	0.1022

表5.9に、予測計算に必要な予測雨量（実測雨量）と実績水位を示す。また、流量および流出高は図5.5に示す水位～流量曲線を用いて算出した。

表5.9に示すように、ピーク水位は79時間目に起こっており、その値は6.28mである。

表5.9 洪水データ一覧表

地点名 : 石狩大橋地点

洪水期間 : 平成 13 年 9 月 9 日 1:00~15 日 24:00

時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)	時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)
1	0.00	0.46	0.08	294.41	43	1.70	1.80	0.44	1568.97
2	0.00	0.46	0.08	294.41	44	1.83	1.86	0.46	1617.12
3	0.00	0.49	0.09	307.45	45	1.94	1.92	0.47	1666.00
4	0.00	0.47	0.08	298.72	46	2.08	1.99	0.49	1723.94
5	0.00	0.49	0.09	307.45	47	2.25	2.04	0.50	1765.94
6	0.00	0.51	0.09	316.29	48	2.36	2.09	0.51	1808.44
7	0.02	0.52	0.09	320.76	49	2.47	2.16	0.53	1868.78
8	0.05	0.50	0.09	311.85	50	2.60	2.26	0.55	1956.72
9	0.08	0.53	0.09	332.55	51	2.79	2.37	0.58	2055.77
10	0.13	0.49	0.09	307.45	52	3.08	2.49	0.61	2166.63
11	0.19	0.49	0.09	307.45	53	3.43	2.63	0.65	2299.64
12	0.25	0.40	0.08	269.19	54	3.84	2.77	0.69	2443.14
13	0.33	0.40	0.08	269.19	55	4.31	2.94	0.74	2610.40
14	0.44	0.35	0.07	249.03	56	4.68	3.12	0.79	2793.53
15	0.70	0.39	0.08	265.09	57	4.91	3.32	0.85	3004.29
16	1.04	0.37	0.07	257.00	58	5.06	3.51	0.91	3211.61
17	1.27	0.37	0.07	257.00	59	5.14	3.74	0.98	3471.83
18	1.40	0.43	0.08	281.66	60	5.18	3.96	1.06	3730.22
19	1.45	0.44	0.08	285.88	61	5.18	4.01	1.07	3790.24
20	1.43	0.49	0.09	307.45	62	5.16	4.21	1.14	4035.11
21	1.36	0.49	0.09	307.45	63	5.05	4.59	1.28	4521.46
22	1.28	0.54	0.10	342.86	64	4.80	4.79	1.36	4788.55
23	1.19	0.54	0.10	342.86	65	4.46	4.98	1.43	5049.39
24	1.11	0.53	0.09	332.55	66	4.09	5.16	1.50	5302.88
25	1.03	0.61	0.12	419.44	67	3.74	5.33	1.57	5547.98
26	0.96	0.69	0.15	516.41	68	3.44	5.49	1.64	5783.72
27	0.92	0.85	0.21	740.57	69	3.20	5.64	1.70	6009.19
28	0.90	0.90	0.23	818.89	70	3.04	5.72	1.74	6131.20
29	0.89	1.01	0.28	1005.04	71	2.97	5.84	1.79	6316.52
30	0.88	1.09	0.30	1054.45	72	2.85	5.99	1.86	6552.04
31	0.86	1.16	0.31	1100.65	73	2.67	6.07	1.89	6679.42
32	0.84	1.24	0.33	1154.66	74	2.46	6.13	1.92	6775.75
33	0.84	1.29	0.34	1189.08	75	2.23	6.17	1.94	6840.36
34	0.82	1.36	0.35	1238.11	76	2.02	6.20	1.95	6889.02
35	0.80	1.41	0.36	1273.73	77	1.86	6.25	1.98	6970.49
36	0.84	1.46	0.37	1309.87	78	1.73	6.26	1.98	6986.85
37	1.01	1.52	0.38	1353.89	79	1.59	6.28	1.99	7019.61
38	1.38	1.59	0.40	1406.18	80	1.44	6.26	1.98	6986.85
39	1.60	1.61	0.40	1421.30	81	1.31	6.24	1.97	6954.16
40	1.62	1.65	0.41	1451.78	82	1.18	6.20	1.95	6889.02
41	1.57	1.70	0.42	1490.34	83	1.06	6.14	1.93	6791.88
42	1.59	1.74	0.43	1521.55	84	0.97	6.07	1.89	6679.42

表5.9 洪水データ一覧表(つづき)

時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)	時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)
85	0.88	6.02	1.87	6599.66	127	0.02	1.95	0.48	1690.71
86	0.80	5.96	1.84	6504.59	128	0.02	1.89	0.47	1641.47
87	0.75	5.86	1.80	6347.67	129	0.02	1.84	0.45	1600.99
88	0.73	5.77	1.76	6208.08	130	0.02	1.79	0.44	1561.02
89	0.70	5.72	1.74	6131.20	131	0.02	1.74	0.43	1521.55
90	0.65	5.61	1.69	5963.75	132	0.02	1.70	0.42	1490.34
91	0.59	5.49	1.64	5783.72	133	0.01	1.65	0.41	1451.78
92	0.55	5.37	1.59	5606.46	134	0.01	1.61	0.40	1421.30
93	0.50	5.27	1.55	5460.84	135	0.01	1.57	0.39	1391.14
94	0.46	5.16	1.50	5302.88	136	0.01	1.53	0.39	1361.30
95	0.42	5.04	1.46	5133.19	137	0.01	1.49	0.38	1331.79
96	0.38	4.93	1.41	4980.08	138	0.01	1.45	0.37	1302.60
97	0.35	4.81	1.37	4815.68	139	0.01	1.40	0.36	1266.57
98	0.32	4.69	1.32	4654.05	140	0.01	1.37	0.35	1245.19
99	0.29	4.57	1.27	4495.18	141	0.01	1.33	0.35	1216.97
100	0.26	4.47	1.24	4364.89	142	0.01	1.30	0.34	1196.02
101	0.24	4.35	1.19	4211.07	143	0.01	1.29	0.34	1189.08
102	0.21	4.25	1.16	4085.00	144	0.01	1.25	0.33	1161.51
103	0.19	4.15	1.12	3960.84	145	0.01	1.22	0.32	1141.04
104	0.18	4.06	1.09	3850.74	146	0.00	1.21	0.32	1134.26
105	0.17	3.92	1.04	3682.55	147	0.00	1.19	0.32	1120.76
106	0.16	3.81	1.01	3553.04	148	0.00	1.19	0.32	1120.76
107	0.14	3.73	0.98	3460.31	149	0.00	1.17	0.31	1107.33
108	0.13	3.65	0.96	3368.80	150	0.00	1.16	0.31	1100.65
109	0.12	3.51	0.91	3211.61	151	0.00	1.12	0.30	1074.13
110	0.12	3.41	0.88	3101.63	152	0.00	1.11	0.30	1067.55
111	0.11	3.31	0.85	2993.57	153	0.00	1.09	0.30	1054.45
112	0.10	3.22	0.82	2897.95	154	0.00	1.07	0.30	1041.44
113	0.10	3.18	0.81	2855.95	155	0.00	1.06	0.29	1034.96
114	0.09	3.10	0.79	2772.87	156	0.00	1.05	0.29	1028.50
115	0.09	2.90	0.73	2570.54	157	0.00	1.05	0.29	1028.50
116	0.08	2.80	0.70	2472.25	158	0.00	1.03	0.29	1015.64
117	0.08	2.71	0.68	2385.43	159	0.00	1.03	0.29	1015.64
118	0.07	2.62	0.65	2290.00	160	0.00	1.01	0.28	1005.04
119	0.06	2.54	0.63	2213.68	161	0.00	1.00	0.28	987.33
120	0.06	2.44	0.60	2120.08	162	0.00	0.94	0.25	884.37
121	0.05	2.36	0.58	2046.67	163	0.00	0.91	0.24	835.02
122	0.04	2.29	0.56	1983.49	164	0.00	0.87	0.22	771.43
123	0.04	2.20	0.54	1903.71	165	0.00	0.83	0.20	710.35
124	0.03	2.13	0.52	1842.80	166	0.00	0.81	0.19	680.75
125	0.03	2.07	0.51	1791.37	167	0.00	0.79	0.18	651.79
126	0.03	2.01	0.49	1740.68	168	0.00	0.79	0.18	651.79

(3) 洪水予測シミュレーション

上記の初期条件、計算条件をもとに石狩大橋地点において、表5.9に示す河道効果を考慮した雨量と実績水位から算出した1時間～3時間先予測までの予測シミュレーションの結果を図5.6に示す。逐次更新されるパラメータ(c_{11} , c_{12} , c_{13})の値は初期値を100%として1時間ごとの変化率で図5.7に示す。モデル定数の時間変動率は小さく、10%以内に収まっている。また、1時間～3時間先予測までの予測水位と標準偏差およびパラメータの更新値を表5.11に示す。

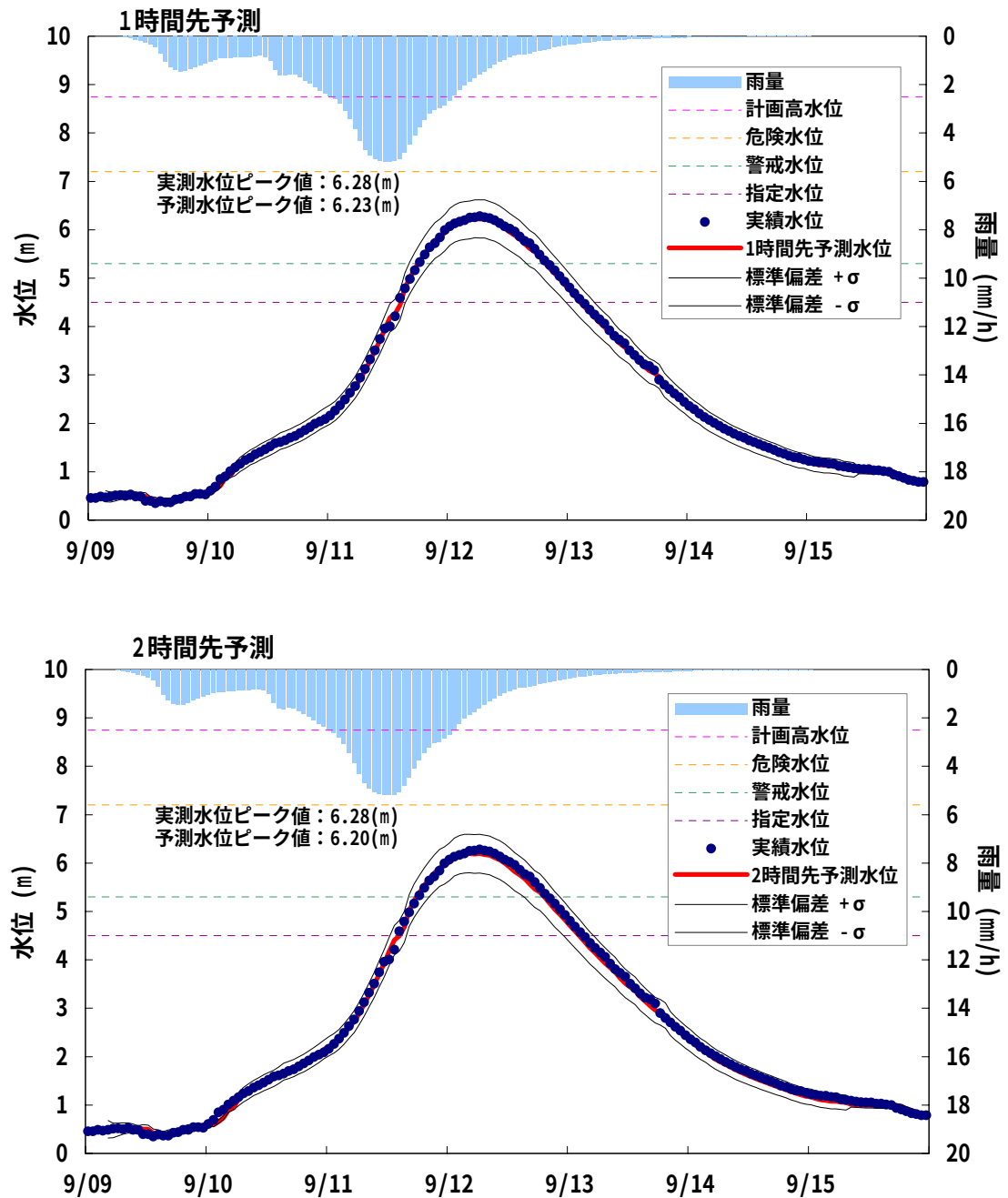


図5.6 洪水予測シミュレーション図 石狩大橋地点 (平成13年洪水)

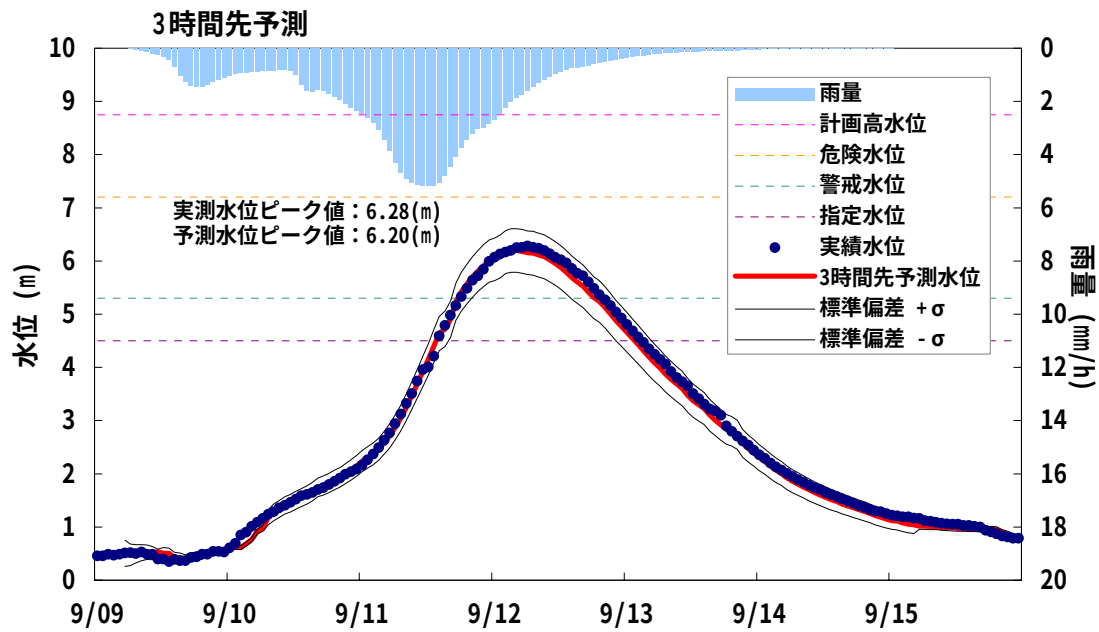


図5.6 洪水予測シミュレーション図 石狩大橋地点 (平成13年洪水)

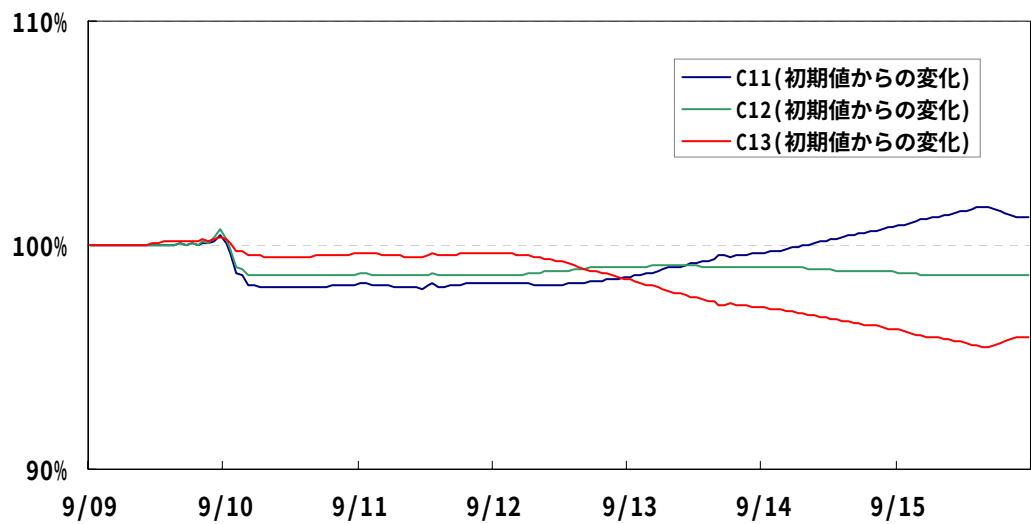


図5.7 パラメータ更新値の変化率

洪水の再現性を評価する方法として、予測水位 H_{ci} (m)と実測水位 H_{oi} (m)の平均2乗誤差の平方根 (RMSE: Root Mean Squares Error) を用いた。表5.10に計算結果を示す。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_{ci} - H_{oi})^2} \tag{5.19}$$

表5.10 河道効果により降雨遅れを考慮した予測水位の比較

	1時間先予測	2時間先予測	3時間先予測
実測ピーク水位	6.28m	6.28m	6.28m
予測ピーク水位	6.23m	6.20m	6.20m
予測水位+標準偏差	6.62m	6.60m	6.61m
RMSE	0.04m	0.07m	0.10m

表5.11 洪水予測シミュレーション結果一覧表

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
1	0.46	0.46	0.46	0.20	0.31	0.41	6.4900	0.1590	1.7970
2	0.46	0.46	0.46	0.14	0.23	0.31	6.4900	0.1590	1.7970
3	0.49	0.50	0.51	0.12	0.18	0.25	6.4900	0.1590	1.7969
4	0.48	0.48	0.48	0.10	0.15	0.20	6.4900	0.1590	1.7970
5	0.49	0.49	0.50	0.09	0.13	0.17	6.4900	0.1590	1.7969
6	0.51	0.51	0.52	0.09	0.12	0.15	6.4899	0.1590	1.7968
7	0.52	0.53	0.53	0.08	0.11	0.13	6.4898	0.1590	1.7967
8	0.51	0.51	0.51	0.08	0.10	0.12	6.4900	0.1590	1.7969
9	0.54	0.53	0.53	0.03	0.04	0.05	6.4896	0.1590	1.7965
10	0.50	0.50	0.51	0.07	0.09	0.11	6.4902	0.1590	1.7971
11	0.49	0.50	0.50	0.07	0.08	0.10	6.4903	0.1590	1.7973
12	0.42	0.42	0.43	0.07	0.08	0.09	6.4915	0.1590	1.7987
13	0.41	0.41	0.43	0.07	0.07	0.08	6.4917	0.1590	1.7991
14	0.37	0.38	0.40	0.06	0.07	0.08	6.4926	0.1590	1.8002
15	0.40	0.42	0.44	0.06	0.07	0.08	6.4921	0.1590	1.7997
16	0.39	0.42	0.45	0.06	0.07	0.08	6.4928	0.1590	1.8003
17	0.40	0.43	0.47	0.06	0.07	0.07	6.4936	0.1591	1.8008
18	0.46	0.50	0.54	0.06	0.07	0.03	6.4920	0.1590	1.8000
19	0.48	0.53	0.54	0.06	0.07	0.03	6.4932	0.1591	1.8005
20	0.53	0.55	0.57	0.03	0.03	0.03	6.4926	0.1590	1.8003
21	0.53	0.56	0.58	0.03	0.03	0.03	6.4973	0.1593	1.8012
22	0.56	0.59	0.61	0.03	0.03	0.04	6.4945	0.1592	1.8008
23	0.57	0.60	0.62	0.03	0.03	0.04	6.5019	0.1595	1.8018
24	0.56	0.59	0.62	0.03	0.03	0.04	6.5161	0.1601	1.8036
25	0.63	0.66	0.68	0.03	0.03	0.04	6.4947	0.1594	1.8012
26	0.71	0.74	0.76	0.04	0.04	0.04	6.4691	0.1587	1.7985
27	0.87	0.89	0.92	0.04	0.04	0.04	6.4115	0.1574	1.7926
28	0.92	0.95	0.97	0.05	0.05	0.05	6.4010	0.1573	1.7915
29	1.06	1.12	1.19	0.14	0.14	0.14	6.3747	0.1569	1.7887
30	1.15	1.22	1.28	0.15	0.15	0.16	6.3715	0.1569	1.7883
31	1.22	1.28	1.34	0.15	0.16	0.16	6.3709	0.1569	1.7882
32	1.30	1.35	1.41	0.16	0.16	0.16	6.3694	0.1569	1.7880
33	1.35	1.40	1.45	0.16	0.16	0.17	6.3700	0.1569	1.7881
34	1.41	1.46	1.51	0.16	0.16	0.17	6.3690	0.1569	1.7880
35	1.46	1.51	1.55	0.16	0.17	0.17	6.3690	0.1569	1.7880
36	1.51	1.55	1.60	0.17	0.17	0.17	6.3689	0.1569	1.7879
37	1.57	1.61	1.67	0.17	0.17	0.17	6.3679	0.1569	1.7877
38	1.64	1.69	1.75	0.17	0.17	0.18	6.3661	0.1569	1.7873
39	1.67	1.72	1.78	0.17	0.18	0.18	6.3678	0.1569	1.7877
40	1.71	1.77	1.83	0.18	0.18	0.18	6.3690	0.1569	1.7880
41	1.76	1.82	1.88	0.18	0.18	0.18	6.3695	0.1569	1.7882
42	1.80	1.87	1.94	0.18	0.18	0.19	6.3708	0.1569	1.7885

表5.11 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
43	1.86	1.93	2.00	0.18	0.18	0.19	6.3710	0.1569	1.7886
44	1.93	2.00	2.08	0.19	0.19	0.19	6.3713	0.1569	1.7886
45	1.99	2.07	2.15	0.19	0.19	0.19	6.3718	0.1569	1.7888
46	2.07	2.15	2.24	0.19	0.19	0.20	6.3720	0.1569	1.7888
47	2.13	2.21	2.31	0.19	0.20	0.20	6.3736	0.1569	1.7893
48	2.18	2.28	2.38	0.20	0.20	0.21	6.3758	0.1569	1.7899
49	2.26	2.36	2.46	0.20	0.20	0.21	6.3773	0.1570	1.7903
50	2.36	2.47	2.58	0.20	0.21	0.21	6.3771	0.1570	1.7903
51	2.48	2.59	2.71	0.21	0.21	0.23	6.3764	0.1569	1.7901
52	2.60	2.72	2.87	0.21	0.23	0.23	6.3755	0.1569	1.7898
53	2.75	2.89	3.05	0.23	0.23	0.24	6.3739	0.1569	1.7894
54	2.91	3.07	3.25	0.23	0.24	0.25	6.3724	0.1569	1.7891
55	3.10	3.27	3.47	0.24	0.25	0.26	6.3707	0.1569	1.7886
56	3.29	3.49	3.69	0.25	0.26	0.27	6.3692	0.1569	1.7883
57	3.51	3.71	3.93	0.26	0.27	0.28	6.3675	0.1568	1.7879
58	3.71	3.93	4.15	0.27	0.28	0.30	6.3674	0.1568	1.7879
59	3.95	4.17	4.40	0.28	0.29	0.31	6.3657	0.1568	1.7875
60	4.18	4.41	4.64	0.29	0.30	0.32	6.3651	0.1568	1.7874
61	4.27	4.50	4.73	0.30	0.32	0.33	6.3758	0.1569	1.7896
62	4.45	4.68	4.90	0.31	0.32	0.34	6.3794	0.1570	1.7903
63	4.80	5.02	5.23	0.32	0.33	0.35	6.3701	0.1569	1.7884
64	5.01	5.23	5.42	0.33	0.35	0.36	6.3707	0.1569	1.7885
65	5.20	5.39	5.57	0.34	0.35	0.37	6.3727	0.1569	1.7890
66	5.36	5.54	5.70	0.35	0.36	0.38	6.3749	0.1569	1.7895
67	5.51	5.67	5.81	0.36	0.37	0.39	6.3768	0.1569	1.7899
68	5.65	5.79	5.91	0.36	0.38	0.39	6.3781	0.1569	1.7902
69	5.78	5.90	6.00	0.37	0.38	0.40	6.3788	0.1569	1.7904
70	5.85	5.95	6.03	0.38	0.39	0.40	6.3817	0.1569	1.7912
71	5.94	6.02	6.09	0.38	0.39	0.40	6.3821	0.1569	1.7913
72	6.06	6.13	6.17	0.38	0.39	0.41	6.3801	0.1569	1.7906
73	6.13	6.17	6.20	0.39	0.40	0.41	6.3799	0.1569	1.7905
74	6.17	6.20	6.20	0.39	0.40	0.41	6.3799	0.1569	1.7905
75	6.19	6.20	6.18	0.39	0.40	0.41	6.3800	0.1569	1.7906
76	6.20	6.19	6.16	0.39	0.40	0.41	6.3798	0.1569	1.7905
77	6.23	6.20	6.15	0.39	0.40	0.41	6.3787	0.1569	1.7897
78	6.22	6.18	6.11	0.39	0.40	0.41	6.3780	0.1569	1.7892
79	6.22	6.16	6.08	0.39	0.40	0.41	6.3772	0.1570	1.7883
80	6.19	6.11	6.02	0.39	0.40	0.41	6.3767	0.1570	1.7877
81	6.15	6.06	5.96	0.39	0.40	0.41	6.3763	0.1570	1.7869
82	6.10	6.00	5.88	0.39	0.40	0.41	6.3761	0.1571	1.7861
83	6.03	5.91	5.79	0.39	0.40	0.41	6.3761	0.1571	1.7854
84	5.95	5.82	5.69	0.39	0.39	0.41	6.3763	0.1571	1.7847

表5.11 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
85	5.88	5.75	5.61	0.38	0.39	0.40	6.3768	0.1572	1.7834
86	5.82	5.67	5.53	0.38	0.39	0.40	6.3777	0.1572	1.7820
87	5.71	5.57	5.42	0.38	0.38	0.40	6.3784	0.1573	1.7811
88	5.62	5.46	5.31	0.37	0.38	0.39	6.3795	0.1573	1.7800
89	5.55	5.40	5.24	0.37	0.38	0.39	6.3819	0.1573	1.7780
90	5.45	5.29	5.13	0.36	0.37	0.39	6.3834	0.1574	1.7769
91	5.33	5.17	5.00	0.36	0.37	0.39	6.3846	0.1574	1.7760
92	5.20	5.04	4.88	0.35	0.37	0.38	6.3861	0.1574	1.7751
93	5.10	4.94	4.77	0.35	0.36	0.38	6.3886	0.1574	1.7738
94	4.99	4.83	4.66	0.34	0.36	0.37	6.3910	0.1575	1.7725
95	4.87	4.71	4.54	0.34	0.35	0.37	6.3932	0.1575	1.7714
96	4.76	4.60	4.43	0.33	0.35	0.36	6.3961	0.1575	1.7701
97	4.64	4.48	4.32	0.33	0.34	0.36	6.3986	0.1575	1.7690
98	4.52	4.36	4.20	0.32	0.34	0.35	6.4012	0.1575	1.7679
99	4.40	4.24	4.09	0.32	0.33	0.35	6.4039	0.1575	1.7668
100	4.30	4.14	3.99	0.31	0.33	0.34	6.4078	0.1575	1.7653
101	4.19	4.03	3.88	0.31	0.32	0.34	6.4108	0.1576	1.7642
102	4.09	3.93	3.78	0.30	0.32	0.33	6.4148	0.1576	1.7628
103	3.99	3.84	3.69	0.30	0.31	0.33	6.4190	0.1576	1.7613
104	3.90	3.75	3.60	0.29	0.31	0.32	6.4239	0.1576	1.7597
105	3.77	3.62	3.48	0.29	0.30	0.32	6.4254	0.1576	1.7592
106	3.66	3.51	3.37	0.28	0.30	0.31	6.4283	0.1576	1.7582
107	3.58	3.44	3.30	0.28	0.29	0.31	6.4336	0.1576	1.7566
108	3.50	3.36	3.23	0.27	0.29	0.30	6.4391	0.1576	1.7549
109	3.37	3.24	3.10	0.27	0.28	0.30	6.4400	0.1576	1.7547
110	3.27	3.14	3.01	0.26	0.28	0.29	6.4431	0.1575	1.7538
111	3.17	3.04	2.92	0.26	0.27	0.29	6.4463	0.1575	1.7528
112	3.08	2.96	2.84	0.26	0.27	0.28	6.4502	0.1575	1.7517
113	3.04	2.92	2.80	0.25	0.26	0.28	6.4582	0.1575	1.7495
114	2.97	2.85	2.73	0.25	0.26	0.27	6.4631	0.1575	1.7482
115	2.79	2.68	2.57	0.25	0.25	0.26	6.4574	0.1575	1.7497
116	2.69	2.58	2.47	0.24	0.24	0.25	6.4582	0.1575	1.7495
117	2.60	2.50	2.39	0.23	0.24	0.25	6.4607	0.1575	1.7488
118	2.51	2.41	2.30	0.22	0.23	0.24	6.4623	0.1575	1.7484
119	2.43	2.33	2.23	0.22	0.23	0.24	6.4651	0.1575	1.7477
120	2.34	2.24	2.14	0.21	0.22	0.23	6.4660	0.1575	1.7475
121	2.26	2.16	2.07	0.21	0.22	0.23	6.4683	0.1575	1.7469
122	2.19	2.10	2.00	0.21	0.21	0.23	6.4715	0.1575	1.7461
123	2.11	2.01	1.93	0.20	0.21	0.22	6.4726	0.1574	1.7458
124	2.04	1.95	1.86	0.20	0.21	0.22	6.4752	0.1574	1.7452
125	1.98	1.89	1.81	0.20	0.20	0.21	6.4788	0.1574	1.7443
126	1.92	1.84	1.75	0.19	0.20	0.21	6.4822	0.1574	1.7435

表5.11 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
127	1.86	1.78	1.70	0.19	0.20	0.21	6.4854	0.1574	1.7427
128	1.80	1.72	1.65	0.19	0.19	0.20	6.4884	0.1574	1.7420
129	1.76	1.68	1.60	0.18	0.19	0.20	6.4921	0.1573	1.7412
130	1.71	1.63	1.56	0.18	0.19	0.20	6.4957	0.1573	1.7403
131	1.66	1.59	1.51	0.18	0.19	0.19	6.4991	0.1573	1.7395
132	1.62	1.55	1.48	0.18	0.18	0.19	6.5032	0.1573	1.7386
133	1.57	1.50	1.44	0.18	0.18	0.19	6.5063	0.1573	1.7379
134	1.53	1.47	1.40	0.17	0.18	0.19	6.5100	0.1572	1.7370
135	1.50	1.43	1.36	0.17	0.18	0.18	6.5136	0.1572	1.7362
136	1.46	1.39	1.33	0.17	0.17	0.18	6.5170	0.1572	1.7354
137	1.42	1.36	1.29	0.17	0.17	0.18	6.5202	0.1572	1.7347
138	1.38	1.32	1.26	0.17	0.17	0.18	6.5233	0.1572	1.7340
139	1.33	1.27	1.21	0.16	0.17	0.17	6.5251	0.1572	1.7335
140	1.30	1.24	1.18	0.16	0.17	0.17	6.5287	0.1571	1.7327
141	1.27	1.21	1.15	0.16	0.16	0.17	6.5313	0.1571	1.7321
142	1.24	1.18	1.12	0.16	0.16	0.17	6.5347	0.1571	1.7314
143	1.23	1.17	1.11	0.16	0.16	0.17	6.5400	0.1571	1.7301
144	1.19	1.13	1.08	0.16	0.16	0.16	6.5424	0.1571	1.7296
145	1.16	1.11	1.05	0.15	0.16	0.16	6.5453	0.1570	1.7289
146	1.15	1.10	1.04	0.15	0.16	0.16	6.5501	0.1570	1.7278
147	1.13	1.08	1.01	0.15	0.16	0.06	6.5540	0.1570	1.7269
148	1.13	1.08	1.01	0.15	0.15	0.06	6.5595	0.1570	1.7256
149	1.11	1.06	1.01	0.15	0.15	0.06	6.5633	0.1569	1.7247
150	1.10	1.05	1.01	0.15	0.15	0.06	6.5676	0.1569	1.7237
151	1.07	1.01	0.99	0.15	0.05	0.06	6.5692	0.1569	1.7233
152	1.05	1.01	0.99	0.15	0.05	0.06	6.5730	0.1569	1.7224
153	1.04	1.00	0.98	0.15	0.05	0.06	6.5761	0.1569	1.7217
154	1.01	0.99	0.98	0.05	0.05	0.05	6.5791	0.1569	1.7210
155	1.01	0.99	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5828	0.1569	1.7201
156	1.00	0.99	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5866	0.1568	1.7192
157	1.00	0.99	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5911	0.1568	1.7181
158	1.00	0.98	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5940	0.1568	1.7174
159	1.00	0.98	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5982	0.1568	1.7163
160	0.99	0.98	0.96	0.05	0.05	0.05	6.6011	0.1568	1.7156
161	0.98	0.97	0.95	0.05	0.05	0.05	6.6029	0.1568	1.7152
162	0.93	0.92	0.90	0.05	0.05	0.05	6.5936	0.1568	1.7175
163	0.90	0.88	0.87	0.05	0.05	0.05	6.5886	0.1568	1.7187
164	0.86	0.84	0.83	0.05	0.05	0.05	6.5818	0.1569	1.7204
165	0.82	0.81	0.79	0.05	0.05	0.05	6.5742	0.1569	1.7223
166	0.80	0.78	0.77	0.04	0.04	0.05	6.5714	0.1569	1.7230
167	0.78	0.76	0.75	0.04	0.04	0.04	6.5693	0.1569	1.7235
168	0.77	0.76	0.75	0.04	0.04	0.04	6.5732	0.1569	1.7226

5.6 昭和 56 年洪水における河道効果を考慮した洪水予測モデルの適用例

5.5 節と同様に昭和 56 年洪水における石狩大橋地点（流域面積 12697.0km²）を対象として、カルマン・フィルター理論を適用した予測モデルを用いて洪水予測を行う。なお、ナッシュモデルによる合成雨量算出例は割愛した。

(1) 初期条件の設定

表5.12 状態変量の初期条件

x_1	x_2	c_{11}	c_{12}	c_{13}
$q_B^{p_2}$	0	6.490	0.159	1.797

表5.13 状態変量の誤差分散・共分散の初期条件

x_1 の誤差分散	x_2 の誤差分散	σ_{11}^2	σ_{12}^2	σ_{13}^2
$(0.1x_1)^2$	$(0.1x_1)^2$	$(0.2c_{11})^2$	$(0.2c_{12})^2$	$(0.2c_{13})^2$

(2) 計算条件の設定

表5.14 計算条件

減衰係数 λ	0.019
平均降雨強度 $\bar{r}$	1.009mm/h
計算時間間隔 nl	12
観測誤差分散 R_k	$(0.1x_{1,k}^{1/p_2})^2$
システム誤差分散 $Q_{1,k}, Q_{2,k}$	$(0.1x_1)^2, (0.1x_2)^2$

以上のように初期条件と計算条件は平成 13 年洪水(5.5 節)と同等に与えた。 $H \sim Q$ 式は、対象洪水である昭和 56 年洪水終了後の水位～流量曲線を使用する。表5.15に示される a と b は式(4.33)で与えられる。また、 b_0 と b_1 は式(4.35)より算出した。

表5.15 水位～流量曲線（昭和 56 年）

曲線分類	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
適用期間	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24
適用水位(m)	-0.10～1.16	1.17～3.91	3.92～6.34	6.35～10.00
a	275.43	56.04	79.67	168.09
b	0.45	2.41	1.39	-1.02
b_0	-0.45	-2.41	-1.39	1.02
b_1	0.0603	0.1336	0.1120	0.0771

表5.16に、予測計算に必要な予測雨量（実測雨量）と実績水位を示す。また、流量および流出高は表5.15に示す水位～流量曲線を用いて算出した。

表5.16に示すように、ピーク水位は 74 時間目に起こっており、その値は 9.23m である。

表5.16 洪水データ一覧表

地点名 : 石狩大橋地点

洪水期間 : 昭和 56 年 8 月 3 日 1:00~9 日 24:00

時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)	時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)
1	0.00	0.32	0.05	163.30	43	5.27	4.42	0.76	2689.35
2	0.00	0.34	0.05	171.90	44	4.68	4.79	0.86	3042.79
3	0.00	0.33	0.05	167.57	45	4.13	5.11	0.95	3366.06
4	0.00	0.38	0.05	189.74	46	3.63	5.38	1.04	3651.51
5	0.00	0.44	0.06	218.17	47	3.19	5.63	1.11	3926.17
6	0.00	0.47	0.07	233.12	48	3.03	5.83	1.18	4153.07
7	0.00	0.47	0.07	233.12	49	3.11	5.98	1.23	4327.43
8	0.00	0.44	0.06	218.17	50	3.18	6.22	1.31	4613.86
9	0.00	0.40	0.06	199.00	51	3.42	6.40	1.38	4865.26
10	0.00	0.43	0.06	213.29	52	3.89	6.56	1.46	5158.95
11	0.00	0.42	0.06	208.47	53	4.43	6.68	1.53	5384.86
12	0.00	0.45	0.06	223.10	54	5.07	6.77	1.58	5557.48
13	0.00	0.48	0.07	238.22	55	5.64	6.85	1.62	5713.19
14	0.00	0.52	0.07	259.15	56	6.10	6.95	1.68	5910.87
15	0.00	0.51	0.07	253.84	57	6.51	7.06	1.74	6132.19
16	0.04	0.56	0.08	280.97	58	6.92	7.15	1.79	6316.30
17	0.06	0.61	0.09	309.47	59	7.06	7.24	1.84	6503.13
18	0.06	0.59	0.08	297.91	60	6.92	7.36	1.92	6756.48
19	0.08	0.61	0.09	309.47	61	6.80	7.50	2.00	7058.17
20	0.13	0.60	0.09	303.66	62	6.61	7.64	2.09	7366.44
21	0.15	0.56	0.08	280.97	63	6.34	7.78	2.18	7681.31
22	0.16	0.55	0.08	275.43	64	6.17	7.93	2.28	8025.98
23	0.18	0.54	0.08	269.95	65	6.00	8.07	2.37	8354.49
24	0.25	0.52	0.07	259.15	66	5.73	8.20	2.46	8665.44
25	0.89	0.52	0.07	259.15	67	5.48	8.33	2.55	8982.07
26	2.01	0.56	0.08	280.97	68	5.29	8.48	2.65	9354.48
27	2.96	0.55	0.08	275.43	69	5.06	8.68	2.80	9862.78
28	3.32	0.59	0.08	297.91	70	4.75	8.85	2.92	10305.41
29	3.38	0.68	0.10	351.70	71	4.40	8.98	3.02	10650.45
30	3.39	0.72	0.11	377.04	72	4.13	9.02	3.05	10757.76
31	3.53	0.82	0.13	444.24	73	3.96	9.18	3.17	11192.37
32	4.16	0.90	0.14	501.97	74	3.80	9.23	3.21	11329.95
33	4.93	0.98	0.16	563.23	75	3.59	9.17	3.17	11164.96
34	5.27	1.11	0.19	670.29	76	3.34	9.12	3.13	11028.38
35	5.44	1.24	0.21	746.59	77	3.09	9.03	3.06	10784.67
36	5.60	1.48	0.24	848.00	78	2.87	8.95	3.00	10570.32
37	5.43	1.77	0.28	979.15	79	2.70	8.86	2.93	10331.75
38	5.51	2.14	0.33	1160.17	80	2.61	8.80	2.88	10174.22
39	6.20	2.59	0.40	1401.00	81	2.45	8.78	2.87	10121.98
40	6.59	3.09	0.48	1695.21	82	2.22	8.76	2.86	10069.87
41	6.32	3.57	0.57	2004.01	83	2.00	8.72	2.83	9966.06
42	5.83	4.03	0.66	2340.42	84	1.81	8.68	2.80	9862.78

表5.16 洪水データ一覧表(つづき)

時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)	時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)
85	1.65	8.62	2.75	9708.88	127	0.05	5.00	0.92	3253.09
86	1.51	8.58	2.72	9606.95	128	0.04	4.92	0.90	3172.15
87	1.39	8.52	2.68	9455.06	129	0.04	4.84	0.88	3092.22
88	1.27	8.44	2.62	9254.43	130	0.04	4.73	0.85	2983.99
89	1.17	8.37	2.57	9080.64	131	0.04	4.66	0.83	2916.12
90	1.07	8.31	2.53	8932.99	132	0.04	4.57	0.80	2830.01
91	0.99	8.26	2.50	8810.88	133	0.03	4.50	0.78	2763.92
92	0.91	8.20	2.46	8665.44	134	0.03	4.39	0.75	2661.65
93	0.83	8.16	2.43	8569.16	135	0.03	4.32	0.74	2597.57
94	0.76	8.10	2.39	8425.75	136	0.03	4.26	0.72	2543.27
95	0.70	8.03	2.34	8259.96	137	0.03	4.20	0.71	2489.54
96	0.64	7.95	2.29	8072.50	138	0.04	4.11	0.68	2410.02
97	0.59	7.86	2.23	7864.19	139	0.05	4.04	0.67	2349.06
98	0.54	7.77	2.17	7658.60	140	0.10	3.98	0.65	2297.44
99	0.49	7.67	2.11	7433.36	141	0.17	3.93	0.64	2254.85
100	0.45	7.56	2.04	7189.48	142	0.31	3.87	0.63	2210.13
101	0.41	7.46	1.98	6971.30	143	0.43	3.82	0.62	2175.07
102	0.37	7.39	1.93	6820.57	144	0.55	3.76	0.60	2133.38
103	0.34	7.30	1.88	6629.20	145	0.77	3.68	0.59	2078.42
104	0.31	7.21	1.83	6440.55	146	1.02	3.63	0.58	2044.43
105	0.28	7.12	1.77	6254.63	147	1.17	3.56	0.57	1997.32
106	0.26	7.04	1.73	6091.65	148	1.29	3.52	0.56	1970.64
107	0.24	6.93	1.66	5871.06	149	1.49	3.48	0.55	1944.15
108	0.22	6.83	1.61	5674.06	150	1.61	3.45	0.55	1924.39
109	0.20	6.74	1.56	5499.64	151	1.57	3.43	0.54	1911.28
110	0.18	6.65	1.51	5327.93	152	1.41	3.39	0.53	1885.19
111	0.17	6.55	1.46	5140.34	153	1.20	3.38	0.53	1878.69
112	0.16	6.47	1.42	4992.69	154	1.02	3.37	0.53	1872.21
113	0.15	6.37	1.36	4811.16	155	0.83	3.36	0.53	1865.73
114	0.14	6.28	1.33	4686.90	156	0.66	3.34	0.53	1852.82
115	0.13	6.18	1.29	4565.48	157	0.52	3.33	0.52	1846.38
116	0.12	6.08	1.26	4445.66	158	0.41	3.31	0.52	1833.54
117	0.11	5.97	1.22	4315.69	159	0.33	3.29	0.52	1820.74
118	0.10	5.88	1.19	4210.79	160	0.26	3.27	0.51	1807.98
119	0.09	5.78	1.16	4095.75	161	0.22	3.24	0.51	1788.94
120	0.09	5.68	1.13	3982.30	162	0.18	3.19	0.50	1757.41
121	0.08	5.58	1.10	3870.44	163	0.15	3.16	0.49	1738.64
122	0.07	5.49	1.07	3771.13	164	0.13	3.12	0.49	1713.75
123	0.07	5.37	1.03	3640.73	165	0.11	3.07	0.48	1682.90
124	0.06	5.29	1.01	3555.07	166	0.10	3.02	0.47	1652.33
125	0.06	5.18	0.98	3438.95	167	0.09	2.98	0.46	1628.08
126	0.05	5.11	0.95	3366.06	168	0.08	2.93	0.45	1598.01

(3) 洪水予測シミュレーション

上記の初期条件、計算条件をもとに石狩大橋地点において、表5.16に示す河道効果を考慮した雨量と実績水位から算出した1時間～3時間先予測までの予測シミュレーションの結果を図5.8に示す。逐次更新されるパラメータ(c_{11} , c_{12} , c_{13})の値は初期値を100%として1時間ごとの変化率で図5.9に示す。モデル定数の時間変動率は小さく、10%以内に収まっている。また、1時間～3時間先予測までの予測水位と標準偏差およびパラメータの更新値を表5.18に示す。

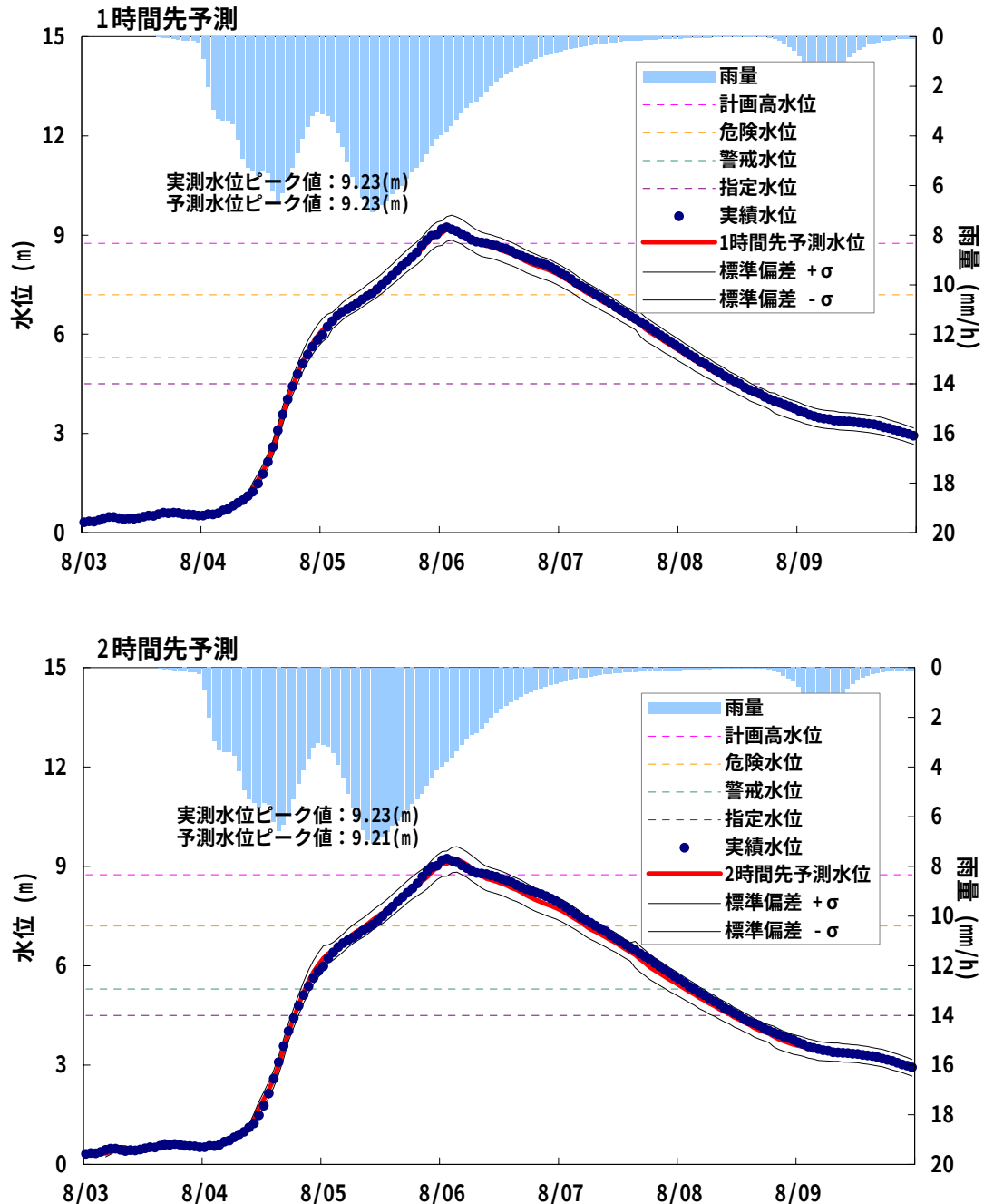


図5.8 洪水予測シミュレーション図 石狩大橋地点(昭和56年洪水)

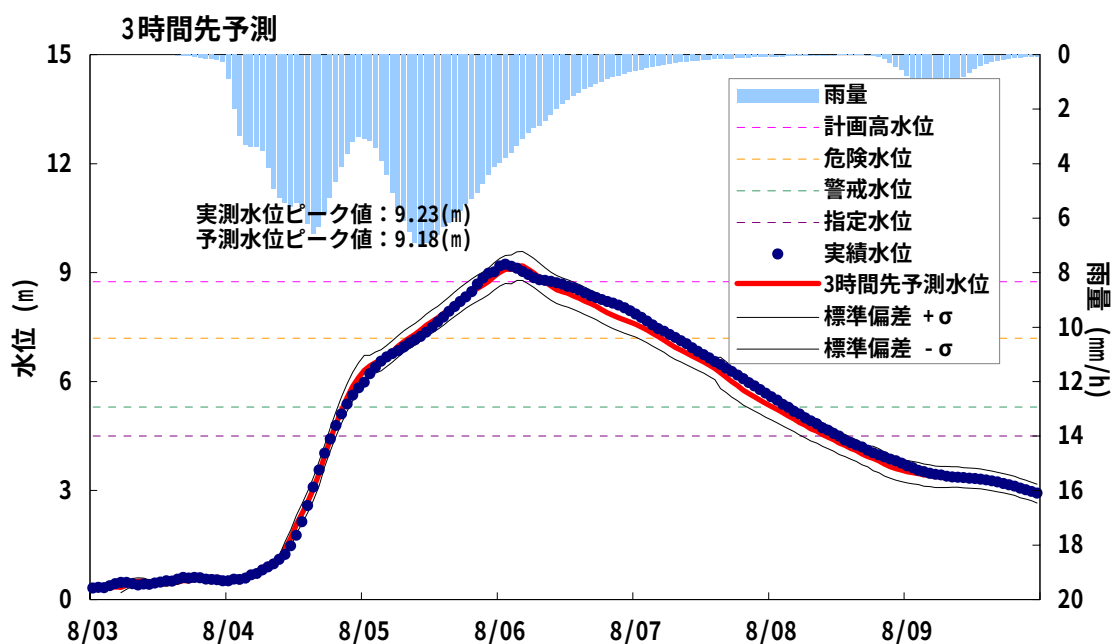


図5.8 洪水予測シミュレーション図 石狩大橋地点 (平成13年洪水)

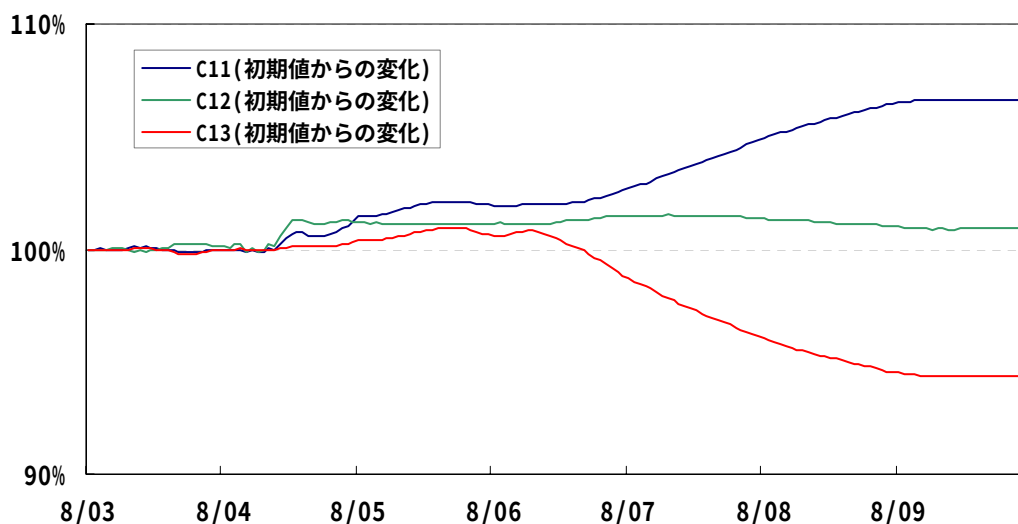


図5.9 パラメータ更新値の変化率

洪水の再現性を評価する方法として、予測水位 H_{ci} (m) と実測水位 H_{oi} (m) の平均 2 乗誤差の平方根 (RMSE: Root Mean Squares Error) を用いた。表5.17 に計算結果を示す。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_{ci} - H_{oi})^2} \quad (5.20)$$

表5.17 河道効果による降雨遅れを考慮した予測水位の比較

	1時間先予測	2時間先予測	3時間先予測
実測ピーク水位	9.23m	9.23m	9.23m
予測ピーク水位	9.23m	9.21m	9.18m
予測水位+標準偏差	9.61m	9.60m	9.58m
RMSE	0.07m	0.12m	0.17m

表5.18 洪水予測シミュレーション結果一覧表

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	C_{11}	C_{12}	C_{13}
1	0.32	0.32	0.32	0.11	0.17	0.23	6.4900	0.1590	1.7970
2	0.34	0.35	0.35	0.08	0.13	0.18	6.4900	0.1590	1.7970
3	0.33	0.33	0.33	0.07	0.10	0.14	6.4901	0.1590	1.7970
4	0.39	0.39	0.40	0.06	0.09	0.12	6.4896	0.1590	1.7968
5	0.45	0.46	0.48	0.05	0.08	0.10	6.4888	0.1591	1.7964
6	0.48	0.50	0.51	0.05	0.07	0.09	6.4881	0.1591	1.7962
7	0.49	0.50	0.51	0.05	0.07	0.08	6.4887	0.1591	1.7964
8	0.46	0.47	0.47	0.05	0.06	0.08	6.4917	0.1590	1.7969
9	0.42	0.42	0.43	0.05	0.06	0.07	6.4962	0.1588	1.7977
10	0.43	0.44	0.44	0.04	0.05	0.06	6.4949	0.1589	1.7974
11	0.43	0.43	0.43	0.04	0.05	0.06	6.4962	0.1588	1.7977
12	0.45	0.45	0.46	0.04	0.05	0.06	6.4939	0.1589	1.7972
13	0.48	0.48	0.49	0.04	0.05	0.06	6.4912	0.1590	1.7965
14	0.52	0.52	0.52	0.05	0.05	0.05	6.4877	0.1591	1.7956
15	0.51	0.52	0.52	0.05	0.05	0.05	6.4883	0.1591	1.7958
16	0.56	0.56	0.56	0.05	0.05	0.05	6.4848	0.1593	1.7947
17	0.61	0.61	0.61	0.05	0.05	0.05	6.4810	0.1594	1.7934
18	0.59	0.60	0.60	0.05	0.05	0.05	6.4820	0.1594	1.7937
19	0.61	0.61	0.61	0.05	0.05	0.05	6.4810	0.1594	1.7933
20	0.60	0.61	0.61	0.05	0.05	0.05	6.4816	0.1594	1.7936
21	0.57	0.57	0.57	0.05	0.05	0.05	6.4838	0.1593	1.7948
22	0.56	0.56	0.56	0.05	0.05	0.05	6.4848	0.1593	1.7954
23	0.54	0.55	0.56	0.05	0.05	0.05	6.4855	0.1592	1.7958
24	0.53	0.54	0.56	0.05	0.05	0.05	6.4868	0.1592	1.7967
25	0.53	0.56	0.59	0.05	0.05	0.05	6.4872	0.1592	1.7970
26	0.58	0.62	0.67	0.05	0.05	0.05	6.4856	0.1591	1.7960
27	0.59	0.64	0.71	0.05	0.05	0.06	6.4877	0.1593	1.7970
28	0.64	0.71	0.78	0.05	0.05	0.06	6.4880	0.1593	1.7971
29	0.74	0.82	0.91	0.05	0.06	0.07	6.4822	0.1588	1.7958
30	0.80	0.89	1.00	0.06	0.06	0.07	6.4858	0.1591	1.7964
31	0.91	1.01	1.14	0.06	0.07	0.08	6.4814	0.1588	1.7958
32	1.01	1.13	1.40	0.07	0.08	0.21	6.4834	0.1589	1.7960
33	1.11	1.35	1.69	0.07	0.19	0.23	6.4908	0.1593	1.7966
34	1.36	1.70	2.07	0.17	0.21	0.25	6.4899	0.1592	1.7966
35	1.60	1.97	2.36	0.19	0.23	0.27	6.5054	0.1599	1.7975
36	1.87	2.26	2.68	0.20	0.24	0.29	6.5221	0.1605	1.7984
37	2.18	2.59	3.04	0.22	0.26	0.32	6.5359	0.1610	1.7991
38	2.56	3.00	3.47	0.23	0.28	0.34	6.5410	0.1611	1.7994
39	3.03	3.50	3.97	0.25	0.30	0.30	6.5370	0.1610	1.7992
40	3.55	4.01	4.42	0.27	0.27	0.32	6.5292	0.1609	1.7988
41	4.03	4.43	4.83	0.25	0.29	0.34	6.5268	0.1608	1.7987
42	4.44	4.83	5.22	0.27	0.31	0.36	6.5264	0.1608	1.7986

表5.18 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	C_{11}	C_{12}	C_{13}
43	4.82	5.20	5.56	0.29	0.33	0.38	6.5283	0.1608	1.7987
44	5.18	5.54	5.87	0.30	0.34	0.39	6.5318	0.1609	1.7990
45	5.48	5.81	6.12	0.32	0.36	0.40	6.5391	0.1609	1.7995
46	5.73	6.03	6.31	0.33	0.37	0.41	6.5494	0.1610	1.8002
47	5.95	6.23	6.44	0.34	0.38	0.29	6.5590	0.1610	1.8011
48	6.13	6.37	6.53	0.35	0.26	0.29	6.5700	0.1609	1.8021
49	6.25	6.44	6.59	0.36	0.27	0.29	6.5826	0.1609	1.8034
50	6.42	6.57	6.71	0.25	0.27	0.29	6.5855	0.1609	1.8038
51	6.55	6.69	6.83	0.26	0.27	0.29	6.5878	0.1608	1.8041
52	6.70	6.84	6.97	0.26	0.28	0.29	6.5868	0.1609	1.8039
53	6.82	6.96	7.10	0.27	0.28	0.30	6.5886	0.1608	1.8042
54	6.92	7.06	7.20	0.27	0.28	0.30	6.5929	0.1608	1.8050
55	7.00	7.15	7.30	0.28	0.29	0.30	6.5983	0.1608	1.8060
56	7.11	7.26	7.42	0.28	0.29	0.30	6.6022	0.1607	1.8069
57	7.22	7.38	7.55	0.28	0.29	0.31	6.6054	0.1607	1.8077
58	7.32	7.49	7.66	0.29	0.30	0.31	6.6102	0.1607	1.8089
59	7.42	7.59	7.76	0.29	0.30	0.32	6.6155	0.1607	1.8103
60	7.54	7.71	7.88	0.30	0.31	0.32	6.6192	0.1607	1.8113
61	7.68	7.84	8.00	0.30	0.31	0.33	6.6215	0.1607	1.8120
62	7.81	7.97	8.13	0.31	0.32	0.34	6.6235	0.1607	1.8126
63	7.95	8.10	8.25	0.32	0.33	0.34	6.6253	0.1607	1.8131
64	8.09	8.23	8.37	0.32	0.33	0.35	6.6262	0.1607	1.8134
65	8.22	8.35	8.48	0.33	0.34	0.35	6.6271	0.1607	1.8137
66	8.34	8.46	8.57	0.34	0.34	0.36	6.6279	0.1607	1.8140
67	8.45	8.56	8.66	0.34	0.35	0.36	6.6283	0.1607	1.8142
68	8.59	8.68	8.76	0.35	0.35	0.37	6.6272	0.1607	1.8137
69	8.76	8.84	8.90	0.35	0.36	0.37	6.6234	0.1607	1.8121
70	8.91	8.97	9.01	0.36	0.37	0.38	6.6202	0.1607	1.8105
71	9.03	9.07	9.09	0.37	0.37	0.39	6.6180	0.1608	1.8094
72	9.06	9.08	9.09	0.37	0.38	0.39	6.6183	0.1608	1.8095
73	9.18	9.19	9.18	0.37	0.38	0.39	6.6151	0.1608	1.8074
74	9.23	9.21	9.18	0.38	0.39	0.40	6.6141	0.1609	1.8066
75	9.17	9.14	9.09	0.38	0.39	0.40	6.6152	0.1608	1.8076
76	9.10	9.05	8.99	0.38	0.39	0.40	6.6159	0.1608	1.8085
77	9.00	8.94	8.87	0.37	0.38	0.39	6.6168	0.1608	1.8098
78	8.90	8.83	8.75	0.37	0.38	0.39	6.6172	0.1607	1.8107
79	8.80	8.72	8.63	0.37	0.37	0.39	6.6175	0.1607	1.8115
80	8.72	8.63	8.53	0.36	0.37	0.38	6.6175	0.1607	1.8115
81	8.68	8.58	8.48	0.36	0.37	0.38	6.6175	0.1607	1.8101
82	8.65	8.54	8.43	0.36	0.36	0.38	6.6179	0.1608	1.8084
83	8.60	8.49	8.36	0.35	0.36	0.38	6.6184	0.1608	1.8068
84	8.55	8.43	8.30	0.35	0.36	0.38	6.6193	0.1609	1.8051

表5.18 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
85	8.49	8.35	8.22	0.35	0.36	0.37	6.6204	0.1609	1.8035
86	8.43	8.30	8.15	0.35	0.36	0.37	6.6221	0.1610	1.8014
87	8.37	8.22	8.07	0.35	0.36	0.37	6.6239	0.1610	1.7994
88	8.28	8.13	7.98	0.34	0.35	0.37	6.6257	0.1610	1.7977
89	8.21	8.05	7.90	0.34	0.35	0.37	6.6281	0.1611	1.7957
90	8.14	7.98	7.82	0.34	0.35	0.36	6.6314	0.1611	1.7933
91	8.08	7.92	7.76	0.33	0.34	0.36	6.6355	0.1612	1.7904
92	8.02	7.86	7.69	0.33	0.34	0.36	6.6398	0.1612	1.7876
93	7.98	7.81	7.64	0.33	0.34	0.36	6.6454	0.1613	1.7843
94	7.92	7.75	7.58	0.33	0.34	0.36	6.6507	0.1613	1.7813
95	7.84	7.67	7.50	0.32	0.34	0.35	6.6560	0.1613	1.7786
96	7.76	7.59	7.42	0.32	0.33	0.35	6.6610	0.1614	1.7760
97	7.67	7.50	7.33	0.32	0.33	0.35	6.6658	0.1614	1.7737
98	7.58	7.41	7.24	0.31	0.33	0.34	6.6709	0.1614	1.7714
99	7.49	7.31	7.14	0.31	0.32	0.34	6.6757	0.1614	1.7693
100	7.38	7.21	7.04	0.30	0.32	0.34	6.6800	0.1614	1.7674
101	7.28	7.11	6.94	0.30	0.31	0.33	6.6850	0.1614	1.7654
102	7.21	7.04	6.87	0.29	0.31	0.33	6.6922	0.1614	1.7625
103	7.12	6.95	6.79	0.29	0.30	0.32	6.6985	0.1614	1.7601
104	7.03	6.87	6.71	0.29	0.30	0.32	6.7046	0.1615	1.7578
105	6.94	6.78	6.62	0.28	0.30	0.32	6.7109	0.1614	1.7556
106	6.86	6.70	6.55	0.28	0.29	0.31	6.7178	0.1614	1.7531
107	6.76	6.60	6.45	0.27	0.29	0.31	6.7226	0.1614	1.7514
108	6.66	6.51	6.36	0.27	0.28	0.30	6.7279	0.1614	1.7497
109	6.57	6.42	6.24	0.27	0.28	0.43	6.7339	0.1614	1.7477
110	6.49	6.34	6.12	0.26	0.40	0.43	6.7399	0.1614	1.7457
111	6.39	6.20	5.99	0.26	0.39	0.42	6.7450	0.1614	1.7441
112	6.30	6.09	5.89	0.37	0.39	0.41	6.7514	0.1614	1.7421
113	6.16	5.96	5.76	0.36	0.38	0.41	6.7562	0.1614	1.7406
114	6.06	5.86	5.67	0.36	0.37	0.40	6.7633	0.1613	1.7385
115	5.96	5.77	5.58	0.35	0.37	0.39	6.7705	0.1613	1.7364
116	5.87	5.68	5.49	0.35	0.36	0.39	6.7775	0.1613	1.7343
117	5.77	5.58	5.40	0.34	0.36	0.38	6.7836	0.1613	1.7325
118	5.68	5.50	5.32	0.34	0.35	0.37	6.7907	0.1612	1.7305
119	5.58	5.41	5.23	0.33	0.35	0.37	6.7970	0.1612	1.7287
120	5.49	5.31	5.14	0.33	0.34	0.36	6.8030	0.1612	1.7270
121	5.39	5.22	5.06	0.32	0.34	0.36	6.8087	0.1612	1.7254
122	5.31	5.14	4.98	0.32	0.33	0.35	6.8149	0.1611	1.7237
123	5.19	5.03	4.87	0.31	0.33	0.35	6.8189	0.1611	1.7226
124	5.11	4.96	4.80	0.31	0.32	0.34	6.8250	0.1611	1.7209
125	5.01	4.86	4.70	0.31	0.32	0.34	6.8293	0.1611	1.7197
126	4.94	4.79	4.64	0.30	0.31	0.33	6.8357	0.1610	1.7180

表5.18 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	C_{11}	C_{12}	C_{13}
127	4.84	4.69	4.55	0.30	0.31	0.33	6.8395	0.1610	1.7170
128	4.76	4.62	4.47	0.29	0.30	0.32	6.8448	0.1610	1.7156
129	4.68	4.54	4.40	0.29	0.30	0.32	6.8500	0.1610	1.7142
130	4.58	4.44	4.31	0.28	0.30	0.31	6.8530	0.1609	1.7134
131	4.51	4.38	4.24	0.28	0.29	0.31	6.8582	0.1609	1.7120
132	4.43	4.29	4.17	0.28	0.29	0.30	6.8622	0.1609	1.7110
133	4.36	4.23	4.10	0.27	0.28	0.30	6.8671	0.1609	1.7097
134	4.26	4.13	4.01	0.27	0.28	0.29	6.8693	0.1608	1.7092
135	4.19	4.06	3.94	0.26	0.27	0.29	6.8735	0.1608	1.7081
136	4.13	4.01	3.88	0.26	0.27	0.34	6.8786	0.1608	1.7067
137	4.07	3.95	3.82	0.26	0.27	0.33	6.8836	0.1608	1.7055
138	3.99	3.87	3.73	0.26	0.31	0.33	6.8863	0.1607	1.7048
139	3.92	3.79	3.66	0.30	0.31	0.32	6.8899	0.1607	1.7039
140	3.85	3.72	3.60	0.30	0.31	0.32	6.8940	0.1607	1.7028
141	3.80	3.68	3.56	0.29	0.30	0.32	6.8987	0.1607	1.7016
142	3.74	3.63	3.52	0.29	0.30	0.31	6.9029	0.1606	1.7006
143	3.70	3.59	3.50	0.29	0.30	0.31	6.9073	0.1606	1.6994
144	3.65	3.55	3.47	0.28	0.29	0.30	6.9109	0.1606	1.6985
145	3.58	3.50	3.43	0.28	0.29	0.30	6.9127	0.1606	1.6980
146	3.54	3.47	3.41	0.28	0.29	0.30	6.9153	0.1605	1.6973
147	3.49	3.43	3.38	0.28	0.28	0.29	6.9163	0.1605	1.6971
148	3.46	3.41	3.38	0.27	0.28	0.29	6.9180	0.1605	1.6966
149	3.43	3.40	3.38	0.27	0.28	0.29	6.9191	0.1605	1.6963
150	3.41	3.39	3.38	0.27	0.28	0.28	6.9200	0.1605	1.6960
151	3.41	3.39	3.38	0.27	0.27	0.28	6.9206	0.1604	1.6958
152	3.38	3.36	3.35	0.27	0.27	0.28	6.9201	0.1605	1.6960
153	3.37	3.36	3.35	0.27	0.27	0.28	6.9202	0.1605	1.6960
154	3.36	3.35	3.33	0.27	0.27	0.27	6.9203	0.1604	1.6959
155	3.35	3.34	3.32	0.27	0.27	0.27	6.9203	0.1604	1.6959
156	3.33	3.31	3.29	0.27	0.27	0.27	6.9201	0.1605	1.6960
157	3.31	3.29	3.27	0.26	0.27	0.27	6.9202	0.1605	1.6960
158	3.29	3.27	3.24	0.26	0.27	0.27	6.9201	0.1605	1.6960
159	3.27	3.24	3.20	0.26	0.26	0.27	6.9201	0.1605	1.6960
160	3.24	3.21	3.17	0.26	0.26	0.26	6.9202	0.1605	1.6960
161	3.21	3.17	3.13	0.26	0.26	0.26	6.9202	0.1605	1.6960
162	3.16	3.11	3.07	0.26	0.26	0.26	6.9199	0.1605	1.6962
163	3.12	3.07	3.03	0.26	0.26	0.26	6.9200	0.1605	1.6961
164	3.08	3.03	2.98	0.25	0.26	0.26	6.9200	0.1605	1.6961
165	3.02	2.97	2.92	0.25	0.25	0.26	6.9199	0.1605	1.6962
166	2.97	2.92	2.86	0.25	0.25	0.25	6.9199	0.1605	1.6962
167	2.93	2.87	2.81	0.25	0.25	0.25	6.9200	0.1605	1.6961
168	2.87	2.81	2.75	0.25	0.25	0.25	6.9201	0.1605	1.6960

5.7 Fortran プログラム

河道効果による降雨遅れ時間を考慮して、各分割流域の流域平均雨量($\text{rain}(j, \text{nb})$)より合成雨量($\text{rave}(j)$)を計算する Fortran プログラムと入力変数名を以下に示す。なおナッシュモデルによる計算結果すなわち $\text{rave}(j)$ を第4章に示す降雨入力値とし、カルマン・フィルターを適用して石狩大橋地点の水位予測を行った。

(1) 主プログラムの機能

各分割流域の流域平均雨量($\text{rain}(j, \text{nb})$)および表5.1に示されるパラメータ α ($\text{tl}(j)$) と流域面積($\text{subare}(j)$)を読み込む。

(2) サブプログラムの機能

(a) Subroutine `ravetl`

式(5.17)より加重平均し、予測地点の補正雨量(**合成雨量**) r^* を求める。

(b) Subroutine `nash`

ナッシュモデルの数値解法を行い、補正降雨量 y (各分割流域の河道効果を考慮した雨量)を算出する。

(3) 主な入力変数の内容

(a) Input Data

<code>fldname</code>	洪水名
<code>iy, im, id, ih</code>	開始年月日時
<code>nr</code>	各分割流域の雨量データ数
<code>sbname(nb)</code>	分割流域名
<code>rain(j, nb)</code>	各分割流域の雨量データ
<code>ysname</code>	地点名
<code>nbsn</code>	使用する分割流域数
<code>area</code>	流域面積(km ²)
<code>nob(j)</code>	分割流域ナンバー
<code>tl(j)</code>	表5.1におけるパラメータ α
<code>subare(j)</code>	各分割流域の流域面積

(b) Main Program

<code>rave(j)</code>	合成雨量 r^*
----------------------	------------

(c) Subroutine `ravetl`

<code>alph</code>	表5.1におけるパラメータ α
<code>rtl(j)</code>	各分割流域の河道効果を考慮した雨量

(d) Subroutine `nash`

qin	流域平均雨量
qout	河道効果を考慮した雨量 y
f1~f4	式(5.11)における $\phi_{11} \sim \phi_{22}$
g2,g4	式(5.12)における γ_{12}, γ_{22}
y(1),y(2)	式(5.15)における $z_{1,k+1}, z_{2,k+1}$

(4) データ入力**(a) rave_data <各分割流域における流域平均雨量入力ファイル>**

平成 13 年 9 月 9 日洪水

2001 9 9 1

168

1. 石狩川上流

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.46	2.42	2.38
3.00	4.74	1.36	0.14	1.70	3.56	4.90	5.58	3.67
0.24	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.31	0.03
0.00	0.00	0.03	0.18	1.29	0.87	0.49	1.40	2.90
4.44	4.07	2.82	3.99	1.63	2.20	3.63	6.28	3.93
3.59	2.91	4.37	5.01	5.99	7.45	4.73	3.66	3.73
5.23	4.24	4.28	0.96	0.65	1.01	0.99	1.80	1.40
1.19	0.99	0.38	0.13	0.47	0.36	0.21	0.22	0.73
0.03	0.29	0.16	0.29	0.31	0.35	0.23	0.20	0.17
0.00	0.00	0.03	0.14	0.08	0.04	0.00	0.00	0.00
0.02	0.06	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.04	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

2. 雨竜川

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00
0.00	0.52	4.42	10.68	9.61	5.86	2.64	2.04	0.95	0.36
0.80	1.16	0.55	0.22	0.15	1.99	4.91	2.99	1.22	1.45
1.38	2.12	5.33	5.08	2.05	4.40	8.33	3.92	3.42	1.70
2.25	5.08	5.45	4.97	3.62	2.40	3.54	4.02	3.43	1.89
2.04	1.98	2.43	3.38	4.58	4.97	3.32	3.26	3.20	2.59
2.13	1.30	0.60	0.22	0.31	0.37	0.18	0.07	0.11	0.00
0.00	0.14	0.12	0.00	0.07	0.46	0.32	0.00	0.36	0.16
0.32	0.41	0.30	0.17	0.07	0.02	0.00	0.06	0.00	0.00
0.00	0.09	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

3. 空知川

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	1.00	1.75	2.24
2.16	0.52	0.23	0.28	0.52	0.57	1.60	0.44	0.35	0.02
0.00	0.02	0.00	0.00	0.09	0.00	0.00	0.02	0.05	0.00
0.02	0.22	0.10	0.05	0.14	0.24	0.22	0.52	2.19	3.01
3.33	1.86	2.21	2.22	1.81	4.46	5.99	7.09	3.97	7.56
5.11	6.72	7.33	7.60	10.06	10.24	6.07	5.72	5.53	6.25
6.79	7.07	5.07	3.44	2.65	2.16	1.41	2.31	2.47	3.25

5. 河道効果による降雨遅れのモデル化

	4.02	2.39	0.38	0.41	0.40	0.10	0.43	0.50	0.30	0.27
	0.10	0.20	0.24	0.27	0.39	0.12	0.25	0.90	0.42	0.25
	0.09	0.06	0.00	0.15	0.05	0.05	0.10	0.07	0.10	0.05
	0.06	0.00	0.00	0.00	0.11	0.00	0.00	0.06	0.07	0.05
	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4. 幾春別川	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.40	0.50	0.15	0.21
	1.12	0.15	1.21	0.76	0.40	0.00	0.27	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14	0.51	0.05
	0.14	0.24	0.48	0.20	0.00	0.00	1.29	4.44	2.87	0.52
	1.15	0.72	0.80	1.07	3.72	7.45	4.45	3.34	2.96	3.94
	4.86	6.11	8.27	9.16	9.53	7.43	7.41	6.56	5.27	5.68
	5.65	6.59	5.59	3.49	1.05	0.81	1.13	2.52	1.73	1.73
	2.44	0.90	0.14	0.43	0.11	0.55	0.43	0.84	0.11	0.00
	0.00	0.05	0.00	0.41	0.11	0.00	0.00	0.93	0.36	0.11
	0.00	0.07	0.00	0.00	0.11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	0.00
	0.00	0.00	0.51	0.35	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5. 夕張川	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.79	0.70	0.63	2.51
	0.37	1.15	1.15	0.46	0.66	0.38	0.42	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.26	0.51	0.06	1.01	0.37
	0.35	0.31	0.55	0.07	0.27	0.15	1.32	3.98	4.98	2.92
	0.69	0.58	0.77	1.34	2.74	3.73	4.73	1.22	1.91	3.66
	4.25	8.56	9.09	10.43	13.32	9.39	8.62	7.46	7.12	6.97
	7.25	8.02	5.28	4.69	2.12	1.28	0.72	1.96	2.57	5.14
	4.22	1.83	0.88	0.28	0.40	0.50	1.13	0.35	0.06	0.00
	0.18	0.16	0.00	0.12	0.00	0.30	0.26	0.92	0.82	0.10
	0.01	0.55	0.36	0.00	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.60	0.00	0.00	0.00	0.01	0.30	0.00
	0.10	0.26	0.00	0.00	0.00	0.26	0.40	0.07	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00
6. 千歳川	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.00	0.17	0.14	0.08	0.35
	0.00	0.17	0.60	0.12	0.59	0.74	0.69	0.00	0.17	0.48
	0.26	0.19	0.20	0.27	0.26	0.21	0.40	0.47	0.58	0.74
	0.38	0.26	0.07	0.46	0.44	0.60	1.61	2.71	1.63	1.74
	1.83	1.08	0.66	1.39	2.97	4.47	2.26	1.34	1.99	3.36
	7.47	8.74	8.46	10.38	9.27	7.91	9.12	8.45	8.28	9.06
	9.78	8.73	5.42	5.44	3.29	1.74	1.81	2.39	3.29	5.16
	4.19	1.87	1.76	1.08	0.53	1.05	1.69	0.89	0.63	0.68
	0.30	0.10	0.08	0.08	0.13	0.00	0.00	0.21	0.27	0.10
	0.10	0.14	0.02	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00	0.23	0.00	0.00
	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00

	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7. 豊平川									
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.23	0.16	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.22	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19	0.00	0.08	1.41	0.88
	2.76	6.96	6.44	2.46	5.12	10.89	4.78	2.62	3.43
	7.10	6.76	8.12	8.18	6.17	4.98	7.37	7.79	9.18
	7.44	6.85	4.12	1.68	1.50	1.78	1.78	1.43	1.07
	1.23	0.35	0.34	0.43	0.12	0.38	1.68	0.94	0.37
	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.23	0.38	0.36	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.08	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11
	0.06	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8. 石狩川残(1)									
	0.00	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.11	0.00
	0.00	0.22	0.34	6.78	14.37	10.42	10.27	7.17	5.09
	0.11	0.06	0.26	0.26	0.71	0.41	1.00	1.97	1.25
	0.78	0.65	1.71	1.06	3.23	5.35	5.48	5.22	4.06
	1.08	4.94	6.01	5.04	3.75	3.02	5.32	3.31	3.40
	3.42	3.35	3.91	5.12	6.71	6.13	4.54	5.28	5.21
	2.59	3.62	1.98	0.78	1.12	0.84	0.51	0.75	0.49
	0.46	0.48	0.58	0.24	0.39	0.86	0.62	0.38	0.46
	0.10	0.29	0.00	0.18	0.10	0.11	0.27	0.25	0.00
	0.00	0.13	0.00	0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9. 石狩川残(2)									
	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.28	0.00
	0.00	0.00	0.63	0.45	4.18	4.94	2.14	2.13	1.06
	0.15	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.18	0.37	0.35
	0.56	0.56	1.29	0.00	0.00	1.21	4.43	9.27	2.44
	0.29	1.93	3.82	3.23	2.48	2.91	2.50	1.48	3.54
	3.64	4.06	4.74	6.75	7.54	6.20	6.06	6.52	6.11
	4.75	4.78	3.29	1.07	0.66	0.58	1.24	0.85	0.98
	1.50	0.64	0.28	0.72	0.19	0.28	0.35	1.19	0.15
	0.44	0.00	0.00	0.21	0.01	0.00	0.47	1.21	0.00
	0.19	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.22	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.20	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

5. 河道効果による降雨遅れのモデル化

10. 石狩川残(3)

0.00	0.28	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17	0.00	0.00
0.00	0.00	0.04	0.21	2.80	4.23	3.70	1.33	0.34	0.09
0.01	0.00	0.00	0.28	0.27	0.09	0.72	0.02	0.62	0.10
0.02	0.17	0.58	0.00	0.00	0.79	1.21	1.58	2.20	0.22
1.01	5.46	7.73	2.20	1.60	3.91	3.93	1.84	2.21	2.97
3.35	3.90	4.32	6.17	6.39	4.57	4.90	5.48	6.46	5.63
3.60	4.68	2.34	0.84	0.74	1.05	0.38	1.21	0.38	0.60
0.54	0.56	0.17	0.32	0.76	0.26	0.32	1.25	0.01	0.16
0.48	0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.43	0.43	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

(b) rnash_data <予測地点におけるパラメータ α と流域面積入力ファイル>

石狩大橋

8 12696.7

1	2	3	4	5	6	8	9
9.0	7.0	5.0	3.0	2.0	2.0	3.0	1.0
3558.0	1660.7	2531.1	324.7	1115.7	1141.8	1193.4	1171.3

(5) 計算出力

平成 13 年 9 月 9 日洪水

2001 9 9 1

168 石狩大橋

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.05	0.08	0.13
0.19	0.25	0.33	0.44	0.70	1.04	1.27	1.40	1.45	1.43
1.36	1.28	1.19	1.11	1.03	0.96	0.92	0.90	0.89	0.88
0.86	0.84	0.84	0.82	0.80	0.84	1.01	1.38	1.60	1.62
1.57	1.59	1.70	1.83	1.94	2.08	2.25	2.36	2.47	2.60
2.79	3.08	3.43	3.84	4.31	4.68	4.91	5.06	5.14	5.18
5.18	5.16	5.05	4.80	4.46	4.09	3.74	3.44	3.20	3.04
2.97	2.85	2.67	2.46	2.23	2.02	1.86	1.73	1.59	1.44
1.31	1.18	1.06	0.97	0.88	0.80	0.75	0.73	0.70	0.65
0.59	0.55	0.50	0.46	0.42	0.38	0.35	0.32	0.29	0.26
0.24	0.21	0.19	0.18	0.17	0.16	0.14	0.13	0.12	0.12
0.11	0.10	0.10	0.09	0.09	0.08	0.08	0.07	0.06	0.06
0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02
0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

(6) プログラムリスト

```

      program mkrnash
c-----
c      ナッシュモデルによる雨ずらし後流域平均雨量計算
c
c      mkrnash rave_data < rnash_data > out
c-----
c
      character sbname(100)*40,ysname*40,flename*40
      character rfile*40
      real rain(200,100),rave(200)
      common /rrrrr/ nbsn,area,tl(100),subare(100),nob(100)
c
      call igetarg(1,rfile)
      open(1,file=rfile,status='old')
      rewind 1
      read(1,'(a40)') flename
      write(6,'(a40)') flename
      read(1,'(10i5)') iy,im,id,ih
      write(6,'(10i5)') iy,im,id,ih
      read(1,'(i5)') nr
c
      nrmax=0
      nb=0
1000  nb=nb+1
      read(1,'(a40)',end=1090) sbname(nb)
      read(1,'(10f8.0)') (rain(j,nb),j=1,nr)
      go to 1000
1090  kazu=nb-1
c
3000  continue
      read(5,'(a40)',end=9999) ysname
      read(5,'(i5,f8.0)') nbsn,area
      read(5,'(10i8)') (nob(j),j=1,nbsn)
      read(5,'(10f8.0)') (tl(j),j=1,nbsn)
      read(5,'(10f8.0)') (subare(j),j=1,nbsn)

      call ravetl(nr,rain,rave)
c
      write(6,'(i5,a40)') nr,ysname
      write(6,'(10f8.2)') (rave(j),j=1,nr)
      go to 3000
9999  continue
      stop
      end
c
c-----
      subroutine ravetl(nc,rain,rave)
c-----
      real rain(200,100),rave(200),rtl(200)
      common /rrrrr/ nbsn,area,tl(100),subare(100),nob(100)
c
      do 2500 j=1,nc
2500  rave(j)=0.0
          do 1000 nb=1,nbsn
              nor=nob(nb)
              if(tl(nb).le.0.0) alph=0.0
              if(tl(nb).gt.0.0) alph=tl(nb)

```

5. 河道効果による降雨遅れのモデル化

```

c
    if(alph.gt.0.0) then
        call nash(nc,alph,rain(1,nor),rtl)
    else
        do 1020 j=1,nc
1020    rtl(j)=rain(j,nor)
        endif
c
        acoef=subare(nb)/area
        do 1100 j=1,nc
            rave(j)=rave(j)+rtl(j)*acoef
1100    continue
1000    continue
        return
        end
c
c-----
        subroutine nash(nc,alph,qin,qout)
c-----
        real qin(1),qout(1),x(2),y(2)
c
        nl=12
        h=1.0/float(nl)
        h2=h*h
        h3=h2*h
        h4=h3*h
        a1=-1./alph**2
        a2=-2./alph
        a3=a1+a2**2
        a4=a1+a3
        f1 = 1. +0.5*a1*h2+a1*a2*h3/6.+a1*a3*h4/24.
        f2 = h*(1. + 0.5*a2*h+a3*h2/6.+a2*a4*h3/24.)
        f3 = a1*f2
        f4 = 1. +a2*h+0.5*a3*h2+a2*a4*h3/6.+
&    (a1*a3+a2**2*a4)*h4/24.
        g2 = h2*(0.5+a2*h/6.+a3*h2/24.)
        g4=f2
c
        x(1)=0.0
        x(2)=0.0
c
        do j=1,nc
            b1=qin(j)/alph**2
            do k=1,nl
                y(1) = f1*x(1)+f2*x(2)+g2*b1
                y(2) = f3*x(1)+f4*x(2)+g4*b1
                do i=1,2
                    x(i)=y(i)
                end do
            end do
            qout(j)=x(1)
        end do
        return
        end

```

6. 予測雨量の誤差を考慮した洪水予測モデルの開発

実時間洪水流出予測に関する最大の課題は降雨予測精度をいかに向上させるかにある。近年、アメダスや雨量レーダ等の観測体制の整備に伴い、それらの情報を取り入れた短時間降雨予測モデルの開発が進められてきているが、実用面での適用にあたっては、まだ越えなければならない壁がいくつか残されている^{25,26,27)}。

数時間先の降雨分布を数キロメートルの分解能で予測する手法は短時間降雨予測手法と呼ばれている。現在、実用化されている予測手法は、雨量レーダを用いることにより降雨分布の移動パターンを捉えて予測する運動学的手法が主流であり、「**移流モデル**」はその代表例である²⁴⁾。運動学的手法による降雨予測精度は、実用上精々1時間先程度が限界であり²⁶⁾、一級河川水系の流域規模で必要となる実時間洪水予測においては、より長いリードタイムでの降雨予測精度の向上が必須条件であり、そのための短時間降雨予測手法の開発が望まれている。

今後は流域と河道要素から成る複合流域における分布型流出モデルを用いた洪水予測手法が普及してくると予想される。この場合、任意の流域における降雨予測値及びその空間相関構造を考慮し、下流基準点における流量ないし水位の最確値及び予測誤差分布を評価できるモデル構築も必要となる^{28,29)}。いずれにせよ、レーダ観測情報を活用した予測降雨とその予測誤差分散をいかに効率よく洪水予測システムに反映していくかを検討しておく必要がある。本章では、システム入力である降雨量を「**状態変量**」に加えて、システム方程式の拡大を図り、予測雨量の誤差分散を取り入れた洪水予測システムを構築する。

6.1 予測雨量の誤差評価

カルマン・フィルタ予測理論を適用して実時間流出予測を行う場合、流出量やその他の変数からなる状態変量は確率変数として取り扱われ、その最良推定値や誤差分散は伝達方程式を介して、逐次計算される。したがって、出力である流量あるいは水位の予測値精度を定量的に評価するためには、入力である雨量の誤差特性を正確に把握することが不可欠となる。換言すれば、採用する洪水予測モデルは、降雨予測精度が流出予測精度に及ばず影響を精査することができるシステムを兼ね備えていなければならない。

降雨予測値とその誤差分散の定量化は、降雨予測シミュレーターの開発が緒となっている³⁰⁾。現時刻 t_k から l 時間後の降雨実現値を r_{k+l} とし、その予測値を $\hat{r}_{k+l}$ とする。今、予測誤差の平均値を0、その誤差分散が S_{k+l}^2 となるように、 $\hat{r}_{k+l}$ を求めようとするとき、次式が成立する。

$$E(\hat{r}_{k+l} - r_{k+l}) = 0, \quad E[(\hat{r}_{k+l} - r_{k+l})^2] = S_{k+l}^2 \quad (6.1)$$

ここに、 $E(\cdot)$ ：期待値演算子

すなわち、式(6.1)の第1式により、次式が得られる。

$$E(\hat{r}_{k+l}) = r_{k+l} \quad (6.2)$$

式(6.2)は予測値の期待値は実現値に一致していることを意味する。

式(6.1)を満たす $\hat{r}_{k+l} > 0$ の確率密度関数は種々考えられる。 $\hat{r}_{k+l} > 0$ の制約条件を考慮して、負値をゼロで置換える片側正規分布(truncated normal distribution)を $\hat{r}_{k+l}$ の確率モデルとして採用し、正規分布の平均値と分散を求める。その結果、降雨予測誤差分散 S_{k+l}^2 は次式で与えられる。

$$\text{Var}(\hat{r}_{k+l}) = S_{k+l}^2 = a_p^2 l r_{k+l}^2 \quad (6.3)$$

ここに、 a_p^2 : 比例定数、 $\text{Var}(\cdot)$: 分散

式(6.3)は統計的にも重要な意味を持つ。 (S_{k+l}/r_{k+l}) は変動係数を表すから、式(6.3)は変動係数の2乗が予測時間(リードタイム) l に比例していることになる。 $a_p = 0$ の場合、完全降雨予測となる。しかしながら $a_p^2 > 0$ であっても、 $r_{k+l} = 0$ のとき、分散がゼロとなって不合理である。したがって、 $r_{k+l} = 0$ の場合、 $r_{k+l} = 0.1 \text{ mm/h}$ 程度の小さい値を想定して分散を計算した方が得策である²⁴⁾。

式(6.3)を実際問題に適用する場合、比例定数 a_p の値を決定しなければならない。沖縄の八重岳雨量レーダ情報を基に、移流モデル²⁴⁾を用いて3時間先までの降雨予測を行い、予測雨量と地上実測雨量の誤差を統計処理して、 $a_p = 0.47$ の値を得ている²⁵⁾。同様に、中部地方の御在所レーダによる降雨予測例では、 $a_p = 0.41$ となっている²⁵⁾。石狩川の支川である雨竜川流域における3洪水例を対象に道央レーダ情報を用いた予測結果では、 $a_p = 0.37$ の値を得ている³²⁾。 a_p の値は対象流域の大きさにも依存する。レーダ雨量計が全国的規模で整備されているとは言え、 a_p の決定には、何らかの短時間降雨予測手法と膨大なデータ処理が必要となる。

移流モデルによる降雨予測においては、以下のような課題も指摘されている¹¹⁾。

- (a) 豪雨域がある一方向に進んで、その空間分布が定常状態を保つ時には、雨量強度は統計的には減少していくはずである。しかしながら、移流モデルによる降雨予測結果においては、実測雨量の平均値が予測雨量のそれより小さくなり、リードタイム(予測時間)が大きくなればなる程、その傾向が顕著となる。
- (b) 式(6.3)に示されるように、予測誤差標準偏差 S_{k+l} は実測雨量 r_{k+l} に比例している。しかしながら、観測結果を検討すると、弱い雨の予測誤差は比例関係式で推定される値より大きく、強い雨の場合にはその逆の関係にあることが判明した。したがって、式(6.3)から求められる分散と実現象との間に大きな差異が見られる。
- (c) 前述したように、式(6.3)の導出にあたっては、片側正規分布(降雨発生器において負値をゼロで置換えて正規分布をあてはめる)が採用されている。水文統計学では、負値の発生を防ぐために、2母数ガンマ分布が確率モデルとして用いられることが多い。しかも、形状母数の値の違いにより、種々の分布形状が表現できるのもガンマ分布が多用される重要な理由である。

ランク分けされた予測雨量に対応する1～3時間先の実測雨量データにガンマ分布をあてはめた結果、次の予測降雨の誤差分散が定式化された¹¹⁾。

$$\text{Var}(\hat{r}_{k+l}) = S_{k+l}^2 = a_s^2 l r_{k+l}^{2b_s} \quad (6.4)$$

ここに、 a_s , b_s : 予測定数、 l : リードタイム(h)

前述した八重岳レーダ(沖縄)と御在所レーダ(中部)による豪雨情報量を再整理して、定数が以下のよ

うに決定されている。

$$a_s = 1.37, \quad b_s = 0.64 \quad (6.5)$$

式(6.5)の予測定数がどこの地点においても適用可能かどうかの疑問は残るが、本報告での予測降雨誤差分散算定式として、式(6.4)と式(6.5)を用いて解析を行うこととする。式(6.3)の取り扱いと同様に、 $r_{k+l} = 0$ のとき、分散がゼロとなる不合理を避けるために、 $r_{k+l} = 0.1 \text{ mm/h}$ と小さな値を想定して計算を進める。

6.2 システム方程式の定式化

第3章で既に述べた損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)を流出モデルとして採用する。それを再記すれば次式で示される。

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r - q - b + q_0 \\ s = k_{11} q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ b = k_{13} q \\ q_0 = q_B \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad (6.6)$$

ここで、 s : 貯留高(mm)、 r : 観測雨量(mm/h)、 q : 計算流出高(mm/h)、 b : 損失高(mm/h)、 q_0 : 基底流出高(mm/h)、 q_B : 初期流出高(mm/h)、 k_{11}, k_{12} : 貯留係数、 k_{13} : 損失係数、 p_1, p_2 : 貯留指数、 λ : 減衰係数

また k_{11} と k_{12} および k_{13} は、次式で表現される。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11} A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ c_{13} = k_{13} + 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

ここで、 A : 流域面積(km^2)、 $\bar{r}$: 平均雨量強度(mm/h)、 c_{11}, c_{12}, c_{13} : 未知定数

式(6.6)を解くために、次の変数を「状態変量」に選定する。

$$\begin{cases} x_1 = q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (6.8)$$

モデル定数 c_{11}, c_{12}, c_{13} および予測雨量 r は、洪水毎に変化することが予想される。したがって、

c_{11}, c_{12}, c_{13} および予測雨量 r も「状態変量」に加えてシステム方程式を作成する。
すなわち、状態変量をベクトル表示すると以下のように示される。

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

ここで、

$$X_1 = [x_1 \ x_2]^T, \quad X_2 = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]^T, \quad X_3 = r \quad (6.10)$$

6.3 状態変量の伝達方程式

洪水予測では、状態変量の伝達方程式は l 時間先の流量、水位を予測することに対応しているので、
表 4.2に示す**式(6)「状態変量の伝達方程式」**について定式化を行う。

まず、式(6.6)を式(6.8)の状態変量で表すと次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}, r) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}, r) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \end{cases} \quad (6.11)$$

このとき、モデル定数は時間的に変動しないものとして、次のように考える。

$$\begin{cases} \frac{dc_{11}}{dt} = f_3 = 0 \\ \frac{dc_{12}}{dt} = f_4 = 0 \\ \frac{dc_{13}}{dt} = f_5 = 0 \\ \frac{dr}{dt} = f_6 = 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

この方策は、カルマン・フィルタ理論適用にあたってしばしば用いられる。よって、状態変量に関する微分方程式は式(6.11)と式(6.12)より、式(6.13)で表現でき、システム方程式の原式として用いる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

上式を行列表示すると、

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (6.14)$$

ここで、

$$F(X) = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6]^T \quad (6.15)$$

カルマン・フィルタ理論は、元来線形システムの状態変量推定として導かれているため、式(6.13)を線形化する必要がある。

そこで、式(6.14)の $F(X)$ を $X = X^*$ においてテーラー級数展開すると、次の線形近似式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (6.16)$$

ここで、

$$A(X^*) = \left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline 0_1 & 0_2 & 0_3 \end{array} \right] \quad (6.17)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{26} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

$$0_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

式(6.18)の行列 A_1 と A_2 および A_3 の要素は次式で計算される。

$$\left\{ \begin{aligned} a_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-2} (x_2^*) - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2-1} \\ a_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} \\ a_{23} &= \frac{\partial f_2}{\partial c_{11}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = \left\{ -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) \right\} A^{0.24} \\ a_{24} &= \frac{\partial f_2}{\partial c_{12}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} \\ &= \frac{1}{k_{12}^2} \left\{ k_{11} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) + c_{13} (x_1^*)^{1/p_2} - (r + q_0) \right\} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ a_{25} &= \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{13}} \frac{\partial k_{13}}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}} (x_1^*)^{1/p_2} \\ a_{26} &= \frac{\partial f_2}{\partial r} = \frac{1}{k_{12}} \end{aligned} \right. \quad (6.20)$$

また、式(6.16)のベクトル $D(X^*)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} D(X^*) &= F(X^*) - A(X^*)X^* \\ &= \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= f_2(x_1^*, x_2^*, c_{11}, c_{12}, c_{13}, r) - a_{21}x_1^* - a_{22}x_2^* - a_{23}c_{11} - a_{24}c_{12} - a_{25}c_{13} - a_{26}r \\ &= \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{1/p_2} + \frac{r + 2q_0}{k_{12}} \quad (6.22) \end{aligned}$$

式(6.16)は線形常微分方程式であり、 $A(X^*)$ と $D(X^*)$ が定係数行列の場合、次の差分方程式に変換できる。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (6.23)$$

式(6.23)を行列表示すると、次式が得られる。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (6.24)$$

ここで、

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k \quad (6.25)$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} & \phi_{16} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} & \phi_{26} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

次に、 Φ_1, Φ_2, Φ_3 および Γ_1 の要素を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + a_{21} T \beta_1 \\ \phi_{12} = T \beta_2 \\ \phi_{21} = a_{21} \phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_{22} T + \frac{1}{2} a_1 T^2 + \frac{1}{6} a_2 T^3 + \frac{1}{24} (a_{21} a_1 + a_{22} a_2) T^4 \end{cases} \quad (6.28)$$

$$\begin{cases} \phi_{13} = a_{23} T \beta_1 \\ \phi_{14} = a_{24} T \beta_1 \\ \phi_{15} = a_{25} T \beta_1 \\ \phi_{23} = a_{23} T \beta_2 \\ \phi_{24} = a_{24} T \beta_2 \\ \phi_{25} = a_{25} T \beta_2 \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\begin{cases} \phi_{16} = a_{26} T \beta_1 \\ \phi_{26} = a_{26} T \beta_2 \end{cases} \quad (6.30)$$

$$\begin{cases} \gamma_{12} = T \beta_1 \\ \gamma_{22} = \phi_{12} \end{cases} \quad (6.31)$$

ここで、

$$\begin{cases} a_1 = a_{21} + a_{22}^2 \\ a_2 = 2a_{21}a_{22} + a_{22}^3 \end{cases} \quad (6.32)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_{22}T^2 + \frac{1}{24}a_1T^3 \\ \beta_2 = 1 + \frac{1}{2}a_{22}T + \frac{1}{6}a_1T^2 + \frac{1}{24}a_2T^3 \end{cases} \quad (6.33)$$

また、式(6.23)を行列要素で表すと次式になる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} & \phi_{16} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} & \phi_{26} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (6.34)$$

式(6.34)の行列を展開すると、**表4.2**に示す**式(6)「状態変量の伝達方程式」**に対応する式(6.23)は次のように記述できる。

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = \phi_{11}x_{1,k} + \phi_{12}x_{2,k} + \phi_{13}c_{11,k} + \phi_{14}c_{12,k} + \phi_{15}c_{13,k} + \phi_{16}r_k + \gamma_{12}d_{2,k} \\ x_{2,k+1} = \phi_{21}x_{1,k} + \phi_{22}x_{2,k} + \phi_{23}c_{11,k} + \phi_{24}c_{12,k} + \phi_{25}c_{13,k} + \phi_{26}r_k + \gamma_{22}d_{2,k} \end{cases} \quad (6.35)$$

$$\begin{cases} c_{11,k+1} = c_{11,k} \\ c_{12,k+1} = c_{12,k} \\ c_{13,k+1} = c_{13,k} \\ r_{k+1} = r_k \end{cases} \quad (6.36)$$

すなわち、式(6.35)は基本式である式(6.11)の漸化式であり、モデルパラメータ c_{11} , c_{12} , c_{13} と r を状態変数に加えたときの状態変数 $x_1 (= q^{p_2})$, $x_2 (= dq^{p_2} / dt)$ の伝達方程式となる。式(6.22)により右辺の d_2 に予測雨量を入れることで、状態変数 $x_{1,k+1}$ と $x_{2,k+1}$ の予測値を求めることが出来る。また、モデルパラメータは式(6.36)により観測値間では時間変化していないことがわかる。

流量を予測する場合、状態変数 x_1 の予測値と流量予測値 Q_k との関係を示す。

式(6.8)より流出高は次式で表現される。

$$q_k = x_{1,k}^{1/p_2} \quad (6.37)$$

ここで、 q_k : 流出高(mm/h)、 $x_{1,k}$: 式(6.35)から計算される状態変数、 $p_2=0.4648$ (固定値)

したがって、流量と流出高の関係から状態変数 $x_{1,k}$ を用いたときの流量予測式が与えられる。

$$Q_k = \frac{A}{3.6} q_k = \frac{A}{3.6} x_{1,k}^{1/p_2} \quad (6.38)$$

ここで、 Q_k : 離散時刻 k における流量予測値、 $x_{1,k}$: 時刻 k における状態変数 x_1 の値

次に、水位を予測する場合、状態変数 $x_{1,k}$ の予測値と水位予測値 H_k との関係を示す。一般には流量観測資料に基づいて次の水位～流量曲線（ $H \sim Q$ 関係式）が予め設定されている。

$$Q_k = a(H_k + b)^2 \quad (6.39)$$

式(6.39)を水位に関して表現すると、以下のようになる。

$$H_k = -b + \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{Q_k} \quad (6.40)$$

すなわち、

$$b_0 = -b, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (6.41)$$

$$H_k = b_0 + b_1 \sqrt{Q_k} \quad (6.42)$$

式(6.38)を式(6.42)に代入すれば、状態変数 $x_{1,k}$ を用いたときの水位予測式が得られる。

$$H_k = b_0 + b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6}} (x_{1,k})^{1/2 p_2} \quad (6.43)$$

ここで、 H_k : 離散時刻 k における水位予測値、 $x_{1,k}$: 時刻 k における状態変数 x_1 の値

6.4 状態変数の推定誤差共分散伝達方程式の定式化

洪水予測では、状態変数の推定誤差共分散伝達方程式は l 時間先の流量及び水位予測値の精度（分散）に対応しているので、表4.2に示される式(7)「推定誤差共分散伝達方程式」について定式化を行う。

そこで、まず次式を定義する。

$$\tilde{X}_k = X_k - \hat{X}_k \quad (6.44)$$

$\tilde{X}_k$ は、状態変数の真値 X_k と最良推定値 $\hat{X}_k$ の差、すなわち誤差（ $\sim$ は以後誤差を表わすものとする）になっているので、状態変数推定誤差と呼ぶ。

また、 $\tilde{X}_k$ は式(6.23)の $\Gamma_k D_k$ を確定変数とすると、次式で表される。

$$\tilde{X}_{k+1} = \Phi_k \tilde{X}_k \quad (6.45)$$

この $\tilde{X}_k$ の分散・共分散 (P_k) を計算すると、 P_k は式(6.46)で表される。

$$\begin{aligned} P_k = E(\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T) &= E \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \tilde{X}_1^T & \tilde{X}_2^T & \tilde{X}_3^T \end{bmatrix}_k \right\} \\ &= \begin{bmatrix} E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_3^T)_k \\ E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_2^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_3^T)_k \\ E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_2^T)_k & E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_3^T)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} & P_{3,k} \\ P_{2,k}^T & U_{1,k} & 0 \\ P_{3,k}^T & 0 & U_{2,k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.46)$$

ここで、 $P_{1,k}$: X_1 に関する (2×2) の分散・共分散行列、 $P_{2,k}$: X_1 と X_2 に関する (2×3) の共分散行列、 $P_{3,k}$: X_1 と X_3 に関する (2×1) の共分散行列、 $U_{1,k}$: X_2 に関する (3×3) の分散・共分散行列、 $U_{2,k}$: X_3 に関する (1×1) の分散

式(6.45)を式(6.46)に代入すると、表4.2の式(7)に示される $\tilde{X}_{k+1}$ の分散・共分散行列 P_{k+1} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= E\left(\tilde{X}_{k+1}\tilde{X}_{k+1}^T\right) \\
&= \Phi_k P_k \Phi_k^T \\
&= \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} & P_{3,k} \\ P_{2,k}^T & U_{1,k} & 0 \\ P_{3,k}^T & 0 & U_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^T & 0 & 0 \\ \Phi_2^T & I & 0 \\ \Phi_3^T & 0 & I \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

また、 $P_{1,k}$ の行列を要素展開すると、式(6.48)となる。

$$P_{1,k} = \begin{bmatrix} \text{Var}(x_{1,k}) & \text{Cov}(x_{1,k}, x_{2,k}) \\ \text{Cov}(x_{2,k}, x_{1,k}) & \text{Var}(x_{2,k}) \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

ここで、 $\text{Var}(x_{1,k})$: $x_{1,k}$ の分散、 $\text{Cov}(x_{1,k}, x_{2,k})$: $x_{1,k}$ と $x_{2,k}$ の共分散

流量を予測する場合、式(6.38)により計算される流量予測値の精度（分散）は、次式で求められる。

$$\text{Var}(Q_k) = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial x_{1,k}} \right)^2 \text{Var}(x_{1,k}) = \left(\frac{A}{3.6} \right)^2 \left(\frac{1}{p_2} x_{1,k}^{1/p_2-1} \right)^2 \text{Var}(x_{1,k}) \tag{6.49}$$

すなわち、 $\text{Var}(x_{1,k})$ は式(6.48)から求められる。

また、水位を予測する場合、式(6.43)により計算される水位予測値の精度（分散）は、次式で求められる。

$$\text{Var}(H_k) = \left(\frac{\partial H_k}{\partial Q_k} \right)^2 \text{Var}(Q_k) = \frac{b_1^2}{4} Q_k^{-1} \text{Var}(Q_k) \tag{6.50}$$

すなわち、 Q_k の値に式(6.38)を、また $\text{Var}(Q_k)$ に式(6.49)を用いる。

要約すると、 l 時間先の予測流量(Q_l)および予測水位(H_l)の推定誤差分散は、式(6.49)と式(6.50)を順次適用していけばよい。

式(6.47)のベクトル $\Phi_k P_k \Phi_k^T$ を展開すると下式になる。

$$\begin{aligned}
P_{1,k+1} &= \Phi_1 P_{1,k} \Phi_1^T + \Phi_2 P_{2,k}^T \Phi_1^T + \Phi_3 P_{3,k}^T \Phi_1^T + \Phi_1 P_{2,k} \Phi_2^T \\
&\quad + \Phi_2 U_{1,k} \Phi_2^T + \Phi_1 P_{3,k} \Phi_3^T + \Phi_3 U_{2,k} \Phi_3^T
\end{aligned} \tag{6.51}$$

$$P_{2,k+1} = \Phi_1 P_{2,k} + \Phi_2 U_{1,k} \tag{6.52}$$

$$P_{3,k+1} = \Phi_1 P_{3,k} + \Phi_3 U_{2,k} \tag{6.53}$$

$$U_{1,k+1} = U_{1,k} \quad (6.54)$$

$$U_{2,k+1} = U_{2,k} \quad (6.55)$$

式(6.51)の $P_{1,k+1}$ は、状態変数 x_1 と x_2 の推定誤差分散・共分散である。**第4章**ではモデル定数を状態変数に加えてシステム方程式の拡大を図った。さらに、この**第6章**では予測雨量も状態変数に加えた。その結果、予測雨量の誤差分散である $\Phi_3 U_{2,k} \Phi_3^T$ の影響が $P_{1,k+1}$ に反映されていることがわかる。

式(6.54)に示されるモデル定数ベクトル $X_2 = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]$ の誤差分散・共分散 $U_{1,k}$ は、新しい観測値が入手されるまでは変化しないことを意味している。その理由は、式(6.36)に示されるように一定値が伝達されているからである。また予測雨量の誤差分散 $U_{2,k}$ は状態変数 $X_3 = r$ の推定誤差分散であり式(6.4)によって与えられる。

$U_{1,k}$ の値をあらかじめ設定しておく必要がある。モデル定数 c_{11} と c_{12} および c_{13} が互いに独立であると仮定すると、 $U_{1,k}$ は以下のように表すことができる。

$$U_{1,k} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{13}^2 \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

ここで、 $\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{13}^2$ はそれぞれモデル定数、 c_{11}, c_{12}, c_{13} の分散の初期値である。この $U_{1,k}$ は、式(6.51)と(6.52)において使用される。

予測雨量の誤差分散 $U_{2,k}$ は式(6.4)に示されるモデル式を用いる。このとき、予測雨量 $\hat{r}_l$ を式(6.22)と式(6.35)に代入し、 $U_{2,l}$ を式(6.51)～式(6.53)と式(6.55)で使用する。また、式(6.4)の適用にあたって、予測雨量の値が0のとき、 $\hat{r}_l$ に0.1mm/hを与える。

任意のリードタイムまでの水位を予測する手順を以下に示す。

- 1時間先の予測雨量 $\hat{r}_l$ を式(6.35)に代入し、任意のリードタイムまでの状態変数 $x_{1,l}$ を算出する。
- (a)で計算された $x_{1,l}$ を用い、式(6.43)によって水位予測値を計算する。
- 同時に、予測雨量の誤差分散である $U_{2,l}$ (式(6.4)参照)を式(6.51)～式(6.53)に代入し、状態変数の推定誤差分散・共分散を求める。
- (c)で計算された状態変数 $x_{1,l}$ の誤差分散 $\text{Var}(x_{1,l})$ を式(6.50)に代入し、水位予測値の分散を算出する。

6.5 乗算的ノイズによるシステム誤差の定式化

式(6.47)にはシステム誤差分散・共分散行列 Q_k が含まれておらず、**表4.2**に示される**式(7)「状態変数の推定誤差共分散伝達方程式」**を満たすために、システム誤差分散・共分散行列 Q_k をどのように導入するかという問題が残る。

式(6.23)はカルマン・フィルター理論における観測値間、 $t_k \leq t < t_{k+1}$ での状態変数の伝達方程式に相当しており、この間システム誤差を考慮しない。その代り、**図6.1**に示すように、 $t = t_{k+1}$ において**瞬間的にシステムノイズが付加される**と考える。すなわち、この時点でシステムノイズの誤差分散・共分散 Q_{k+1} を作用させることになる。このとき、ノイズの大きさは状態変数推定値に比例すると仮定する。こ

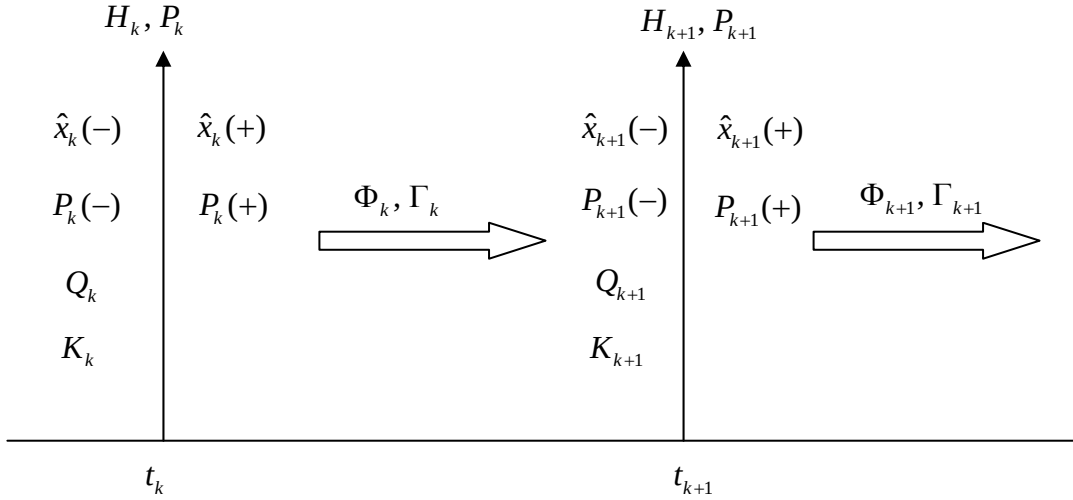


図6.1 状態変量・誤差共分散行列の伝達・更新概念図

の考えが京大グループによって提案された「乗算的ノイズ」の導入である。今、式(6.23)の解より得られる $t=t_{k+1}$ における状態変量を $x_1(t_{k+1})$ 及び $x_2(t_{k+1})$ とする。また、図6.1の(-)、(+)の記号はそれぞれ流量観測値情報入手直前と直後を意味する。したがって、乗算的ノイズを導入することにより、次の定式化を行なうことができる。

$$\begin{aligned} X_{1,k+1}(-) &= X_1(t_{k+1})(1+W_{k+1}) \\ &= X_1(t_{k+1}) + B_{k+1}W_{k+1} \end{aligned} \quad (6.57)$$

ここで、

$$\left\{ \begin{aligned} X_{1,k+1}(-) &= \begin{bmatrix} x_{1,k+1}(-) \\ x_{2,k+1}(-) \end{bmatrix} \\ B_{k+1} &= \begin{bmatrix} b_{1,k+1} & 0 \\ 0 & b_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) & 0 \\ 0 & x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} \\ W_{k+1} &= \begin{bmatrix} w_{1,k+1} \\ w_{2,k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (6.58)$$

式(6.57)と式(6.58)にも示されるように、システム誤差は状態変量に比例している。システム誤差ベクトル W_{k+1} は次の統計的性質をもつものとする。

$$\begin{cases} E(W_{k+1}) = 0 \\ E(W_{k+1}W_{k+1}^T) = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.59)$$

システム誤差として状態変量の $100\alpha_1\%$ ($\alpha_1 = 0.1 \sim 0.2$ が適当)の大きさを想定している。 W_{k+1} は式(6.59)の性質を有しているので、 $X_{1,k+1}(-)$ の推定値は式(6.57)から次式で与えられる。

$$\hat{X}_{1,k+1}(-) = E[X_{1,k+1}(-)] = \hat{X}_1(t_{k+1}) \quad (6.60)$$

すなわち、 $\hat{X}_{1,k+1}(-)$ は式(6.23)の伝達方程式を解いたときの $t = t_{k+1}$ における値に等しい。式(6.60)から式(6.57)を引くと、次式が得られる。

$$\{\hat{X}_{1,k+1}(-)\} - \{X_{1,k+1}(-)\} = \{\hat{X}_1(t_{k+1})\} - \{X_1(t_{k+1})\} - B_{k+1}W_{k+1} \quad (6.61)$$

すなわち、

$$\tilde{X}_{1,k+1}(-) = \tilde{X}_1(t_{k+1}) - B_{k+1}W_{k+1} \quad (6.62)$$

式(6.62)を用いることにより、推定誤差分散・共分散は次式で計算できる。

$$\begin{aligned} P_{1,k+1}(-) &= E[\tilde{X}_{1,k+1}(-)\tilde{X}_{1,k+1}^T(-)] \\ &= P_{1,k+1} + B_{k+1}E(W_{k+1}W_{k+1}^T)B_{k+1}^T \\ &= P_{1,k+1} + Q_{k+1} \end{aligned} \quad (6.63)$$

ここで、

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= B_{k+1}E(W_{k+1}W_{k+1}^T)B_{k+1}^T = B_{k+1}(\alpha_1^2 I)B_{k+1}^T \\ &= \begin{bmatrix} (b_{1,k+1}\alpha_1)^2 & 0 \\ 0 & (b_{2,k+1}\alpha_1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_1(t_{k+1})\alpha_1\}^2 & 0 \\ 0 & \{x_2(t_{k+1})\alpha_1\}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.64)$$

式(6.63)の右辺第1項の $P_{1,k+1}$ は式(6.51)で計算される。式(6.64)においては、行列 B_{k+1} は状態変量推定値に依存して観測値入手直前まで変化するので、 α_1 が一定値であっても Q_{k+1} は時間的に変化していることになる。すなわち、システムノイズに非定常性が考慮されていることになる。しかも、計算が非常に容易であり、実際の運用にあたっても困難を生じない。

なお、 B_{k+1} の要素は式(6.60)に示されるように、観測値情報が入手される直前の $\hat{x}_{1,k+1}(-)$ と $\hat{x}_{2,k+1}(-)$ を用いればよい。また、式(6.64)の Q_{k+1} は前述した通り(図6.1を参照)、観測値情報が入手される直前に作用させる。すなわち、予測計算期間中は式(6.51)と式(6.52)及び式(6.53)の伝達方程式を用い、 Q_{k+1} を作用させないことに留意すべきである。

6.6 観測方程式の定式化

カルマン・フィルター理論を適用するために、表4.2に示される式(2)「観測方程式」の定式化を行う。流出高を観測値とすると、式(6.38)で流量を流出高に変換した値と状態変数 x_1 の間には式(6.8)の関係が成立するので、観測方程式を次のように定義する。

$$z_k = x_{1,k}^{1/p_2} (1 + v_k) = x_{1,k}^{1/p_2} + c_k v_k \quad (6.65)$$

ここで、

$$c_k = x_{1,k}^{1/p_2} \quad (6.66)$$

z_k : サンプル時刻 k における流出高観測値、 v_k : 観測誤差

表4.2に示されるようにカルマン・フィルター理論は、元来、線形システム方程式と線形観測方程式に関して理論展開がなされている。このため、式(6.65)の非線形観測方程式は直接カルマン・フィルター理論に適用することができない。よって、式(6.65)の線形化を行う。

$$\begin{aligned} h(x_1) &= x_1^{1/p_2} \\ &= h(x_1^*) + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)_{x_1^*} (x_1 - x_1^*) \\ &= h_1 x_1 + h(x_1^*) - h_1 x_1^* \\ &= H_k X_k + h_3 \end{aligned} \quad (6.67)$$

ここで、

$$H_k = [H_1 \mid H_2] \quad , \quad H_1 = [h_1 \quad 0] \quad , \quad H_2 = [0 \quad 0 \quad 0] \quad (6.68)$$

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

$$h_1 = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)_{x_1^*} = \frac{1}{p_2} (x_{1,k}^*)^{1/p_2-1} \quad (6.70)$$

$$h_3 = h(x_1^*) - \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right) x_1^* = (x_1^*)^{1/p_2} - \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2} = \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) (x_1^*)^{1/p_2} \quad (6.71)$$

なお、上式に含まれている x_1^* の値として $\hat{x}_{1,k}(-)$ の値を用いればよい。

6.7 状態変量の更新方程式

観測値として流出高が得られた後、表4.2に示される式(9)「状態変量の更新方程式」は、次式で与えられる。

$$\hat{X}_k(+) = \hat{X}_k(-) + K_k \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \quad (6.72)$$

すなわち、 $z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2}$ は流出高の観測値と貯留関数法による計算値との差を表わしており、 $\hat{X}_k(-)$ ベクトルを要素展開すると次式のようなになる。

$$\hat{X}_k(-) = \begin{bmatrix} \hat{X}_1(-) \\ \hat{X}_2(-) \end{bmatrix}_k \quad (6.73)$$

$$\left[\hat{X}_1(-) \right]_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(-) \\ \hat{x}_2(-) \end{bmatrix}_k \quad (6.74)$$

$$\left[\hat{X}_2(-) \right]_k = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11}(-) \\ \hat{c}_{12}(-) \\ \hat{c}_{13}(-) \end{bmatrix}_k \quad (6.75)$$

式(6.72)を状態変量の要素を用いて表すと、「状態変量の更新方程式」は次のように表現できる。

$$\begin{cases} \left[\hat{x}_1(+) \right]_k = \left[\hat{x}_1(-) \right]_k + K_{1,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \\ \left[\hat{x}_2(+) \right]_k = \left[\hat{x}_2(-) \right]_k + K_{2,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \end{cases} \quad (6.76)$$

$$\begin{cases} \left[\hat{c}_{11}(+) \right]_k = \left[\hat{c}_{11}(-) \right]_k + K_{3,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \\ \left[\hat{c}_{12}(+) \right]_k = \left[\hat{c}_{12}(-) \right]_k + K_{4,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \\ \left[\hat{c}_{13}(+) \right]_k = \left[\hat{c}_{13}(-) \right]_k + K_{5,k} \left[z_k - \hat{x}_{1,k}(-)^{1/p_2} \right] \end{cases} \quad (6.77)$$

式(6.76)と式(6.77)の $K_{i,k}$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$) は、カルマン・ゲイン K_k の要素である。式(6.77)によれば、モデル定数 c_{11} 、 c_{12} および c_{13} は新しい観測値が入手されたのち更新されることになる。ここで注意すべ

き点は、予測雨量は別途レーダー雨量計などを用いた予測雨量モデルにより与えられるものであり、式(6.72)によって更新される性質のものではないということである。

6.8 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化

カルマン・フィルタを実行するには、表4.2に示される式(4)「観測誤差分散」が必要となる。 R_k は式(6.65)より次式で与えられる。

$$\begin{cases} R_k = E[(c_k v_k)^2] = c_k^2 E[v_k^2] = c_k^2 \alpha_2^2 \\ \alpha_2^2 = E[v_k^2] \quad (\alpha_2 = 0.1 \sim 0.2) \end{cases} \quad (6.78)$$

すなわち、 α_2 については c_k (最新流出高推定値)の10%ないし20%の誤差を仮定するものとする。このとき、式(6.66)で定義される c_k の x_1 の値として $\hat{x}_{1,k}(-)$ を用いればよい。

6.9 カルマン・ゲインの算定

表4.2に示される式(8)「カルマン・ゲイン」 K_k は、以下の手順で計算する。まず、分散・共分散行列 $P_k(-)$ は式(6.46)に示すように以下で定義する。なお、予測雨量 r は別途与えられるので $U_{2,k}$ は $P_k(-)$ に含める必要がない。

$$P_k(-) = \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ P_{2,k}^T(-) & U_{1,k} \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

K_k は逆行列が含まれているが、観測方程式が一次元(スカラー量)式である場合には、この項はその逆数をとればよい。カルマン・ゲインに含まれる行列演算を式(6.68)の定係数ベクトル H_1 と式(6.46)の小行列を用いて行くと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} P_k(-)H_k^T &= \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ P_{2,k}^T(-) & U_{1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.80)$$

式(6.68)に示されるように、ベクトル H_1 の要素は h_1 と0である。式(6.80)の演算は行列 $P_{1,k}(-)$ と $P_{2,k}^T(-)$ のうち、第1列目の要素に h_1 を乗じた値となる。

表4.2に示される式(8)の右辺第2項を再記すれば、次式のようになる。

$$\begin{aligned} H_k P_k(-)H_k^T + R_k &= \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{bmatrix} + R_k \\ &= H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k \end{aligned} \quad (6.81)$$

式(6.81)の $H_k P_k(-) H_k^T$ は、行列 $P_{1,k}(-)$ の1行1列目の要素 $p_{11}(-)$ に h_1^2 を乗じた値に等しい。
したがって、

$$S = H_1 P_{1,k}(-) H_1^T + R_k = h_1^2 p_{11}(-) + R_k \quad (6.82)$$

カルマン・ゲイン K_k は、式(6.80)を式(6.82)で割ればよいので、次式で与えられる。

$$K_k = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) H_1^T \\ P_{2,k}^T(-) H_1^T \end{bmatrix} S^{-1} \quad (6.83)$$

6.10 状態変量の推定誤差共分散更新方程式

表4.2に示される式(10)「推定誤差共分散の更新方程式」は次のように変形される。

$$\begin{aligned} I - K_k H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1,k} \\ K_{2,k} \\ K_{3,k} \\ K_{4,k} \\ K_{5,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 K_{1,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{2,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{3,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{4,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{5,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline M_2 & I \end{array} \right] \end{aligned} \quad (6.84)$$

ここで、

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 - h_1 K_{1,k} & 0 \\ -h_1 K_{2,k} & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -h_1 K_{3,k} & 0 \\ -h_1 K_{4,k} & 0 \\ -h_1 K_{5,k} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

の行列を定義すると、誤差共分散行列は式(6.86)で更新される。

$$\begin{aligned} P_k(+) &= \left[\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline M_2 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ \hline P_{2,k}^T(-) & U_{1,k}(-) \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} M_1 P_{1,k}(-) & M_1 P_{2,k}(-) \\ \hline M_2 P_{1,k}(-) + P_{2,k}^T(-) & M_2 P_{2,k}(-) + U_{1,k}(-) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (6.86)$$

すなわち、 $P_k(+)$ の小行列は次式で計算される。

$$\begin{cases} P_{1,k}(+) = M_1 P_{1,k}(-) \\ P_{2,k}(+) = M_1 P_{2,k}(-) = P_{1,k}^T(-) M_2^T + P_{2,k}(-) \\ U_{1,k}(+) = M_2 P_{2,k}(-) + U_{1,k}(-) \end{cases} \quad (6.87)$$

式(6.87)によれば、新しい観測値が入手される毎に、状態変量ベクトル X_1 と X_2 の分散・共分散が更新される。同様に、モデル定数 c_{11} 、 c_{12} および c_{13} の分散・共分散行列も更新されることに着目すべきである。

6.11 複合流域を対象に予測雨量の誤差を考慮した洪水予測モデルの適用例

石狩川石狩大橋地点（流域面積 12697.0km²）を対象に、予測雨量の誤差を考慮しカルマン・フィルタ理論を適用した予測モデルを用いて洪水予測を行う。**第5章**（河道効果による降雨遅れのモデル化）によって石狩大橋の合成雨量を用い、初期条件や計算条件、水位データは**5.5節**と同様に与える。

(1) 初期条件の設定

予測計算を行う際の状態変量及びその推定誤差分散・共分散の伝達方程式（**表4.2 式(6)**及び**式(7)**）を適用するためには初期値を設定しなくてはならない。そこで状態変量及びその推定誤差分散・共分散は次のように設定する。

表6.1 状態変量の初期条件

x_1	x_2	c_{11}	c_{12}	c_{13}
$q_B^{p_2}$	0	6.490	0.159	1.797

x_1 に含まれる q_B は初期流出高であり、貯留指数 p_1 と p_2 はそれぞれ、0.6 と 0.4648 を与える。 x_2 は dx_1/dt であるので、初期値は 0 を与える。また c_{11} と c_{12} および c_{13} の値は、既往洪水定数解析の平均値を与えた。

表6.2 状態変量の誤差分散・共分散の初期条件

x_1 の誤差分散	x_2 の誤差分散	σ_{11}^2	σ_{12}^2	σ_{13}^2
$(0.1x_1)^2$	$(0.1x_1)^2$	$(0.2c_{11})^2$	$(0.2c_{12})^2$	$(0.2c_{13})^2$

式(6.56)の $U_{1,k}$ は X_2 の分散・共分散行列であり、その要素 σ_{11}^2 、 σ_{12}^2 、 σ_{13}^2 は、モデル定数の分散の初期値である。今回は経験的に初期値をそれぞれ c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} の 2 割を設定した。 x_2 の初期値はゼロで与えるが、その分散をゼロとするのは不合理であるため、 x_2 の誤差分散を $(0.1x_1)^2$ に設定してある。

(2) 計算条件の設定

表6.3 計算条件

減衰係数 λ	0.019
平均降雨強度 $\bar{r}$	1.009mm/h
計算時間間隔 nl	12
観測誤差分散 R_k	$(0.1x_{1,k}^{1/p_2})^2$
システム誤差分散 $Q_{1,k}, Q_{2,k}$	$(0.1x_1)^2, (0.1x_2)^2$

観測誤差分散 R_k は、式(6.66)と式(6.78)より $(0.1x_{1,k}^{1/p_2})^2$ を与え、システム誤差分散 $Q_{1,k}$ と $Q_{2,k}$ は、式(6.64)よりそれぞれ $(0.1x_1)^2$ と $(0.1x_2)^2$ を与える。また、平均降雨強度 $\bar{r}$ は既往洪水の平均値とし、1時間あたりの計算時間分割数 nl は12と設定した。

実際の洪水予測を想定し、対象洪水より一年前の水位～流量曲線を使用する（図6.2参照）。表6.4に示される、 a と b は式(6.39)の係数である。また、 b_0 と b_1 は式(6.41)より算出した。

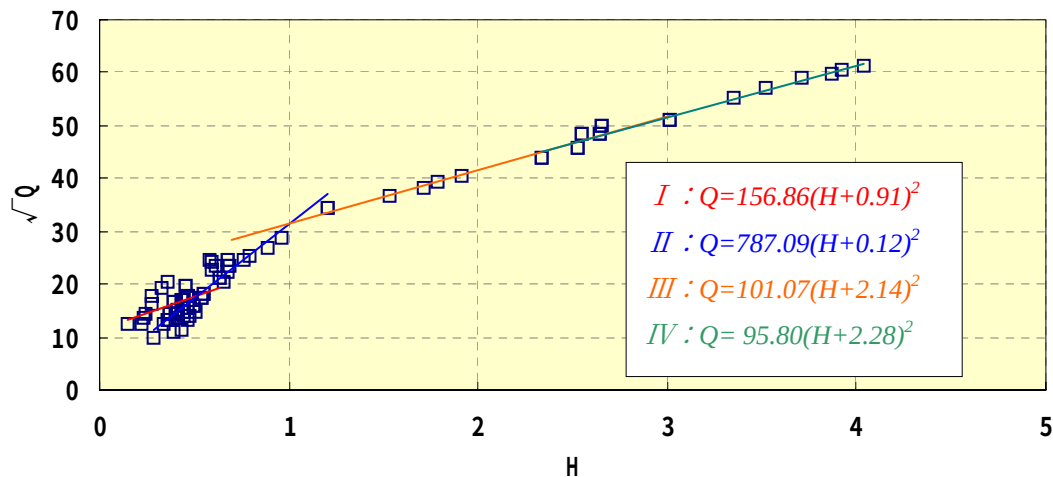


図6.2 水位～流量曲線図 石狩大橋地点 (平成12年)

表6.4 水位～流量曲線

曲線分類	I	II	III	IV
適用期間	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24
適用水位(m)	0.15～0.52	0.53～1.01	1.02～3.02	3.03～4.04
a	156.86	787.09	101.07	95.80
b	0.91	0.12	2.14	2.28
b_0	-0.91	-0.12	-2.14	-2.28
b_1	0.0798	0.0356	0.0995	0.1022

表6.5に、予測計算に必要な合成雨量と実績水位を示す。また、流量および流出高は図6.5に示す水位～流量曲線を用いて算出した。

表6.5に示すように、ピーク水位は79時間目に起こっており、その値は6.28mである。

表 6.6 洪水データ一覧表

地点名 : 石狩大橋地点

洪水期間 : 平成 13 年 9 月 9 日 1:00~15 日 24:00

時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)	時間	合成雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)
1	0.00	0.46	0.08	294.41	43	1.70	1.80	0.44	1568.97
2	0.00	0.46	0.08	294.41	44	1.83	1.86	0.46	1617.12
3	0.00	0.49	0.09	307.45	45	1.94	1.92	0.47	1666.00
4	0.00	0.47	0.08	298.72	46	2.08	1.99	0.49	1723.94
5	0.00	0.49	0.09	307.45	47	2.25	2.04	0.50	1765.94
6	0.00	0.51	0.09	316.29	48	2.36	2.09	0.51	1808.44
7	0.02	0.52	0.09	320.76	49	2.47	2.16	0.53	1868.78
8	0.05	0.50	0.09	311.85	50	2.60	2.26	0.55	1956.72
9	0.08	0.53	0.09	332.55	51	2.79	2.37	0.58	2055.77
10	0.13	0.49	0.09	307.45	52	3.08	2.49	0.61	2166.63
11	0.19	0.49	0.09	307.45	53	3.43	2.63	0.65	2299.64
12	0.25	0.40	0.08	269.19	54	3.84	2.77	0.69	2443.14
13	0.33	0.40	0.08	269.19	55	4.31	2.94	0.74	2610.40
14	0.44	0.35	0.07	249.03	56	4.68	3.12	0.79	2793.53
15	0.70	0.39	0.08	265.09	57	4.91	3.32	0.85	3004.29
16	1.04	0.37	0.07	257.00	58	5.06	3.51	0.91	3211.61
17	1.27	0.37	0.07	257.00	59	5.14	3.74	0.98	3471.83
18	1.40	0.43	0.08	281.66	60	5.18	3.96	1.06	3730.22
19	1.45	0.44	0.08	285.88	61	5.18	4.01	1.07	3790.24
20	1.43	0.49	0.09	307.45	62	5.16	4.21	1.14	4035.11
21	1.36	0.49	0.09	307.45	63	5.05	4.59	1.28	4521.46
22	1.28	0.54	0.10	342.86	64	4.80	4.79	1.36	4788.55
23	1.19	0.54	0.10	342.86	65	4.46	4.98	1.43	5049.39
24	1.11	0.53	0.09	332.55	66	4.09	5.16	1.50	5302.88
25	1.03	0.61	0.12	419.44	67	3.74	5.33	1.57	5547.98
26	0.96	0.69	0.15	516.41	68	3.44	5.49	1.64	5783.72
27	0.92	0.85	0.21	740.57	69	3.20	5.64	1.70	6009.19
28	0.90	0.90	0.23	818.89	70	3.04	5.72	1.74	6131.20
29	0.89	1.01	0.28	1005.04	71	2.97	5.84	1.79	6316.52
30	0.88	1.09	0.30	1054.45	72	2.85	5.99	1.86	6552.04
31	0.86	1.16	0.31	1100.65	73	2.67	6.07	1.89	6679.42
32	0.84	1.24	0.33	1154.66	74	2.46	6.13	1.92	6775.75
33	0.84	1.29	0.34	1189.08	75	2.23	6.17	1.94	6840.36
34	0.82	1.36	0.35	1238.11	76	2.02	6.20	1.95	6889.02
35	0.80	1.41	0.36	1273.73	77	1.86	6.25	1.98	6970.49
36	0.84	1.46	0.37	1309.87	78	1.73	6.26	1.98	6986.85
37	1.01	1.52	0.38	1353.89	79	1.59	6.28	1.99	7019.61
38	1.38	1.59	0.40	1406.18	80	1.44	6.26	1.98	6986.85
39	1.60	1.61	0.40	1421.30	81	1.31	6.24	1.97	6954.16
40	1.62	1.65	0.41	1451.78	82	1.18	6.20	1.95	6889.02
41	1.57	1.70	0.42	1490.34	83	1.06	6.14	1.93	6791.88
42	1.59	1.74	0.43	1521.55	84	0.97	6.07	1.89	6679.42

表6.6 洪水データ一覧表(つづき)

時間	合成雨量	実績水位	流出高	流量	時間	合成雨量	実績水位	流出高	流量
	(mm/h)	(m)	(mm/h)	(m ³ /s)		(mm/h)	(m)	(mm/h)	(m ³ /s)
85	0.88	6.02	1.87	6599.66	127	0.02	1.95	0.48	1690.71
86	0.80	5.96	1.84	6504.59	128	0.02	1.89	0.47	1641.47
87	0.75	5.86	1.80	6347.67	129	0.02	1.84	0.45	1600.99
88	0.73	5.77	1.76	6208.08	130	0.02	1.79	0.44	1561.02
89	0.70	5.72	1.74	6131.20	131	0.02	1.74	0.43	1521.55
90	0.65	5.61	1.69	5963.75	132	0.02	1.70	0.42	1490.34
91	0.59	5.49	1.64	5783.72	133	0.01	1.65	0.41	1451.78
92	0.55	5.37	1.59	5606.46	134	0.01	1.61	0.40	1421.30
93	0.50	5.27	1.55	5460.84	135	0.01	1.57	0.39	1391.14
94	0.46	5.16	1.50	5302.88	136	0.01	1.53	0.39	1361.30
95	0.42	5.04	1.46	5133.19	137	0.01	1.49	0.38	1331.79
96	0.38	4.93	1.41	4980.08	138	0.01	1.45	0.37	1302.60
97	0.35	4.81	1.37	4815.68	139	0.01	1.40	0.36	1266.57
98	0.32	4.69	1.32	4654.05	140	0.01	1.37	0.35	1245.19
99	0.29	4.57	1.27	4495.18	141	0.01	1.33	0.35	1216.97
100	0.26	4.47	1.24	4364.89	142	0.01	1.30	0.34	1196.02
101	0.24	4.35	1.19	4211.07	143	0.01	1.29	0.34	1189.08
102	0.21	4.25	1.16	4085.00	144	0.01	1.25	0.33	1161.51
103	0.19	4.15	1.12	3960.84	145	0.01	1.22	0.32	1141.04
104	0.18	4.06	1.09	3850.74	146	0.00	1.21	0.32	1134.26
105	0.17	3.92	1.04	3682.55	147	0.00	1.19	0.32	1120.76
106	0.16	3.81	1.01	3553.04	148	0.00	1.19	0.32	1120.76
107	0.14	3.73	0.98	3460.31	149	0.00	1.17	0.31	1107.33
108	0.13	3.65	0.96	3368.80	150	0.00	1.16	0.31	1100.65
109	0.12	3.51	0.91	3211.61	151	0.00	1.12	0.30	1074.13
110	0.12	3.41	0.88	3101.63	152	0.00	1.11	0.30	1067.55
111	0.11	3.31	0.85	2993.57	153	0.00	1.09	0.30	1054.45
112	0.10	3.22	0.82	2897.95	154	0.00	1.07	0.30	1041.44
113	0.10	3.18	0.81	2855.95	155	0.00	1.06	0.29	1034.96
114	0.09	3.10	0.79	2772.87	156	0.00	1.05	0.29	1028.50
115	0.09	2.90	0.73	2570.54	157	0.00	1.05	0.29	1028.50
116	0.08	2.80	0.70	2472.25	158	0.00	1.03	0.29	1015.64
117	0.08	2.71	0.68	2385.43	159	0.00	1.03	0.29	1015.64
118	0.07	2.62	0.65	2290.00	160	0.00	1.01	0.28	1005.04
119	0.06	2.54	0.63	2213.68	161	0.00	1.00	0.28	987.33
120	0.06	2.44	0.60	2120.08	162	0.00	0.94	0.25	884.37
121	0.05	2.36	0.58	2046.67	163	0.00	0.91	0.24	835.02
122	0.04	2.29	0.56	1983.49	164	0.00	0.87	0.22	771.43
123	0.04	2.20	0.54	1903.71	165	0.00	0.83	0.20	710.35
124	0.03	2.13	0.52	1842.80	166	0.00	0.81	0.19	680.75
125	0.03	2.07	0.51	1791.37	167	0.00	0.79	0.18	651.79
126	0.03	2.01	0.49	1740.68	168	0.00	0.79	0.18	651.79

(3) 洪水予測シミュレーション

前述した初期条件、計算条件をもとに石狩大橋地点において、表6.6に示す河道効果を考慮した雨量と実績水位から算出した1時間～3時間先予測までの予測シミュレーションの結果を図6.3に示す。逐次更新されるパラメータ (c_{11} , c_{12} , c_{13}) の値は初期値を100%として1時間ごとの変化率で図6.4に示すとおりモデル定数の時間変動率は小さく、10%以内に収まっている。また、1時間～3時間先予測までの予測水位と標準偏差およびパラメータの更新値を表6.8に示す。

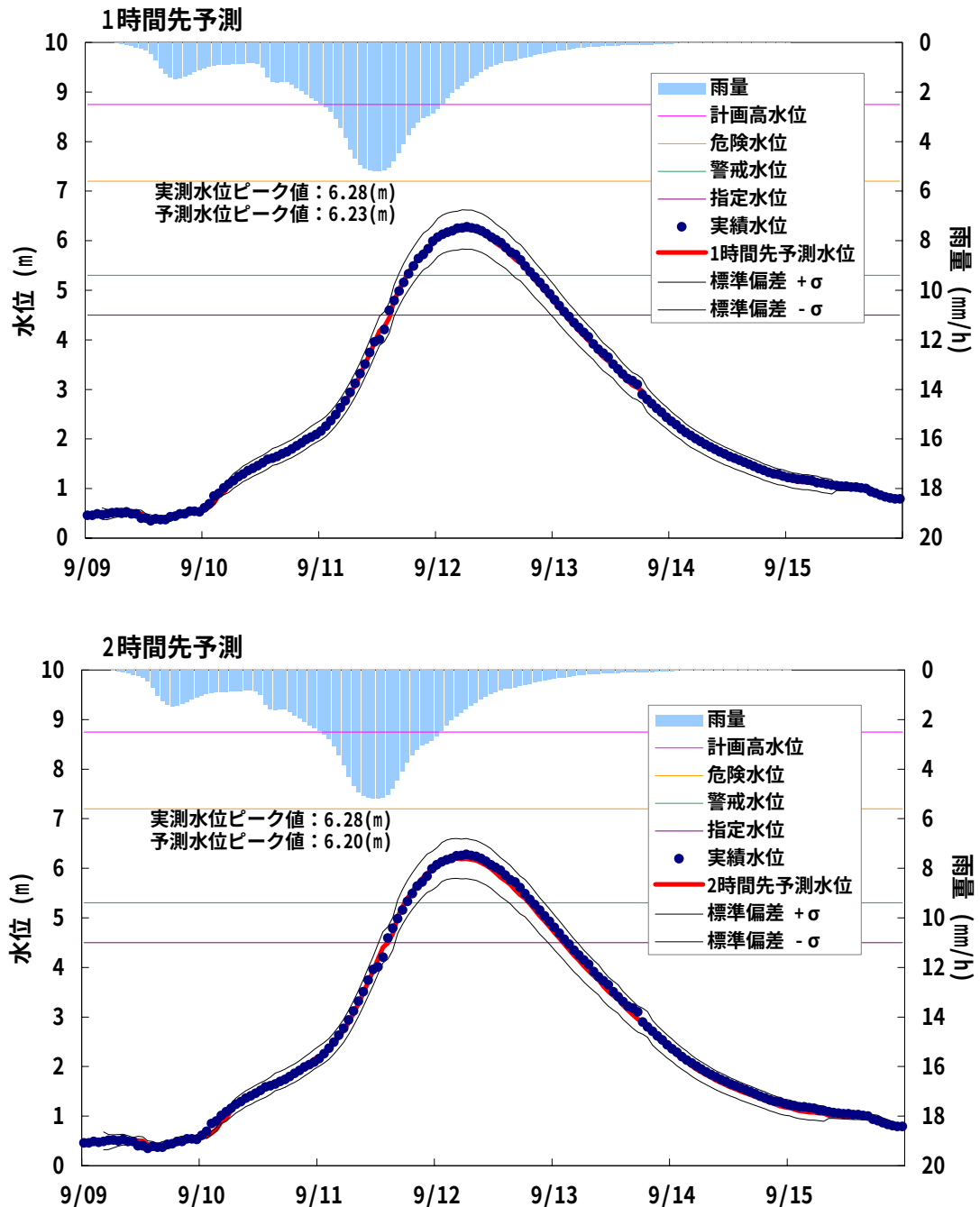


図6.3 洪水予測シミュレーション図 石狩大橋地点 (平成13年洪水)

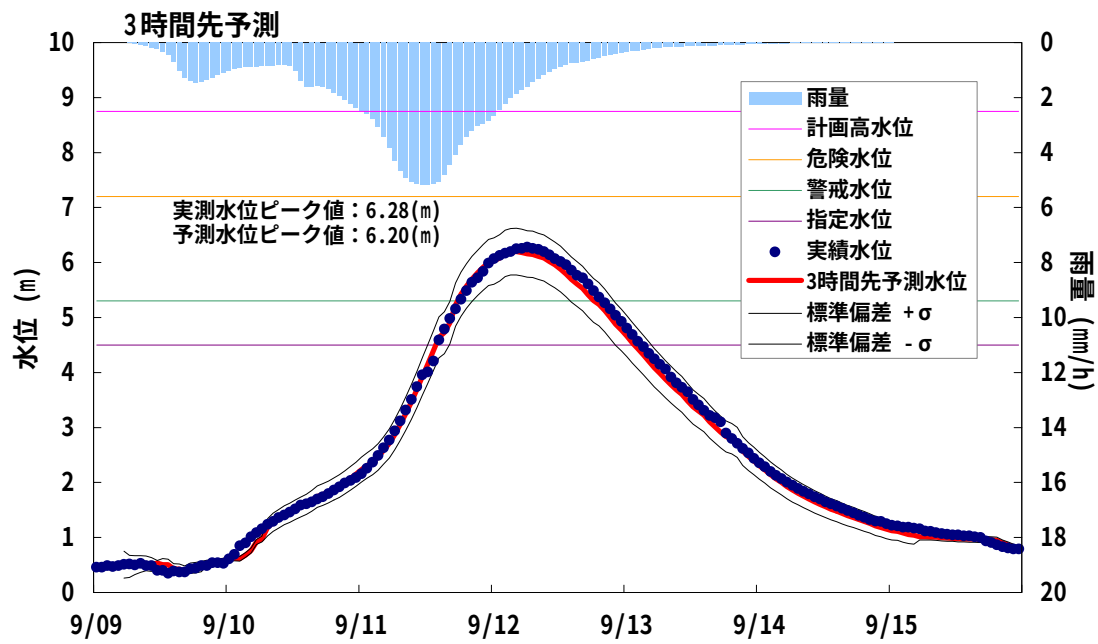


図6.3 洪水予測シミュレーション図 石狩大橋地点 (平成13年洪水)

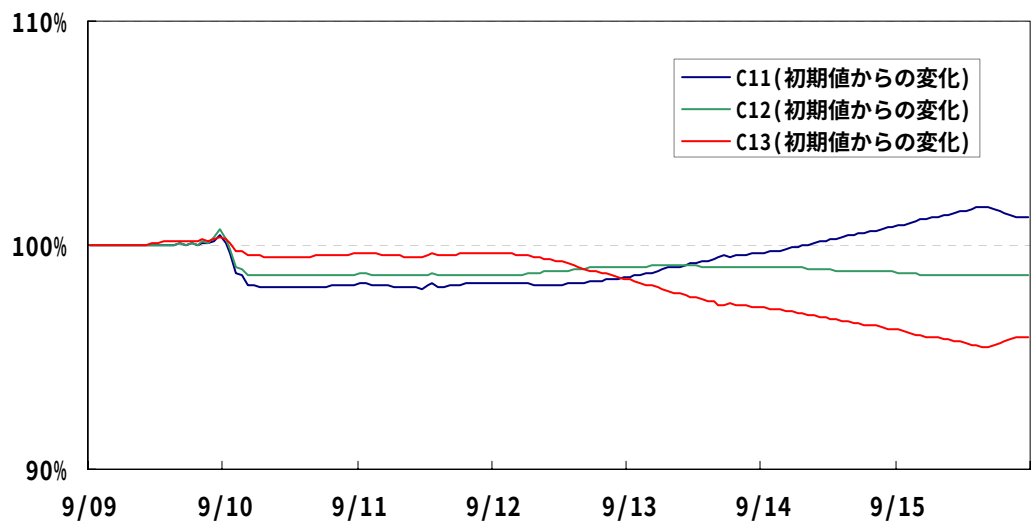


図6.4 パラメータ更新値の変化率

洪水の再現性を評価する方法として、予測水位 H_{ci} (m)と実測水位 H_{oi} (m)の平均2乗誤差の平方根 (RMSE: Root Mean Squares Error) を用いた。表6.7に計算結果を示す。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_{ci} - H_{oi})^2} \tag{6.88}$$

表6.7 予測雨量の誤差を考慮した予測水位の比較

	1時間先予測	2時間先予測	3時間先予測
実測ピーク水位	6.28m	6.28m	6.28m
予測ピーク水位	6.23m	6.20m	6.20m
予測水位+標準偏差	6.62m	6.60m	6.62m
RMSE	0.04m	0.07m	0.10m

表6.8 洪水予測シミュレーション結果一覧表

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
1	0.46	0.46	0.46	0.20	0.31	0.41	6.4900	0.1590	1.7970
2	0.46	0.46	0.46	0.14	0.23	0.31	6.4900	0.1590	1.7970
3	0.49	0.50	0.51	0.12	0.18	0.25	6.4900	0.1590	1.7969
4	0.48	0.48	0.48	0.10	0.15	0.20	6.4900	0.1590	1.7970
5	0.49	0.49	0.50	0.09	0.13	0.17	6.4900	0.1590	1.7969
6	0.51	0.51	0.52	0.09	0.12	0.15	6.4899	0.1590	1.7968
7	0.52	0.53	0.53	0.08	0.11	0.14	6.4898	0.1590	1.7967
8	0.51	0.51	0.51	0.08	0.10	0.12	6.4900	0.1590	1.7969
9	0.54	0.53	0.53	0.03	0.04	0.05	6.4896	0.1590	1.7965
10	0.50	0.50	0.51	0.07	0.09	0.11	6.4902	0.1590	1.7971
11	0.49	0.50	0.50	0.07	0.08	0.10	6.4903	0.1590	1.7973
12	0.42	0.42	0.43	0.07	0.08	0.10	6.4915	0.1590	1.7987
13	0.41	0.41	0.43	0.07	0.08	0.09	6.4917	0.1590	1.7991
14	0.37	0.38	0.40	0.06	0.07	0.09	6.4926	0.1590	1.8002
15	0.40	0.42	0.44	0.06	0.07	0.09	6.4921	0.1590	1.7997
16	0.39	0.42	0.45	0.06	0.07	0.09	6.4928	0.1590	1.8003
17	0.40	0.43	0.47	0.06	0.07	0.09	6.4936	0.1591	1.8008
18	0.46	0.50	0.54	0.06	0.07	0.04	6.4920	0.1590	1.8000
19	0.48	0.53	0.54	0.07	0.07	0.04	6.4932	0.1591	1.8005
20	0.53	0.55	0.57	0.03	0.03	0.04	6.4926	0.1590	1.8003
21	0.53	0.56	0.58	0.03	0.03	0.04	6.4973	0.1593	1.8012
22	0.56	0.59	0.61	0.03	0.03	0.04	6.4945	0.1592	1.8008
23	0.57	0.60	0.62	0.03	0.04	0.04	6.5019	0.1595	1.8018
24	0.56	0.59	0.62	0.03	0.04	0.04	6.5161	0.1601	1.8036
25	0.63	0.66	0.68	0.03	0.04	0.04	6.4947	0.1594	1.8012
26	0.71	0.74	0.76	0.04	0.04	0.04	6.4691	0.1587	1.7985
27	0.87	0.89	0.92	0.04	0.04	0.05	6.4115	0.1574	1.7926
28	0.92	0.95	0.97	0.05	0.05	0.05	6.4010	0.1573	1.7915
29	1.06	1.12	1.19	0.14	0.14	0.16	6.3747	0.1569	1.7887
30	1.15	1.22	1.28	0.15	0.15	0.17	6.3715	0.1569	1.7883
31	1.22	1.28	1.34	0.15	0.16	0.17	6.3709	0.1569	1.7882
32	1.30	1.35	1.41	0.16	0.16	0.17	6.3694	0.1569	1.7880
33	1.35	1.40	1.45	0.16	0.16	0.17	6.3700	0.1569	1.7881
34	1.41	1.46	1.51	0.16	0.17	0.18	6.3690	0.1569	1.7880
35	1.46	1.51	1.55	0.16	0.17	0.18	6.3690	0.1569	1.7880
36	1.51	1.55	1.60	0.17	0.17	0.19	6.3689	0.1569	1.7879
37	1.57	1.61	1.67	0.17	0.17	0.19	6.3679	0.1569	1.7877
38	1.64	1.69	1.75	0.17	0.18	0.20	6.3661	0.1569	1.7873
39	1.67	1.72	1.78	0.17	0.18	0.20	6.3678	0.1569	1.7877
40	1.71	1.77	1.83	0.18	0.18	0.20	6.3690	0.1569	1.7880
41	1.76	1.82	1.88	0.18	0.18	0.20	6.3695	0.1569	1.7882
42	1.80	1.87	1.94	0.18	0.19	0.21	6.3708	0.1569	1.7885

表6.8 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
43	1.86	1.93	2.00	0.18	0.19	0.21	6.3710	0.1569	1.7886
44	1.93	2.00	2.08	0.19	0.19	0.22	6.3713	0.1569	1.7886
45	1.99	2.07	2.15	0.19	0.20	0.22	6.3718	0.1569	1.7888
46	2.07	2.15	2.24	0.19	0.20	0.23	6.3720	0.1569	1.7888
47	2.13	2.21	2.31	0.20	0.20	0.23	6.3736	0.1569	1.7893
48	2.18	2.28	2.38	0.20	0.21	0.24	6.3758	0.1569	1.7899
49	2.26	2.36	2.46	0.20	0.21	0.24	6.3773	0.1570	1.7903
50	2.36	2.47	2.58	0.20	0.21	0.25	6.3771	0.1570	1.7903
51	2.48	2.59	2.71	0.21	0.22	0.26	6.3764	0.1569	1.7901
52	2.60	2.72	2.87	0.21	0.23	0.28	6.3755	0.1569	1.7898
53	2.75	2.89	3.05	0.23	0.24	0.29	6.3739	0.1569	1.7894
54	2.91	3.07	3.25	0.23	0.25	0.30	6.3724	0.1569	1.7891
55	3.10	3.27	3.47	0.24	0.26	0.32	6.3707	0.1569	1.7886
56	3.29	3.49	3.69	0.25	0.27	0.33	6.3692	0.1569	1.7883
57	3.51	3.71	3.93	0.26	0.28	0.34	6.3675	0.1568	1.7879
58	3.71	3.93	4.15	0.27	0.29	0.35	6.3674	0.1568	1.7879
59	3.95	4.17	4.40	0.28	0.30	0.36	6.3657	0.1568	1.7875
60	4.18	4.41	4.64	0.29	0.32	0.37	6.3651	0.1568	1.7874
61	4.27	4.50	4.73	0.30	0.33	0.38	6.3758	0.1569	1.7896
62	4.45	4.68	4.90	0.31	0.33	0.39	6.3794	0.1570	1.7903
63	4.80	5.02	5.23	0.32	0.34	0.39	6.3701	0.1569	1.7884
64	5.01	5.23	5.42	0.33	0.35	0.40	6.3707	0.1569	1.7885
65	5.20	5.39	5.57	0.34	0.36	0.41	6.3727	0.1569	1.7890
66	5.36	5.54	5.70	0.35	0.37	0.41	6.3749	0.1569	1.7895
67	5.51	5.67	5.81	0.36	0.38	0.41	6.3768	0.1569	1.7899
68	5.65	5.79	5.91	0.36	0.38	0.42	6.3781	0.1569	1.7902
69	5.78	5.90	6.00	0.37	0.39	0.42	6.3788	0.1569	1.7904
70	5.85	5.95	6.03	0.38	0.39	0.42	6.3817	0.1569	1.7912
71	5.94	6.02	6.09	0.38	0.39	0.42	6.3821	0.1569	1.7913
72	6.06	6.13	6.17	0.38	0.40	0.42	6.3801	0.1569	1.7906
73	6.13	6.17	6.20	0.39	0.40	0.42	6.3799	0.1569	1.7905
74	6.17	6.20	6.20	0.39	0.40	0.42	6.3799	0.1569	1.7905
75	6.19	6.20	6.18	0.39	0.40	0.42	6.3800	0.1569	1.7906
76	6.20	6.19	6.16	0.39	0.40	0.42	6.3798	0.1569	1.7905
77	6.23	6.20	6.15	0.39	0.40	0.42	6.3787	0.1569	1.7897
78	6.22	6.18	6.11	0.39	0.40	0.42	6.3780	0.1569	1.7892
79	6.22	6.16	6.08	0.39	0.40	0.42	6.3772	0.1570	1.7883
80	6.19	6.11	6.02	0.39	0.40	0.42	6.3767	0.1570	1.7877
81	6.15	6.06	5.96	0.39	0.40	0.42	6.3763	0.1570	1.7869
82	6.10	6.00	5.88	0.39	0.40	0.41	6.3761	0.1571	1.7861
83	6.03	5.91	5.79	0.39	0.40	0.41	6.3761	0.1571	1.7854
84	5.95	5.82	5.69	0.39	0.39	0.41	6.3763	0.1571	1.7847

表6.8 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
85	5.88	5.75	5.61	0.38	0.39	0.41	6.3768	0.1572	1.7834
86	5.82	5.67	5.53	0.38	0.39	0.40	6.3777	0.1572	1.7820
87	5.71	5.57	5.42	0.38	0.39	0.40	6.3784	0.1573	1.7811
88	5.62	5.46	5.31	0.37	0.38	0.40	6.3795	0.1573	1.7800
89	5.55	5.40	5.24	0.37	0.38	0.39	6.3819	0.1573	1.7780
90	5.45	5.29	5.13	0.36	0.38	0.39	6.3834	0.1574	1.7769
91	5.33	5.17	5.00	0.36	0.37	0.39	6.3846	0.1574	1.7760
92	5.20	5.04	4.88	0.35	0.37	0.38	6.3861	0.1574	1.7751
93	5.10	4.94	4.77	0.35	0.36	0.38	6.3886	0.1574	1.7738
94	4.99	4.83	4.66	0.34	0.36	0.37	6.3910	0.1575	1.7725
95	4.87	4.71	4.54	0.34	0.35	0.37	6.3932	0.1575	1.7714
96	4.76	4.60	4.43	0.33	0.35	0.36	6.3961	0.1575	1.7701
97	4.64	4.48	4.32	0.33	0.34	0.36	6.3986	0.1575	1.7690
98	4.52	4.36	4.20	0.32	0.34	0.35	6.4012	0.1575	1.7679
99	4.40	4.24	4.09	0.32	0.33	0.35	6.4039	0.1575	1.7668
100	4.30	4.14	3.99	0.31	0.33	0.34	6.4078	0.1575	1.7653
101	4.19	4.03	3.88	0.31	0.32	0.34	6.4108	0.1576	1.7642
102	4.09	3.93	3.78	0.30	0.32	0.33	6.4148	0.1576	1.7628
103	3.99	3.84	3.69	0.30	0.31	0.33	6.4190	0.1576	1.7613
104	3.90	3.75	3.60	0.29	0.31	0.32	6.4239	0.1576	1.7597
105	3.77	3.62	3.48	0.29	0.30	0.32	6.4254	0.1576	1.7592
106	3.66	3.51	3.37	0.28	0.30	0.31	6.4283	0.1576	1.7582
107	3.58	3.44	3.30	0.28	0.29	0.31	6.4336	0.1576	1.7566
108	3.50	3.36	3.23	0.27	0.29	0.30	6.4391	0.1576	1.7549
109	3.37	3.24	3.10	0.27	0.28	0.30	6.4400	0.1576	1.7547
110	3.27	3.14	3.01	0.27	0.28	0.29	6.4431	0.1575	1.7538
111	3.17	3.04	2.92	0.26	0.27	0.29	6.4463	0.1575	1.7528
112	3.08	2.96	2.84	0.26	0.27	0.28	6.4502	0.1575	1.7517
113	3.04	2.92	2.80	0.25	0.26	0.28	6.4581	0.1575	1.7495
114	2.97	2.85	2.73	0.25	0.26	0.27	6.4631	0.1575	1.7482
115	2.79	2.68	2.57	0.25	0.25	0.26	6.4574	0.1575	1.7497
116	2.69	2.58	2.47	0.24	0.24	0.25	6.4582	0.1575	1.7495
117	2.60	2.50	2.39	0.23	0.24	0.25	6.4607	0.1575	1.7488
118	2.51	2.41	2.30	0.22	0.23	0.24	6.4623	0.1575	1.7484
119	2.43	2.33	2.23	0.22	0.23	0.24	6.4651	0.1575	1.7477
120	2.34	2.24	2.14	0.21	0.22	0.24	6.4660	0.1575	1.7475
121	2.26	2.16	2.07	0.21	0.22	0.23	6.4683	0.1575	1.7469
122	2.19	2.10	2.00	0.21	0.21	0.23	6.4715	0.1575	1.7461
123	2.11	2.01	1.93	0.20	0.21	0.22	6.4726	0.1574	1.7458
124	2.04	1.95	1.86	0.20	0.21	0.22	6.4752	0.1574	1.7452
125	1.98	1.89	1.81	0.20	0.20	0.21	6.4788	0.1574	1.7443
126	1.92	1.84	1.75	0.19	0.20	0.21	6.4822	0.1574	1.7435

表6.8 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
127	1.86	1.78	1.70	0.19	0.20	0.21	6.4854	0.1574	1.7427
128	1.80	1.72	1.65	0.19	0.19	0.20	6.4884	0.1574	1.7420
129	1.76	1.68	1.60	0.18	0.19	0.20	6.4921	0.1573	1.7412
130	1.71	1.63	1.56	0.18	0.19	0.20	6.4957	0.1573	1.7403
131	1.66	1.59	1.51	0.18	0.19	0.19	6.4991	0.1573	1.7395
132	1.62	1.55	1.48	0.18	0.18	0.19	6.5032	0.1573	1.7386
133	1.57	1.50	1.44	0.18	0.18	0.19	6.5063	0.1573	1.7379
134	1.53	1.47	1.40	0.17	0.18	0.19	6.5100	0.1572	1.7370
135	1.50	1.43	1.36	0.17	0.18	0.18	6.5136	0.1572	1.7362
136	1.46	1.39	1.33	0.17	0.17	0.18	6.5170	0.1572	1.7354
137	1.42	1.36	1.29	0.17	0.17	0.18	6.5202	0.1572	1.7347
138	1.38	1.32	1.26	0.17	0.17	0.18	6.5233	0.1572	1.7340
139	1.33	1.27	1.21	0.16	0.17	0.17	6.5251	0.1572	1.7335
140	1.30	1.24	1.18	0.16	0.17	0.17	6.5287	0.1571	1.7327
141	1.27	1.21	1.15	0.16	0.16	0.17	6.5313	0.1571	1.7321
142	1.24	1.18	1.12	0.16	0.16	0.17	6.5347	0.1571	1.7314
143	1.23	1.17	1.11	0.16	0.16	0.17	6.5399	0.1571	1.7301
144	1.19	1.13	1.08	0.16	0.16	0.17	6.5424	0.1571	1.7296
145	1.16	1.11	1.05	0.15	0.16	0.16	6.5453	0.1570	1.7289
146	1.15	1.10	1.04	0.15	0.16	0.16	6.5500	0.1570	1.7278
147	1.13	1.08	1.01	0.15	0.16	0.06	6.5540	0.1570	1.7269
148	1.13	1.08	1.01	0.15	0.15	0.06	6.5595	0.1570	1.7256
149	1.11	1.06	1.01	0.15	0.15	0.06	6.5633	0.1569	1.7247
150	1.10	1.05	1.01	0.15	0.15	0.06	6.5676	0.1569	1.7237
151	1.07	1.01	0.99	0.15	0.05	0.06	6.5692	0.1569	1.7233
152	1.05	1.01	0.99	0.15	0.05	0.06	6.5730	0.1569	1.7224
153	1.04	1.00	0.98	0.15	0.05	0.06	6.5761	0.1569	1.7217
154	1.01	0.99	0.98	0.05	0.05	0.06	6.5791	0.1569	1.7210
155	1.01	0.99	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5828	0.1569	1.7201
156	1.00	0.99	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5866	0.1568	1.7192
157	1.00	0.99	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5911	0.1568	1.7181
158	1.00	0.98	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5939	0.1568	1.7174
159	1.00	0.98	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5981	0.1568	1.7163
160	0.99	0.98	0.96	0.05	0.05	0.05	6.6011	0.1568	1.7156
161	0.98	0.97	0.95	0.05	0.05	0.05	6.6029	0.1568	1.7152
162	0.93	0.92	0.90	0.05	0.05	0.05	6.5936	0.1568	1.7175
163	0.90	0.88	0.87	0.05	0.05	0.05	6.5886	0.1568	1.7187
164	0.86	0.84	0.83	0.05	0.05	0.05	6.5818	0.1569	1.7204
165	0.82	0.81	0.79	0.05	0.05	0.05	6.5742	0.1569	1.7223
166	0.80	0.78	0.77	0.04	0.04	0.05	6.5714	0.1569	1.7230
167	0.78	0.76	0.75	0.04	0.04	0.04	6.5693	0.1569	1.7235
168	0.77	0.76	0.75	0.04	0.04	0.04	6.5732	0.1569	1.7226

(4) 過去3時間の移動平均雨量を用いた洪水予測シミュレーション

(3)と同様の条件、洪水データを用い石狩大橋地点の1時間～3時間先予測までの予測シミュレーションを行った。その際に、実際の予測計算を考慮し旧建設省の洪水予報業務においてよく用いられている**過去3時間の移動平均雨量**を用いた。この方法は単純な時系列予報であるが、従来の流出予測において特別な不都合を生じなかったこと、またその計算が簡便であることなどから多用されてきたものである。ここに、(3)で行った実測雨量を用いた予測シミュレーションとの相違点を述べる。

- 現時刻 t_k から l 時間後の降雨予測値を $\hat{r}_{k+l}$ とする。すなわち、 $\hat{r}_{k+l} = (r_{k-2} + r_{k-1} + r_k)/3$ を予測雨量として3時間先まで予測を行う。このとき、予測雨量の誤差分散は式(6.4)で与える。
- 予測計算終了時点で新しい実測雨量データを入手。
- (b)で得た実測雨量に基づいて状態の推移を式(6.35)によって求め直し、状態変量と誤差分散・共分散を式(6.51)を用いて再計算する（フィードバック予測）。

その結果を図6.5に示す。

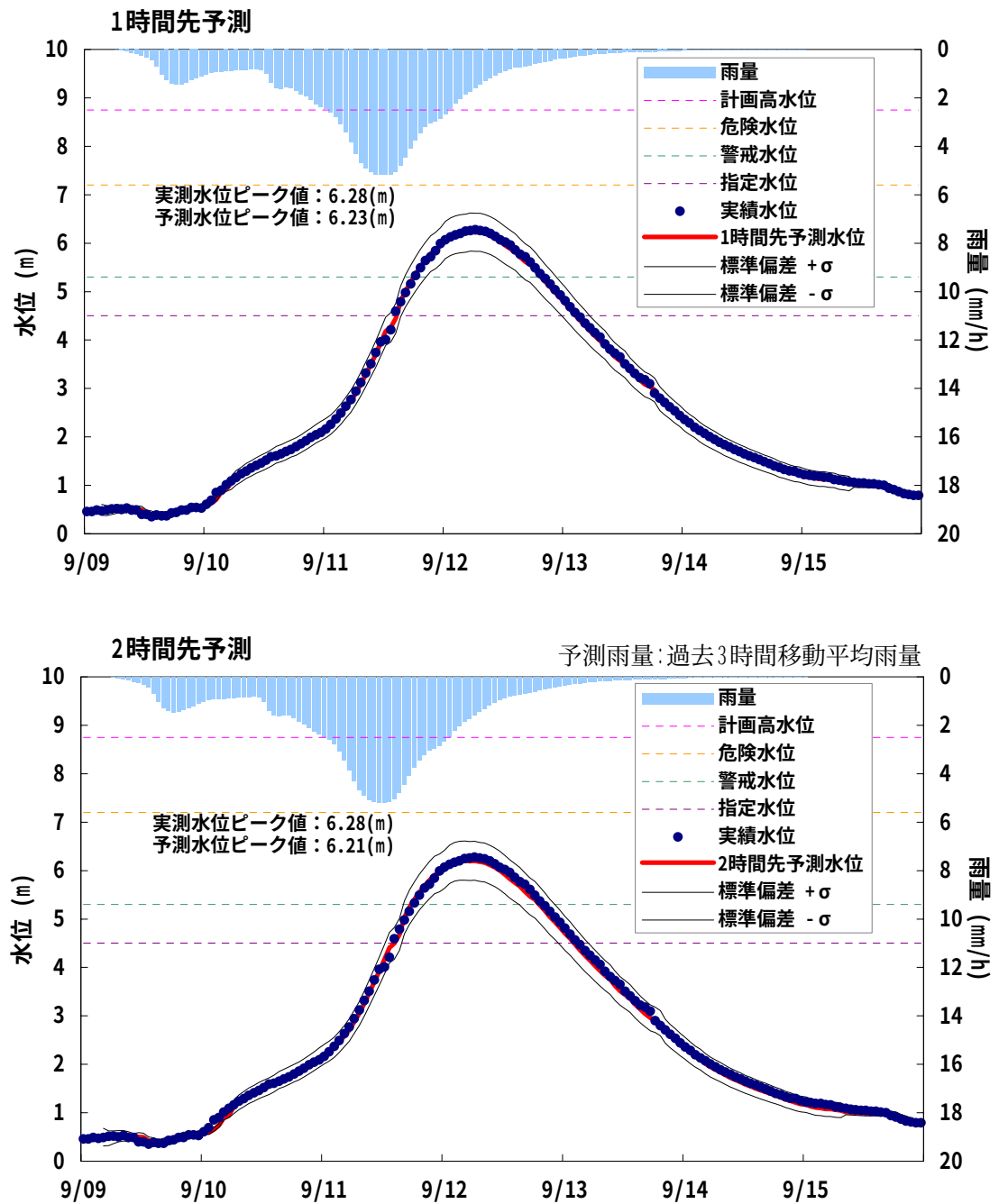


図6.5 洪水予測シミュレーション図 石狩大橋地点 (平成13年洪水)

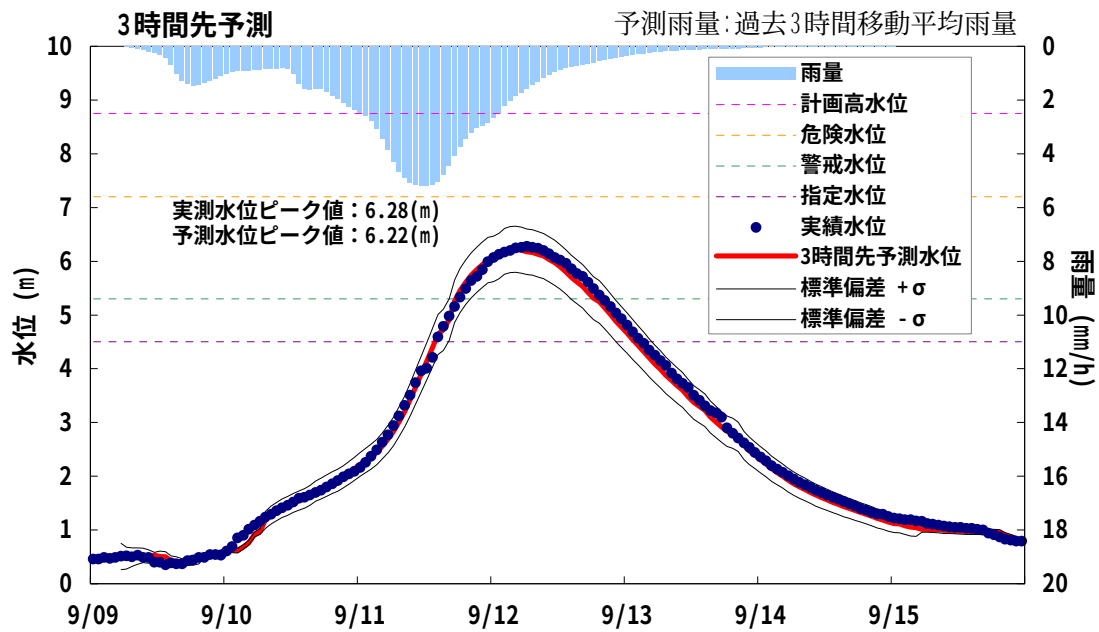


図6.5 洪水予測シミュレーション図 石狩大橋地点 (平成13年洪水)

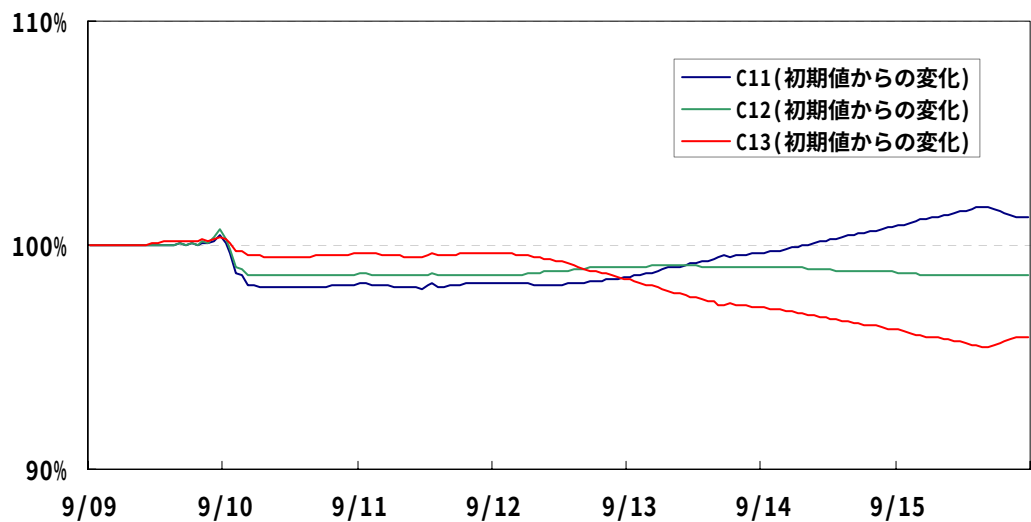


図6.6 パラメータ更新値の変化率

逐次更新されるパラメータ (c_{11} , c_{12} , c_{13}) の値は初期値を 100%として 1 時間ごとの変化率で図6.6に示すとおりモデル定数の時間変動率は小さく、5%以内に収まっている。

1 時間～3 時間先予測までの予測水位と標準偏差およびパラメータの更新値を表6.10に示す。ここで、洪水の再現性を評価する方法として、予測水位 H_{ci} (m)と実測水位 H_{oi} (m)の平均 2 乗誤差の平方根 (RMSE: Root Mean Squares Error) を用いた。表6.9に計算結果を示す。

表6.9 過去3時間の移動平均雨量を用いた予測水位の比較

	1時間先予測	2時間先予測	3時間先予測
実測ピーク水位	6.28m	6.28m	6.28m
予測ピーク水位	6.23m	6.21m	6.22m
予測水位+標準偏差	6.62m	6.61m	6.65m
RMSE	0.04m	0.07m	0.10m

表6.10 洪水予測シミュレーション結果一覧表

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
1	0.46	0.46	0.46	0.20	0.31	0.41	6.4900	0.1590	1.7970
2	0.46	0.46	0.46	0.14	0.23	0.31	6.4900	0.1590	1.7970
3	0.49	0.50	0.51	0.12	0.18	0.25	6.4900	0.1590	1.7969
4	0.48	0.48	0.48	0.10	0.15	0.20	6.4900	0.1590	1.7970
5	0.49	0.49	0.49	0.09	0.13	0.17	6.4900	0.1590	1.7969
6	0.51	0.51	0.52	0.09	0.12	0.15	6.4899	0.1590	1.7968
7	0.52	0.53	0.53	0.08	0.11	0.14	6.4898	0.1590	1.7967
8	0.51	0.51	0.51	0.08	0.10	0.12	6.4900	0.1590	1.7969
9	0.54	0.53	0.53	0.03	0.04	0.05	6.4896	0.1590	1.7965
10	0.50	0.50	0.50	0.07	0.09	0.11	6.4902	0.1590	1.7971
11	0.49	0.50	0.50	0.07	0.08	0.10	6.4903	0.1590	1.7973
12	0.42	0.42	0.42	0.07	0.08	0.09	6.4915	0.1590	1.7987
13	0.41	0.41	0.42	0.07	0.07	0.09	6.4917	0.1590	1.7991
14	0.36	0.37	0.38	0.06	0.07	0.08	6.4926	0.1590	1.8002
15	0.40	0.41	0.42	0.06	0.07	0.08	6.4921	0.1590	1.7997
16	0.39	0.41	0.43	0.06	0.07	0.08	6.4928	0.1590	1.8003
17	0.40	0.43	0.46	0.06	0.07	0.09	6.4936	0.1591	1.8008
18	0.46	0.50	0.54	0.06	0.07	0.04	6.4920	0.1590	1.8000
19	0.48	0.53	0.54	0.07	0.07	0.04	6.4932	0.1591	1.8005
20	0.54	0.55	0.57	0.03	0.03	0.04	6.4926	0.1590	1.8003
21	0.53	0.56	0.58	0.03	0.03	0.04	6.4973	0.1593	1.8012
22	0.56	0.59	0.62	0.03	0.03	0.04	6.4945	0.1592	1.8008
23	0.57	0.60	0.62	0.03	0.04	0.04	6.5019	0.1595	1.8018
24	0.56	0.59	0.62	0.03	0.04	0.04	6.5161	0.1601	1.8036
25	0.63	0.66	0.69	0.03	0.04	0.04	6.4947	0.1594	1.8012
26	0.71	0.74	0.76	0.04	0.04	0.05	6.4691	0.1587	1.7985
27	0.87	0.89	0.92	0.04	0.04	0.05	6.4115	0.1574	1.7926
28	0.92	0.95	0.97	0.05	0.05	0.05	6.4010	0.1573	1.7915
29	1.06	1.12	1.19	0.14	0.14	0.16	6.3747	0.1569	1.7887
30	1.15	1.22	1.28	0.15	0.15	0.17	6.3715	0.1569	1.7883
31	1.22	1.28	1.34	0.15	0.16	0.17	6.3709	0.1569	1.7882
32	1.30	1.35	1.41	0.16	0.16	0.17	6.3694	0.1569	1.7880
33	1.35	1.40	1.45	0.16	0.16	0.18	6.3700	0.1569	1.7881
34	1.41	1.46	1.51	0.16	0.17	0.18	6.3690	0.1569	1.7880
35	1.46	1.50	1.55	0.16	0.17	0.18	6.3690	0.1569	1.7880
36	1.51	1.55	1.59	0.17	0.17	0.18	6.3689	0.1569	1.7879
37	1.56	1.60	1.64	0.17	0.17	0.18	6.3679	0.1569	1.7877
38	1.63	1.68	1.72	0.17	0.18	0.19	6.3661	0.1569	1.7873
39	1.67	1.72	1.77	0.17	0.18	0.19	6.3678	0.1569	1.7877
40	1.71	1.77	1.83	0.18	0.18	0.20	6.3690	0.1569	1.7880
41	1.76	1.82	1.88	0.18	0.18	0.20	6.3695	0.1569	1.7882
42	1.80	1.87	1.93	0.18	0.19	0.20	6.3708	0.1569	1.7885

表6.10 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
43	1.86	1.93	1.99	0.18	0.19	0.21	6.3710	0.1569	1.7886
44	1.93	1.99	2.06	0.19	0.19	0.21	6.3713	0.1569	1.7886
45	1.99	2.06	2.14	0.19	0.19	0.22	6.3718	0.1569	1.7888
46	2.07	2.14	2.22	0.19	0.20	0.22	6.3720	0.1569	1.7888
47	2.13	2.21	2.29	0.19	0.20	0.23	6.3736	0.1569	1.7893
48	2.18	2.27	2.36	0.20	0.21	0.23	6.3758	0.1569	1.7899
49	2.26	2.35	2.45	0.20	0.21	0.24	6.3773	0.1570	1.7903
50	2.36	2.46	2.56	0.20	0.21	0.24	6.3771	0.1570	1.7903
51	2.47	2.58	2.69	0.21	0.22	0.26	6.3764	0.1569	1.7901
52	2.60	2.71	2.83	0.21	0.23	0.26	6.3755	0.1569	1.7898
53	2.74	2.88	3.01	0.23	0.24	0.28	6.3739	0.1569	1.7894
54	2.91	3.05	3.20	0.23	0.25	0.29	6.3724	0.1569	1.7891
55	3.09	3.26	3.42	0.24	0.26	0.30	6.3707	0.1569	1.7886
56	3.29	3.47	3.66	0.25	0.27	0.32	6.3692	0.1569	1.7883
57	3.51	3.70	3.91	0.26	0.28	0.33	6.3675	0.1568	1.7879
58	3.71	3.92	4.14	0.27	0.29	0.35	6.3674	0.1568	1.7879
59	3.95	4.17	4.40	0.28	0.30	0.36	6.3657	0.1568	1.7875
60	4.18	4.41	4.64	0.29	0.31	0.37	6.3651	0.1568	1.7874
61	4.27	4.50	4.73	0.30	0.33	0.38	6.3758	0.1569	1.7896
62	4.45	4.68	4.91	0.31	0.33	0.39	6.3794	0.1570	1.7903
63	4.80	5.03	5.26	0.32	0.34	0.40	6.3701	0.1569	1.7884
64	5.02	5.24	5.46	0.33	0.35	0.41	6.3707	0.1569	1.7885
65	5.20	5.41	5.61	0.34	0.36	0.42	6.3727	0.1569	1.7890
66	5.37	5.56	5.74	0.35	0.37	0.42	6.3749	0.1569	1.7895
67	5.52	5.69	5.85	0.36	0.38	0.42	6.3768	0.1569	1.7899
68	5.66	5.80	5.94	0.36	0.38	0.42	6.3781	0.1569	1.7902
69	5.78	5.91	6.02	0.37	0.39	0.42	6.3788	0.1569	1.7904
70	5.85	5.96	6.05	0.38	0.39	0.42	6.3817	0.1569	1.7912
71	5.94	6.03	6.10	0.38	0.39	0.42	6.3821	0.1569	1.7913
72	6.07	6.13	6.19	0.38	0.40	0.43	6.3801	0.1569	1.7906
73	6.13	6.18	6.22	0.39	0.40	0.43	6.3799	0.1569	1.7905
74	6.18	6.21	6.22	0.39	0.40	0.43	6.3799	0.1569	1.7905
75	6.20	6.21	6.21	0.39	0.40	0.43	6.3800	0.1569	1.7906
76	6.20	6.20	6.18	0.39	0.40	0.43	6.3798	0.1569	1.7905
77	6.23	6.20	6.17	0.39	0.40	0.42	6.3787	0.1569	1.7897
78	6.23	6.18	6.13	0.39	0.40	0.42	6.3780	0.1569	1.7892
79	6.22	6.17	6.10	0.39	0.40	0.42	6.3772	0.1570	1.7883
80	6.19	6.12	6.04	0.39	0.40	0.42	6.3767	0.1570	1.7877
81	6.16	6.07	5.97	0.39	0.40	0.42	6.3763	0.1570	1.7869
82	6.10	6.00	5.89	0.39	0.40	0.42	6.3761	0.1571	1.7861
83	6.03	5.92	5.80	0.39	0.40	0.41	6.3761	0.1571	1.7854
84	5.95	5.83	5.70	0.39	0.39	0.41	6.3763	0.1571	1.7847

表6.10 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
85	5.89	5.75	5.62	0.38	0.39	0.41	6.3768	0.1572	1.7834
86	5.82	5.68	5.53	0.38	0.39	0.41	6.3777	0.1572	1.7820
87	5.71	5.57	5.42	0.38	0.39	0.40	6.3784	0.1573	1.7811
88	5.62	5.47	5.31	0.37	0.38	0.40	6.3795	0.1573	1.7800
89	5.55	5.40	5.25	0.37	0.38	0.40	6.3819	0.1573	1.7780
90	5.45	5.29	5.13	0.36	0.38	0.39	6.3834	0.1574	1.7769
91	5.33	5.17	5.01	0.36	0.37	0.39	6.3846	0.1574	1.7760
92	5.20	5.04	4.88	0.35	0.37	0.38	6.3861	0.1574	1.7751
93	5.10	4.94	4.78	0.35	0.36	0.38	6.3886	0.1574	1.7738
94	4.99	4.83	4.67	0.34	0.36	0.37	6.3910	0.1575	1.7725
95	4.87	4.71	4.55	0.34	0.35	0.37	6.3932	0.1575	1.7714
96	4.76	4.60	4.44	0.33	0.35	0.37	6.3961	0.1575	1.7701
97	4.64	4.48	4.32	0.33	0.34	0.36	6.3986	0.1575	1.7690
98	4.52	4.36	4.20	0.32	0.34	0.35	6.4012	0.1575	1.7679
99	4.40	4.24	4.09	0.32	0.33	0.35	6.4039	0.1575	1.7668
100	4.30	4.14	3.99	0.31	0.33	0.34	6.4078	0.1575	1.7653
101	4.19	4.03	3.88	0.31	0.32	0.34	6.4108	0.1576	1.7642
102	4.09	3.93	3.78	0.30	0.32	0.33	6.4148	0.1576	1.7628
103	3.99	3.84	3.69	0.30	0.31	0.33	6.4190	0.1576	1.7613
104	3.90	3.75	3.61	0.29	0.31	0.32	6.4239	0.1576	1.7597
105	3.77	3.62	3.48	0.29	0.30	0.32	6.4254	0.1576	1.7592
106	3.66	3.52	3.38	0.28	0.30	0.31	6.4283	0.1576	1.7582
107	3.58	3.44	3.30	0.28	0.29	0.31	6.4336	0.1576	1.7566
108	3.50	3.36	3.23	0.27	0.29	0.30	6.4391	0.1576	1.7549
109	3.37	3.24	3.11	0.27	0.28	0.30	6.4400	0.1576	1.7547
110	3.27	3.14	3.01	0.27	0.28	0.29	6.4431	0.1575	1.7538
111	3.17	3.04	2.92	0.26	0.27	0.29	6.4463	0.1575	1.7528
112	3.08	2.96	2.84	0.26	0.27	0.28	6.4502	0.1575	1.7517
113	3.04	2.92	2.80	0.25	0.26	0.28	6.4581	0.1575	1.7495
114	2.97	2.85	2.73	0.25	0.26	0.27	6.4631	0.1575	1.7482
115	2.79	2.68	2.57	0.25	0.25	0.26	6.4574	0.1575	1.7497
116	2.69	2.58	2.47	0.24	0.24	0.25	6.4582	0.1575	1.7495
117	2.60	2.50	2.39	0.23	0.24	0.25	6.4607	0.1575	1.7488
118	2.51	2.41	2.30	0.22	0.23	0.24	6.4623	0.1575	1.7484
119	2.43	2.33	2.23	0.22	0.23	0.24	6.4651	0.1575	1.7477
120	2.34	2.24	2.14	0.21	0.22	0.24	6.4660	0.1575	1.7475
121	2.26	2.16	2.07	0.21	0.22	0.23	6.4683	0.1575	1.7469
122	2.19	2.10	2.00	0.21	0.21	0.23	6.4715	0.1575	1.7461
123	2.11	2.01	1.93	0.20	0.21	0.22	6.4726	0.1574	1.7458
124	2.04	1.95	1.86	0.20	0.21	0.22	6.4752	0.1574	1.7452
125	1.98	1.89	1.81	0.20	0.20	0.21	6.4788	0.1574	1.7443
126	1.92	1.84	1.75	0.19	0.20	0.21	6.4822	0.1574	1.7435

表6.10 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
127	1.86	1.78	1.70	0.19	0.20	0.21	6.4854	0.1574	1.7427
128	1.80	1.72	1.65	0.19	0.19	0.20	6.4884	0.1574	1.7420
129	1.76	1.68	1.60	0.18	0.19	0.20	6.4921	0.1573	1.7412
130	1.71	1.63	1.56	0.18	0.19	0.20	6.4957	0.1573	1.7403
131	1.66	1.59	1.51	0.18	0.19	0.19	6.4991	0.1573	1.7395
132	1.62	1.55	1.48	0.18	0.18	0.19	6.5032	0.1573	1.7386
133	1.57	1.50	1.44	0.18	0.18	0.19	6.5063	0.1573	1.7379
134	1.53	1.47	1.40	0.17	0.18	0.19	6.5100	0.1572	1.7370
135	1.50	1.43	1.36	0.17	0.18	0.18	6.5136	0.1572	1.7362
136	1.46	1.39	1.33	0.17	0.17	0.18	6.5170	0.1572	1.7354
137	1.42	1.36	1.29	0.17	0.17	0.18	6.5202	0.1572	1.7347
138	1.38	1.32	1.26	0.17	0.17	0.18	6.5233	0.1572	1.7340
139	1.33	1.27	1.21	0.16	0.17	0.17	6.5251	0.1572	1.7335
140	1.30	1.24	1.18	0.16	0.17	0.17	6.5287	0.1571	1.7327
141	1.27	1.21	1.15	0.16	0.16	0.17	6.5313	0.1571	1.7321
142	1.24	1.18	1.12	0.16	0.16	0.17	6.5347	0.1571	1.7314
143	1.23	1.17	1.11	0.16	0.16	0.17	6.5399	0.1571	1.7301
144	1.19	1.13	1.08	0.16	0.16	0.17	6.5424	0.1571	1.7296
145	1.16	1.11	1.05	0.15	0.16	0.16	6.5453	0.1570	1.7289
146	1.15	1.10	1.04	0.15	0.16	0.16	6.5500	0.1570	1.7278
147	1.13	1.08	1.02	0.15	0.16	0.06	6.5540	0.1570	1.7269
148	1.13	1.08	1.01	0.15	0.15	0.06	6.5595	0.1570	1.7256
149	1.11	1.06	1.01	0.15	0.15	0.06	6.5633	0.1569	1.7247
150	1.10	1.05	1.01	0.15	0.15	0.06	6.5676	0.1569	1.7237
151	1.07	1.01	0.99	0.15	0.05	0.06	6.5692	0.1569	1.7233
152	1.05	1.01	0.99	0.15	0.05	0.06	6.5730	0.1569	1.7224
153	1.04	1.00	0.98	0.15	0.05	0.06	6.5761	0.1569	1.7217
154	1.01	0.99	0.98	0.05	0.05	0.06	6.5791	0.1569	1.7210
155	1.01	0.99	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5828	0.1569	1.7201
156	1.00	0.99	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5866	0.1568	1.7192
157	1.00	0.99	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5911	0.1568	1.7181
158	1.00	0.98	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5939	0.1568	1.7174
159	1.00	0.98	0.97	0.05	0.05	0.05	6.5981	0.1568	1.7163
160	0.99	0.98	0.96	0.05	0.05	0.05	6.6011	0.1568	1.7156
161	0.98	0.97	0.95	0.05	0.05	0.05	6.6029	0.1568	1.7152
162	0.93	0.92	0.90	0.05	0.05	0.05	6.5936	0.1568	1.7175
163	0.90	0.88	0.87	0.05	0.05	0.05	6.5886	0.1568	1.7187
164	0.86	0.84	0.83	0.05	0.05	0.05	6.5818	0.1569	1.7204
165	0.82	0.81	0.79	0.05	0.05	0.05	6.5742	0.1569	1.7223
166	0.80	0.78	0.77	0.04	0.04	0.05	6.5714	0.1569	1.7230
167	0.78	0.76	0.75	0.04	0.04	0.04	6.5693	0.1569	1.7235
168	0.77	0.76	0.75	0.04	0.04	0.04	6.5732	0.1569	1.7226

次に、(3)実測雨量と(4)過去3時間の移動平均雨量を用いた洪水予測シミュレーション結果を1時間～3時間水位予測値を用いて比較した。その結果、実測雨量が過去3時間の移動平均雨量より大きい場合には水位差は正となり、逆の場合は負となる。

図6.7に示すように、各予測水位の差は ± 0.050 (m)以下と非常に小さな値となっていることから、過去3時間の移動平均雨量を用いて予測計算を行っても、実用上十分な精度を有していると考えられる。なお、図6.4と図6.6は同じであり、パラメータの更新値は変化しないことを意味する。

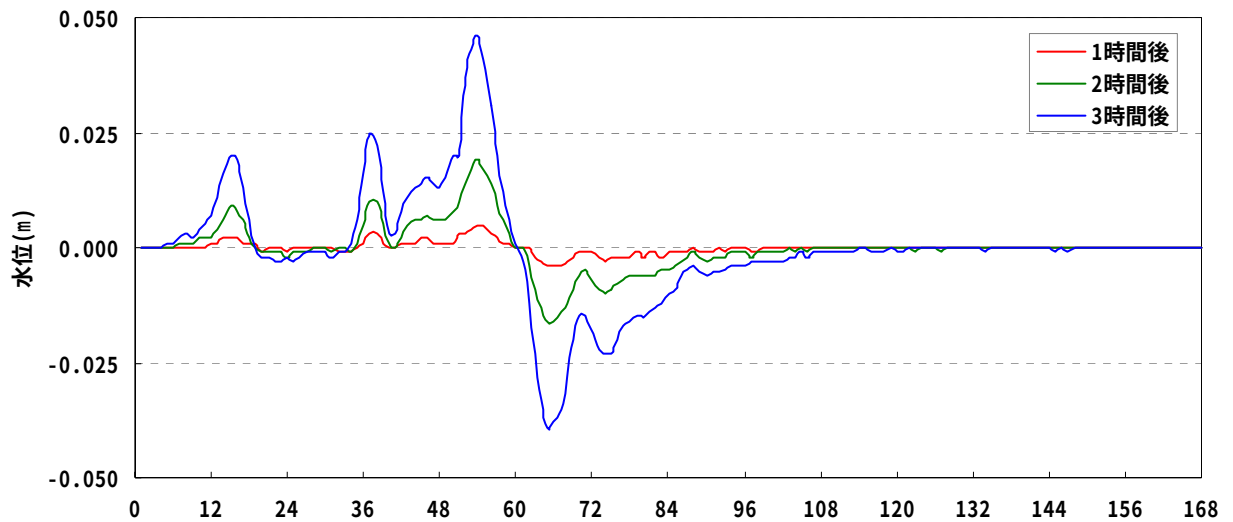


図6.7 実測雨量と過去3時間移動平均雨量による予測水位差

6.12 Fortran プログラム

1 段タンク型貯留関数法にカルマン・フィルタ理論を適用して予測雨量の誤差を考慮し、3時間先までの水位予測値($dis(i,j)$)と標準偏差($sig(i,j)$)およびモデルパラメータ更新値($x_{prn}(i)$)を計算する Fortran プログラムと入力変数名を以下に示す。また、プログラム中にはコメント文を加えたので、変数名と計算内容が容易に理解できるものとする。

なお、ナッシュモデルによる合成雨量算出プログラムについては、第5章を参照されたい。

(1) 主プログラムの機能

洪水予測を行うに際して、降雨量と水位の観測値が1時間ごとに得られるものとして、各地点での3時間先までの水位予測値(dis)と標準偏差(sig)およびモデルパラメータ更新値(x_{prn})を計算する。。このとき、新しい流量観測値に基づいて、1時間ごとに状態変量と誤差共分散が更新される。予測を行った後の状態変量と誤差共分散の更新・伝達は、予測の出発点にもどる。このプログラム例では、将来の降雨量予測を行っておらず、過去3時間の移動平均雨量を用いている点に注意すべきである。

実測雨量を用いる場合は、Main Program 内の **iflg=0** とし、過去3時間の移動平均雨量を用いる場合は **iflg=1** とすることでそれぞれの予測結果が得られる。

(2) サブプログラムの機能**(a) Subroutine no2kal**

式(6.35)の状態変量の伝達方程式により、 X_k を計算する。同時に、式(6.51)と式(6.52)および式(6.53)の推定誤差分散・共分散伝達方程式により、 $P_{1,k}$ と $P_{2,k}$ および $P_{3,k}$ を計算する。

(b) Subroutine no2upd

1時間ごとに観測値が入手されるとして、式(6.76)と式(6.77)により状態変量とパラメータの更新値を計算する。このとき、同時に式(6.87)により状態変量とパラメータの推定誤差分散・共分散($P_{1,k}, P_{2,k}, U_{1,k}$)を更新する。

(c) Subroutine input

状態変量 X_1 の初期値およびその誤差分散・共分散の初期値 $P_{1,k}$ と $P_{2,k}$ および $P_{3,k}$ を設定する。パラメータ c_{11}, c_{12}, c_{13} の初期値とその誤差分散・共分散 $U_{1,k}$ と予測雨量の誤差分散 $U_{2,k}$ を指定する。また、システム誤差分散・共分散 Q_k と観測誤差分散 R_k を入力する。

(d) Subroutine mul31,mul21

式(6.51)と式(6.52)に含まれる行列演算、 ABC^T と AB を出力する。

(e) Subroutine hqcurv

水位～流量曲線により、水位または流量を変換する。

(f) Subroutine hqcheck

適用下限水位と現在の値をチェックし、曲線分類ナンバーを出力する。

(3) 主な入力変数の内容**(a) Input Data**

pa_c1,pa_c2,pa_c3	それぞれ、パラメータ c_{11}, c_{12}, c_{13} の初期値
rah	平均雨量強度(既往洪水平均値)
ram	地下流出成分の減衰係数($\lambda=0.019$ に仮定)
suikei	水系名
kasen	河川名
chiten	地点名
title	洪水名
area	流域面積
hwl	計画高水位
xwl	危険水位
dwl	警戒水位
swl	指定水位
iy,im,id,ih	開始年、月、日、時

nr,nq	降雨データ数、水位データ数
r(i)	雨量データ
hrea(i)	水位データ
ax(i),bx(i),hx(i)	$H \sim Q$ 式における a, b , 適用下限水位
iflg	0:実測雨量 1:過去3時間移動平均雨量(data ファイルにて選択)

(b) Main Program

n	更新する状態変数数($n=2$)
np	c_{11}, c_{12}, c_{13} に関する配列数($np=3$)
np2	r に関する配列数($np2=1$)
iyoso	リードタイム(3時間先予測まで可能)
wp1	モデル定数 p_1 ($wp1=0.6$)
zp2	モデル定数 p_2 ($zp2=0.4678$)
nl	計算時間間隔(1時間)の分割数($nl=12$)
varq	式(6.49)の流量予測誤差分散
varh	式(6.50)の水位予測誤差分散
sig(i,j)	標準偏差
x(i)	状態変数 x_1, x_2 ($i=1 \sim 2$)
p1(i,j)	X_1 に関する(2×2)の分散・共分散
p2(i,j)	X_1 と X_2 に関する(2×3)の分散・共分散
p33(i,j)	X_1 と X_3 に関する(1×1)の分散・共分散
z	式(6.65)の現在時刻の観測流出高

(c) Subroutine no2kal

x(i)	状態変数 x_1, x_2 ($i=1 \sim 2$)、 c_{11}, c_{12}, c_{13} ($i=3 \sim 5$)
a21~a26	A_1, A_2, A_3 の要素である式(6.20)の値
f(i)	Φ の要素である式(6.28)と式(6.29)および式(6.30)の値
g(i)	Γ の要素である式(6.31)の値
d2	式(6.22)の d_2

(d) Subroutine no2upd

ck	式(6.66)の c_k
rq	観測誤差分散 R_k
s	表4.2式(8)「カルマン・ゲイン」の右辺第2項
q(i,j)	システム誤差分散・共分散 Q_k
u(i,j)	パラメータの誤差分散・共分散 $U_{1,k}$

(e) Subroutine input

alph1	システム誤差として x_1 と x_2 に乗ずる定数
alph2	初期値の誤差分散に乗ずる定数

alph3	モデルパラメータの誤差分散に乗ずる定数
alph4	観測誤差として c_k に乗ずる定数
akei	式(6.4)予測雨量の誤差分散の a_s の値
bkei	式(6.4)予測雨量の誤差分散の b_s の値

(5) 計算出力

地 点 名 : 石狩大橋
 開 始 時 間 : 2001年 9月 9日 1時
 流 域 面 積 : 12697.00
 分割数(n1) : 12
 予測雨量(iflg): 1=過去3時間移動平均雨量

<---貯留指数---><---パラメータ初期値--->

p1 p2 c11 c12 c13
 0.6000 0.4648 6.490 0.159 1.797

			<----- 予測値 ----->			<----- 標準偏差 ----->			<----- モデル定数 ----->		
N0	雨量	実測値	1時間後	2時間後	3時間後	1時間後	2時間後	3時間後	c11	c12	c13
1	0.00	0.46	0.460	0.459	0.458	0.2037	0.3063	0.4120	6.4900	0.1590	1.7970
2	0.00	0.46	0.459	0.458	0.457	0.1360	0.2271	0.3136	6.4900	0.1590	1.7970
3	0.00	0.49	0.494	0.500	0.505	0.1152	0.1816	0.2457	6.4900	0.1590	1.7969
4	0.00	0.47	0.475	0.476	0.476	0.1013	0.1516	0.2016	6.4900	0.1590	1.7970
5	0.00	0.49	0.491	0.493	0.494	0.0911	0.1309	0.1715	6.4900	0.1590	1.7969
6	0.00	0.51	0.511	0.514	0.516	0.0852	0.1172	0.1507	6.4899	0.1590	1.7968
7	0.02	0.52	0.522	0.525	0.527	0.0814	0.1073	0.1354	6.4898	0.1590	1.7967
8	0.05	0.50	0.505	0.506	0.507	0.0783	0.0995	0.1232	6.4900	0.1590	1.7969
9	0.08	0.53	0.544	0.530	0.531	0.0336	0.0415	0.0505	6.4896	0.1590	1.7965
10	0.13	0.49	0.501	0.502	0.504	0.0746	0.0890	0.1060	6.4902	0.1590	1.7971
11	0.19	0.49	0.494	0.496	0.499	0.0715	0.0836	0.0985	6.4903	0.1590	1.7973
12	0.25	0.40	0.418	0.421	0.423	0.0697	0.0799	0.0931	6.4915	0.1590	1.7987
13	0.33	0.40	0.406	0.410	0.415	0.0657	0.0748	0.0870	6.4917	0.1590	1.7991
14	0.44	0.35	0.364	0.371	0.379	0.0642	0.0721	0.0837	6.4926	0.1590	1.8002
15	0.70	0.39	0.396	0.408	0.422	0.0621	0.0694	0.0817	6.4921	0.1590	1.7997
16	1.04	0.37	0.391	0.410	0.432	0.0629	0.0700	0.0840	6.4928	0.1590	1.8003
17	1.27	0.37	0.398	0.426	0.458	0.0624	0.0700	0.0870	6.4936	0.1591	1.8008
18	1.40	0.43	0.458	0.496	0.538	0.0627	0.0709	0.0405	6.4920	0.1590	1.8000
19	1.45	0.44	0.482	0.528	0.544	0.0652	0.0735	0.0423	6.4932	0.1591	1.8005
20	1.43	0.49	0.535	0.548	0.573	0.0296	0.0334	0.0431	6.4926	0.1590	1.8003
21	1.36	0.49	0.531	0.556	0.582	0.0306	0.0343	0.0437	6.4973	0.1593	1.8012
22	1.28	0.54	0.563	0.589	0.617	0.0310	0.0346	0.0437	6.4945	0.1592	1.8008
23	1.19	0.54	0.569	0.596	0.624	0.0323	0.0357	0.0441	6.5019	0.1595	1.8018
24	1.11	0.53	0.563	0.590	0.617	0.0326	0.0358	0.0438	6.5161	0.1601	1.8036
25	1.03	0.61	0.631	0.658	0.686	0.0326	0.0358	0.0434	6.4947	0.1594	1.8012
26	0.96	0.69	0.710	0.737	0.764	0.0356	0.0385	0.0454	6.4691	0.1587	1.7985
27	0.92	0.85	0.866	0.893	0.919	0.0393	0.0420	0.0483	6.4115	0.1574	1.7926
28	0.90	0.90	0.922	0.947	0.972	0.0460	0.0482	0.0536	6.4010	0.1573	1.7915
29	0.89	1.01	1.056	1.124	1.189	0.1361	0.1418	0.1560	6.3747	0.1569	1.7887
30	0.88	1.09	1.153	1.217	1.278	0.1485	0.1536	0.1665	6.3715	0.1569	1.7883
31	0.86	1.16	1.223	1.284	1.341	0.1529	0.1578	0.1701	6.3709	0.1569	1.7882
32	0.84	1.24	1.298	1.354	1.407	0.1561	0.1608	0.1726	6.3694	0.1569	1.7880
33	0.84	1.29	1.348	1.400	1.450	0.1594	0.1638	0.1752	6.3700	0.1569	1.7881
34	0.82	1.36	1.411	1.460	1.505	0.1617	0.1659	0.1769	6.3690	0.1569	1.7880
35	0.80	1.41	1.459	1.504	1.546	0.1644	0.1684	0.1789	6.3690	0.1569	1.7880
36	0.84	1.46	1.505	1.548	1.587	0.1666	0.1704	0.1807	6.3689	0.1569	1.7879
37	1.01	1.52	1.562	1.604	1.643	0.1688	0.1726	0.1832	6.3679	0.1569	1.7877
38	1.38	1.59	1.633	1.679	1.723	0.1714	0.1756	0.1881	6.3661	0.1569	1.7873
39	1.60	1.61	1.666	1.718	1.770	0.1746	0.1793	0.1945	6.3678	0.1569	1.7877
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
168	0.00	0.79	0.774	0.761	0.748	0.0416	0.0424	0.0438	6.5732	0.1569	1.7226

(6) プログラムリスト

```

      program kalmanltr3
c-----
c      損失項を含む1段タンク型貯留関数法+カルマンフィルター
c      による洪水予測計算
c      予測雨量を状態変量にプラス
c
c      iflg=0 実測雨量を用いる
c      iflg=1 過去3時間移動平均雨量を用いる
c
c      kalmanltr3 < data > out
c
c      s = k1*q**p1 + k2*d(q**p2)/dt
c      ds/dt = r - q - b + q0
c      b = k3 * q
c      q0 = qb * exp(-λ*t)
c
c      k11 = c11 * A**0.24
c      k12 = c12 * k1**2 *rr**(-0.2648)
c      k13 = c13 - 1
c      p1 = 0.6 (固定)
c      p2 = 0.4648 (固定)
c-----
c
c      character suikei*80, kasen*80, chiten*80, title*80, rname(2)*22
c
c      dimension x(7), x_prn(7)
c      dimension p1(5,5), p2(5,5), q(5,5), u(5,5), u2(5,5)
c      dimension xex(5), plex(5,5), p2ex(5,5)
c      dimension p33(5,5), p3ex(5,5)
c      dimension qq(200), re(200), reav(200), qbase(200), dis(24,200)
c      dimension r(200), qq0(200), hrea(200)
c      dimension xpr(24), sig(24,200)
c      dimension mdays(12)
c
c      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
c      common /st2/ h,h2,h3,h4
c      common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4,akei,bkei
c      common /hqcv/ ax(5),bx(5),hx(5),qx(5)
c
c      data mdays /31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31/
c
c      n=2          ! 更新する状態変量 x1,x2
c      np=3         ! c1,c2,c3に関する配列
c      np2=1        ! rに関する配列
c      iyoso=3      ! 予測時間幅
c      wp1=0.6      ! モデル定数 p1
c      zp2=0.4648   ! モデル定数 p2
c      wp2=1.0/zp2
c
c      nl=12        ! 計算時間間隔 (1時間の分割数)
c      xnl=nl
c      h=1.0/xnl
c      h2=h**2
c      h3=h2*h
c      h4=h3*h
c
c
c      *****
c      データ読み込み開始

```

```

c      c11,c12,c13,平均雨量強度,減衰係数 λ
      read(5,'(5f8.0)') pa_c1,pa_c2,pa_c3,rah,ram
c
c      水系名
      read(5,'(a80)') suikei
c
c      河川名
      read(5,'(a80)') kasen
c
c      地点名
      read(5,'(a80)') chiten
c
c      洪水名
      read(5,'(a80)') title
c
c      流域面積、HWL、危険水位、警戒水位、指定水位
      read(5,'(5f8.0)') area,hwl,xwl,dwl,swl
c
c      開始年、月、日、時
      read(5,'(4i5)') iy,im,id,ih
c
c      降雨、水位データ数
      read(5,'(2i5)') nr,nq
c
c      雨量
      read(5,'(10f8.0)') (r(i),i=1,nr)
c
c      水位
      read(5,'(10f8.0)') (hrea(i),i=1,nq)
      read(5,'(i5)') nhq          ! H-Q式数
      do j = 1, nhq
        read(5,'(3f8.0)') ax(j),bx(j),hx(j) ! a, b, Hkagen
        qx(j)=ax(j)*(hx(j)+bx(j))**2
      end do
      do j = nhq, 5
        ax(j)=ax(nhq)
        bx(j)=bx(nhq)
        hx(j)=hx(nhq)
        qx(j)=qx(nhq)
      end do
c      流量算定
      call hqcurv( 1, 1, nq, hrea, qq0 )
c
c      <実測雨量:0 or 過去3時間移動平均雨量:1>予測フラグ
      rname(0)='実測雨量'
      rname(1)='過去3時間移動平均雨量'
      read(5,'(i5)') iflg
c
c      データ読み込み終了
c      *****
c
c      wc1=pa_c1
c      wc2=pa_c2
c      wc3=pa_c3
c
c      *****
c      ヘッダ部分出力開始
      write(6,'(''地 点 名      : ''',a80)') chiten
      write(6,'(''開 始 時 間  : ''',i4,'''年'',i2,'''月'',
+      i2,'''日'',i2,'''時''')')iy,im,id,ih
      write(6,'(''流 域 面 積  : ''',f8.2)')area

```

6. 予測雨量の誤差を考慮した洪水予測モデルの開発

```

      write(6, '('分割数(n1)      : ',i2)')n1
      write(6, '('予測雨量(iflg): ',i2,a22)')iflg,rname(iflg)
      write(6,806)
806   format(/ '<---貯留指数--->',
+           '<---パラメータ初期値--->')
      write(6, '(6x,'p1'',6x,'p2'',5x,'c11''
+           ',5x,'c12'',5x,'c13'')')
      write(6, '(2f8.4,3f8.3)') wp1,zp2,wc1,wc2,wc3
      write(6,807)
807   format(/19x,'<----- 予測値 ----->',
+           ' <----- 標準偏差 ----->',
+           ' <----- モデル定数 ----->')
      write(6,808)
808   format(' N0 ',x,'雨量 実測値',3x,
&           '1 時間後',1x,'2 時間後',1x,'3 時間後',1x,2x,
&           '1 時間後',2x,'2 時間後',2x,'3 時間後',2x,
&           '      c11      c12      c13')
c   ヘッダ部分出力終了
c*****
c
c
c
      do i=1,nr
        re(i)=r(i)
        if(i.ge.3) reav(i)=(r(i)+r(i-1)+r(i-2))/3  !過去 3 時間移動平均雨量
        if(i.eq.2) reav(i)=(r(i)+r(i-1))/2
        if(i.eq.1) reav(i)= r(i)
      end do
c
      do i=1,nq
        qq(i)=3.6*qq0(i)/area  ! qq(i) : 観測流出高
      end do
c
      ih=ih-1
      if(mod(iy,4).eq.0) mdays(2)=29
      if(iy.gt.1988) then
        iy=iy-1988
      else
        iy=iy-1925
      end if
c
c
c   初期値の設定
      call input(x,p1,p2,p33,q,u,u2,qq(1))
c
c   q0 の算出
      do ll=2,nq+iyoso
        ex1 = exp(-ram*(ll-1))
        ex2 = exp(-ram*(ll-2))
        ex0 = ( ex1 + ex2 ) * 0.5
        qbase(ll) = qq(1) * ex0
      end do
c
c
c*****
c   計算開始
c*****
      do 3000 ll=2,nq+1      ! ll は現在時刻のループ
c
        do i = 1, n+np
          x_prn(i) = x(i)
        end do
c

```



```

C
      wk1 = x(3) * area**0.24
      zk2 = x(4) * wk1**2.0 * rah**(-0.2648)
      wk2 = 1.0 / zk2

C
C
C*****
C      予測計算開始
C*****
C
C      状態変量 X1(x1,x2)の保存
      do i=1,n
        xex(i)=x(i)
      end do

C
C      X1 に関する (2*2)の分散・共分散の保存
      do i=1,n
        do j=1,n
          plex(i,j)=p1(i,j)
        end do
      end do

C
C      X2 に関する (2*3)の分散・共分散の保存
      do i=1,n
        do j=1,np
          p2ex(i,j)=p2(i,j)
        end do
      end do

C
C      X3 に関する (2*1)の分散・共分散の保存
      do i=1,n
        do j=1,np2
          p3ex(i,j)=p33(i,j)
        end do
      end do

C
C      ..... iyoso-hour ahead prediction .....
C
      do lt=1,iyoso
        rain=0.0
        if(iflg.eq.0 .and. ll+lt.le.nr) rain=re(ll+lt-1) !実測雨量
        if(iflg.eq.1 .and. ll+lt.le.nr) rain=reav(ll-1) !3時間移動平均雨量
        q_00 = qbase(ll+lt-1)

C
C      状態変量、誤差分散・共分散の伝達
        rain0 = rain
        if( rain .lt. 0.1 ) rain0=0.1
        u2(1,1) = akei**2.0 * lt * rain0**(2.0*bkei)
        do k=1,nl
          call no2kal(q_00,x,p1,p2,p33,u,u2)
        end do

C
C      予測流量算出
        xpr(lt)=area*x(1)**wp2/3.6

C
C      予測誤差分散算出
        call hqcurv( 2, 1, 1, hpr, xpr(lt) )
        dis(lt,ll)=hpr
        call hqcheck(hpr,no_hq)
        b11 = 1.0 / (ax(no_hq))**0.5
        varq = (area/3.6)**2.0*(x(1)**(wp2-1.0)*wp2)**2.0*p1(1,1)
        varh = b11**2.0/4.0*(area/3.6*(x(1)**wp2))**(-1.0) * varq

```

6. 予測雨量の誤差を考慮した洪水予測モデルの開発

```

C
C      標準偏差算出
C      sig(lt,ll)=varh**0.5
C
C
C      end do
C*****
C      予測計算終了
C*****
C
C
C      z0=hrea(ll-1)
C      ih=ih+1
C      if(ih.gt.24) then
C        ih=1
C        id=id+1
C        if(id.gt.mdays(im)) then
C          id=1
C          im=im+1
C          if(im.gt.12) then
C            im=1
C            iy=iy+1
C          end if
C        end if
C      end if
C    end if
C
C
C
C*****
C      計算結果出力
C*****
C      write(6,809) ll-1,r(ll-1),z0,
C      &          (dis(i,ll),i=1,3),
C      &          (sig(i,ll),i=1,3),
C      &          (x_prn(i),i=3,5)
809    format(i3,f6.2,f8.2,2x,3f8.3,x,3f9.4,2x,3f8.4)
C
C      状態変量 X1(x1,x2)を元に戻す
C      do i=1,n
C        x(i)=xex(i)
C      end do
C
C
C      X1 に関する (2*2)の分散・共分散を元に戻す
C      do i=1,n
C        do j=1,n
C          p1(i,j)=p1ex(i,j)
C        end do
C      end do
C
C
C      X2 に関する (2*3)の分散・共分散を元に戻す
C      do i=1,n
C        do j=1,np
C          p2(i,j)=p2ex(i,j)
C        end do
C      end do
C
C
C      X3 に関する (2*1)の分散・共分散を元に戻す
C      do i=1,n
C        do j=1,np2
C          p33(i,j)=p3ex(i,j)
C        end do
C      end do
C

```

```

      rain=0.0
      if(l1+1 .le. nr) rain = re(l1)
      q_00 = qbase(l1)
C
C      状態変量、誤差分散・共分散の伝達
      u2(1,1) = 0.0
      do k=1,n1
        call no2kal(q_00,x,p1,p2,p33,u,u2)
      end do
C
C      P1 に乗算的ノイズを設定
      do i=1,n
        q(i,i)=(x(i)*alph1)**2 ! 観測誤差の分散 R (ck*α4)^2
        p1(i,i)=p1(i,i)+q(i,i)
      end do
C
C      z=qq(l1) ! 現在時刻の観測流出高
C
C      カルマンフィルターによる状態変量、誤差分散・共分散の更新
      call no2upd(x,p1,p2,u,z)
C
      3000 continue
C*****
C      計算終了
C*****
C
      stop
      end
C
C
      subroutine no2kal(q_00,x,p1,p2,p33,u,u2)
C-----
C      s = k1*q**p1 + k2*d(q**p2)/dt
C
C      extrapolation equation of kalman filter
C      linearization of nonlinear vector equation
C      x(k+1) = phi*x(k) + gamma*d(k)
C-----
      dimension x(1),y(5),f(15),g(4),z(10)
      dimension p1(5,5),p2(5,5),p3(5,5),p4(5,5),p5(5,5)
      dimension phi1(5,5),phi2(5,5),phi3(5,5)
      dimension u(5,5),u2(5,5)
      dimension p33(5,5)
C
      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
      common /st2/ h,h2,h3,h4
C
      np=3 ! c11,c12,c13 に関する配列
      np2=1 ! r に関する配列
C
C      方程式の拡張部分を配列に割り当てる
      z(1) = x(3) ! 状態変量 c11
      z(2) = x(4) ! 状態変量 c12
      z(3) = x(5) ! 状態変量 c13
      z(4) = rain ! 状態変量 r
C
      cc1=0.0
      cc2=0.0
      cc3=0.0
C
      y1=x(1)

```

6. 予測雨量の誤差を考慮した洪水予測モデルの開発

```

      y2=x(2)
c
c.. 計算上の変数への割り当て
      if(y1.gt.0.0) then
        cc1=y1**(wp1*wp2-1.0) ! x1^(p1/p2-1)
        cc2=y1**(wp1*wp2-2.0) ! x1^(p1/p2-2)
        cc3=y1**(wp2-1.0)      ! x1^(1/p2-1)
      end if
      e1 = wk1*wk2*wp1*wp2 ! (k1/k2)*(p1/p2)
      e2 = wp1*wp2         ! p1/p2
c
c.. a21～a26 の計算
      a21 = -e1*(e2-1.0)*cc2*y2 - z(3)*wk2*wp2*cc3
      a22 = -e1*cc1
      a23 = (-wk2*e2*cc1*y2) * area**0.24
      a24 = wk2**2 * ( wk1*e2*cc1*y2 + z(3)*y1**wp2 - (rain+q_00) )
      +      * zk2/z(2)
      a25 = -wk2*y1**wp2
      a26 = wk2
c.. d2 の計算
      d2 = e1*cc1*y2*(e2-1.0) + z(3)*wk2*y1**wp2*(wp2-1.0)
      +      + (rain+2.0*q_00)*wk2
c
c.. 計算上の変数への割り当て
      a1 = a21 + a22**2.0
      a2 = 2.0*a21*a22 + a22**3.0
      bt1 = h/2.0 + a22*h2/6.0 + a1*h3/24.0
      bt2 = 1.0 + a22*h/2.0 + a1*h2/6.0 + a2*h3/24.0
c
c.. Φ、Γ の要素の計算
      f(1) = 1.0 + a21*h*bt1 ! Φ11
      f(2) = h*bt2           ! Φ12
      f(3) = a21*f(2)        ! Φ21
      f(4) = 1.0 + a22*h + a1*h2/2.0 + a2*h3/6.0 ! Φ22
      +      + (a21*a1+a22*a2)*h4/24.0
c
      f(5) = a23*h*bt1 ! Φ13
      f(6) = a24*h*bt1 ! Φ14
      f(7) = a25*h*bt1 ! Φ15
      f(8) = a23*h*bt2 ! Φ23
      f(9) = a24*h*bt2 ! Φ24
      f(10) = a25*h*bt2 ! Φ25
c
      f(11) = a26*h*bt1 ! Φ16
      f(12) = a26*h*bt2 ! Φ26
c
      g(1) = h*bt1 ! γ12
      g(2) = f(2)  ! γ22
c
c Φ1、Φ2、Φ3 の配列への割り当て ( i:行、j:列 )
c ..... phil(i,j) and phi2(i,j) matrices .....
      k=0
      do i=1,n
        do j=1,n
          k=k+1
          phil(i,j)=f(k) ! Φ1...(2*2)行列
        end do
      end do
c
      k=4
      do i=1,n
        do j=1,np

```

```

        k=k+1
        phi2(i,j)=f(k)      !  $\Phi 2 \dots (2 \times 3)$  行列
    end do
end do

c
k=10
do i=1,n
    do j=1,np2
        k=k+1
        phi3(i,j)=f(k)      !  $\Phi 3 \dots (2 \times 1)$  行列
    end do
end do

c
c 状態変量の伝達方程式 (状態変量 x1,x2 の更新)
c ..... extrapolation of state variables .....
do i=1,n
    y(i)=0.0
    do j=1,n
        y(i)=y(i)+phi1(i,j)*x(j)  !  $\phi 1$  の項
    end do
    do j=1,np
        y(i)=y(i)+phi2(i,j)*z(j)  !  $\phi 2$  の項
    end do
    do j=1,np2
        y(i)=y(i)+phi3(i,j)*z(4)  !  $\phi 3$  の項
    end do
    y(i)=y(i)+g(i)*d2             !  $\gamma$  の項
end do

c
do i=1,n
    x(i)=y(i)                    ! 状態変量の更新
end do

c
c エラー処理
c if(x(1).lt.0.0) x(1)=0.0

c 誤差分散・共分散行列の伝達方程式
c ..... extrapolation equation .....
c
c p1(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
c 行列演算:  $\Phi 1^* P 1^* \Phi 1^T(p3)$  の計算
c call mul3l(2,2,2,2,phi1,p1,phi1,p3)
c
c 行列演算:  $\Phi 1^* P 2^* \Phi 2^T(p4)$  の計算
c call mul3l(2,2,2,3,phi1,p2,phi2,p4)
c
c 行列演算:  $\Phi 1^* P 1^* \Phi 1^T(p3) + \Phi 1^* P 2^* \Phi 2^T(p4)$ 
c do i=1,n
c   do j=i,n
c       p3(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)
c   end do
c end do

c
c 行列演算:  $\Phi 2^* P 2^* \Phi 2^T(p4)$  を加える
c do i=1,n
c   do j=i,n
c       p3(i,j)=p3(i,j)+p4(j,i)
c   end do
c end do

c
c 行列演算:  $\Phi 1^* P 3^* \Phi 3^T(p4)$  の計算

```

```

      call mul31(2,2,2,1,phi1,p33,phi3,p4)
c
c   行列演算： $\Phi 1 * P 3 * \Phi 3^T(p4)$  を加える
      do i=1,n
        do j=i,n
          p3(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)
        end do
      end do
c
c   行列演算： $\Phi 3 * P 3^T * \Phi 1^T(p4T)$  を加える
      do i=1,n
        do j=i,n
          p3(i,j)=p3(i,j)+p4(j,i)
        end do
      end do
c
c   行列演算： $\Phi 2 * U * \Phi 2^T(p4)$  の計算
      call mul31(2,2,3,3,phi2,u,phi2,p4)
c
c   行列演算： $\Phi 3 * U 2 * \Phi 3^T(p5)$  の計算
      call mul31(2,2,1,1,phi3,u2,phi3,p5)
c
c   行列演算： $P 1$ (更新値)(2*2)行列の計算
      do i=1,n
        do j=i,n
          p1(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)+p5(i,j)
          if(i.ne.j) p1(j,i)=p1(i,j)
        end do
      end do
c
c   p2(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
c   行列演算： $\Phi 1 * P 2$  の計算 (2*3)行列
      call mul21(2,3,2,phi1,p2,p3)
c
c   行列演算： $\Phi 2 * U$  の計算 (2*3)行列
      call mul21(2,3,3,phi2,u,p4)
c
      do i=1,n
        do j=1,np
          p2(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)    ! P2(更新値)(2*3)行列の計算
        end do
      end do
c
c   p3(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
c   行列演算： $\Phi 1 * P 3$  の計算 (2*1)行列
      call mul21(2,1,2,phi1,p33,p3)
c
c   行列演算： $\Phi 3 * U 2$  の計算 (2*1)行列
      call mul21(2,1,1,phi3,u2,p4)
c
      do i=1,n
        do j=1,np2
          p33(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)    ! P3(更新値)(2*1)行列の計算
        end do
      end do
c
      return
      end
c
c

```

```

subroutine no2upd(x,p1,p2,u,z)
c -----
c           update equation of kalman filter
c -----
c dimension x(1),p1(5,5),p2(5,5),u(5,5)
c dimension xm1(5),xm2(5),xkal(10)
c dimension p3(5,5),zm1(5,5),zm2(5)
c
c common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
c common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4,akei,bkei
c
c np=3  ! c11,c12,c13 に関する配列
c
c err=z-x(1)**wp2
c
c ck=x(1)**wp2
c
c 観測誤差分散
c rq=(ck*alph4)**2
c
c hh1 = wp2 * x(1)**(wp2-1.0)  ! h1 の計算
c s = p1(1,1) * hh1**2 + rq    ! H P HT+R (カルマンゲインの右辺第2項)
c
c カルマンゲインK1,K2 の計算 (状態変数 x1,x2 に対するもの)
c do i=1,n
c   xm1(i) = p1(i,1) * hh1
c   xkal(i) = xm1(i) / s
c end do
c
c カルマンゲイン K3~K5 の計算 (c11,c12,c13 に対するもの)
c do i=1,np
c   xm2(i) = p2(1,i) * hh1
c   xkal(i+2) = xm2(i) / s
c end do
c
c 状態変数 x1,x2,c11,c12,c13 の更新
c do i=1,n+np
c   x(i) = x(i) + xkal(i) * err
c end do
c
c マトリックスM1 の計算
c zm1(1,1) = 1.0 - hh1 * xkal(1)
c zm1(1,2) = 0.0
c zm1(2,1) = -hh1 * xkal(2)
c zm1(2,2) = 1.0
c
c マトリックスM2 の計算
c zm2(1) = -hh1 * xkal(3)
c zm2(2) = -hh1 * xkal(4)
c zm2(3) = -hh1 * xkal(5)
c
c X1 に関する (2*2) の誤差分散・共分散 P1 の更新
c call mul21(2,2,2,zm1,p1,p3)
c do i=1,n
c   do j=i,n
c     p1(i,j) = p3(i,j)
c     if( i. ne. j ) p1(j,i) = p1(i,j)
c   end do
c end do
c
c パラメータの誤差分散・共分散 U の更新
c do i=1,np

```

```

      do j=i,np
        u(i,j) = zm2(i) * p2(1,j) + u(i,j)
        if( i. ne. j ) u(j,i) = u(i,j)
      end do
    end do

c
c  X2 に関する (2*3) の誤差分散・共分散 P2 の更新
c  call mul21(2,3,2,zm1,p2,p3)
      do i=1,n
        do j=1,np
          p2(i,j) = p3(i,j)
        end do
      end do

c
      return
      end

c
c
      subroutine mul31(np,n2,n3,n4,a,b,c,d)
c  -----
c      multiplication of matrices a, b, and ct
c  -----
      dimension a(5,5),b(5,5),c(5,5),d(5,5)
c
      do 10 i=1,np
        do 10 j=1,n2
          d(i,j)=0.0
          do 12 k=1,n3
            do 12 l=1,n4
12      d(i,j)=d(i,j)+a(i,k)*b(k,l)*c(j,l)
10      continue
          return
        end do
      end do

c
c
      subroutine mul21(np,n2,n3,a,b,c)
c  -----
c      multiplication of matrices a and b
c  -----
      dimension a(5,5),b(5,5),c(5,5)
      do 10 i=1,np
        do 10 j=1,n2
          c(i,j)=0.0
          do 12 k=1,n3
12      c(i,j)=c(i,j)+a(i,k)*b(k,j)
10      continue
          return
        end do
      end do

c
c
      subroutine input(x,p1,p2,p33,q,u,u2,qinit)
c  -----
c      input data for implementing kalman filter
c      初期値の設定
c  -----
      dimension x(1),p1(5,5),p2(5,5)
      dimension p33(5,5)
      dimension q(5,5),u(5,5)
      dimension u2(5,5)

c
      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
      common /st2/ h,h2,h3,h4

```



```

common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4,akei,bkei
c
alph1 = 0.10    ! システム誤差として x1 と x2 に乗ずる定数
alph2 = 0.10    ! 初期値の誤差分散に乗ずる定数
alph3 = 0.20    ! モデルパラメータの誤差分散に乗ずる定数
alph4 = 0.10    ! 観測誤差として ck に乗ずる定数
akei  = 1.37    ! 予測雨量の誤差分散  $a^{**2}*L*r^{**2}b$  の a の値
bkei  = 0.64    ! 予測雨量の誤差分散  $a^{**2}*L*r^{**2}b$  の b の値
c
np=3           ! c11,c12,c13 に関する配列
np2=1          ! r に関する配列
c
do i=1,n
  x(i)=0.0
end do
c
x(1)=qinit**zp2 ! 状態変量 x1 の初期値
x(2)=0.0        ! 状態変量 x2 の初期値
x(3)=wc1        ! 状態変量 x3 の初期値
x(4)=wc2        ! 状態変量 x4 の初期値
x(5)=wc3        ! 状態変量 x5 の初期値
c
do i=1,n
  do j=1,n
    p1(i,j) = 0.0 ! X1 に関する (2*2) の分散・共分散
  end do
end do
p1(1,1) = (alph2*x(1))**2.0 ! X1(x1) に関する (2*2) の分散
p1(2,2) = (alph2*x(1))**2.0 ! X1(x2)          "
c
do i=1,n
  do j=1,np
    p2(i,j) = 0.0 ! X2 に関する (2*3) の分散・共分散
  end do
end do
c
do i=1,n
  do j=1,np2
    p33(i,j) = 0.0 ! X3 に関する (2*1) の分散・共分散
  end do
end do
c
do i=1,n
  do j=1,n
    q(i,j) = 0.0 ! システム誤差 分散・共分散
  end do
end do
c
do i=1,np
  do j=1,np
    u(i,j) = 0.0 ! U1 パラメータ誤差 分散・共分散
  end do
end do
c
u(1,1)=(wc1*alph3)**2
u(2,2)=(wc2*alph3)**2
u(3,3)=(wc3*alph3)**2
c
do i=1,np2
  do j=1,np2
    u2(i,j) = 0.0 ! U2 のパラメータ誤差 分散・共分散
  end do
end do

```

```

        end do
    end do
c
    return
end
c
c
    subroutine hqcurv(itype,ist,ied,h,q)
    dimension h(1),q(1)
    common/hqcv/ ax(5),bx(5),hx(5),qx(5)
    go to (1,2),itype
c
1  do 10 j=ist,ied
    if(h(j).ge.0.0) then
        k=1
        if(h(j).ge.hx(2)) k=2
        if(h(j).ge.hx(3)) k=3
        if(h(j).ge.hx(4)) k=4
        if(h(j).ge.hx(5)) k=5
        q(j)=ax(k)*(h(j)+bx(k))**2.0
    else
        q(j)=-999
    endif
10 continue
    return
c
2  do 20 j=ist,ied
    if(q(j).ge.0.0) then
        k=1
        if(q(j).ge.qx(2)) k=2
        if(q(j).ge.qx(3)) k=3
        if(q(j).ge.qx(4)) k=4
        if(q(j).ge.qx(5)) k=5
        h(j)=(q(j)/ax(k))**0.5-bx(k)
    else
        h(j)=-999
    endif
20 continue
    return
end
c
c
    subroutine hqcheck(hdata,no_hq)
    common/hqcv/ ax(5),bx(5),hx(5),qx(5)
c
        no_hq=1
        if(hdata.ge.hx(2)) no_hq=2
        if(hdata.ge.hx(3)) no_hq=3
        if(hdata.ge.hx(4)) no_hq=4
        if(hdata.ge.hx(5)) no_hq=5
c
    return
end

```

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

7.1 水位～流量曲線の変動特性

一般に、流量 Q は観測水位から水位～流量曲線($H \sim Q$ 曲線)を媒介にして推定される。このため、流量を高い精度で推定するには、水位～流量曲線作成にあたって、低水・高水の広範囲にわたり流量観測がなされていることが必要条件となる。

現在、 $H \sim Q$ 曲線は $\sqrt{Q}$ と H の関係が線形近似できるものとして、次式の回帰式を仮定している。

$$\sqrt{Q} = a_0 + a_1 H \quad (7.1)$$

$$Q = a_1^2 \left(H + \frac{a_0}{a_1} \right)^2 \quad (7.2)$$

ここで、 a_0 と a_1 は回帰係数であり、その推定値は以下の手順で求められる。

式(7.1)の左辺と右辺の残差 2 乗和は次式で定義される。

$$\varepsilon = \sum (\sqrt{Q_i} - a_0 - a_1 H_i)^2 \quad (7.3)$$

ここで、 Q_i, H_i : それぞれ、流量と水位の標本値

最小 2 乗法の原理により、 ε を最小するように a_0 と a_1 の推定値を求めるとよい。すなわち、

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_0} = -2 \left(\sum \sqrt{Q_i} - a_0 n - a_1 \sum H_i \right) = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = -2 \left(\sum H_i \sqrt{Q_i} - a_0 \sum H_i - a_1 \sum H_i^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

ここで、 n : 標本数

式(7.4)は次式の正規方程式に整理される。

$$\begin{bmatrix} n & \sum H_i \\ \sum H_i & \sum H_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \sqrt{Q_i} \\ \sum H_i \sqrt{Q_i} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

式(7.5)を a_0 と a_1 に関して解けばよい。その結果を次式に示す。

$$a_0 = \frac{\sum \sqrt{Q_i} \sum H_i^2 - \sum H_i \sqrt{Q_i} \sum H_i}{n \sum H_i^2 - (\sum H_i)^2} \quad (7.6)$$

$$a_1 = \frac{n \sum H_i \sqrt{Q_i} - \sum H_i \sum \sqrt{Q_i}}{n \sum H_i^2 - (\sum H_i)^2} \quad (7.7)$$

回帰係数 a_0 と a_1 の推定値は、 $\sqrt{Q}$ と H の関係式の近似度合や標本数 n に依存して変動する。統計学によれば、特定値 a_0 と a_1 の分散・共分散は式(7.5)より次式で計算されることがわかっている。

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(a_0) & \text{Cov}(a_0, a_1) \\ \text{Cov}(a_1, a_0) & \text{Var}(a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum H_i \\ \sum H_i & \sum H_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \sigma^2 \quad (7.8)$$

ここで、 $\text{Var}(x)$: x の分散、 $\text{Cov}(x, y)$: x と y の共分散、 A^{-1} : 行列 A の逆行列、 σ^2 : 不偏分散推定値

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (\sqrt{Q_i} - a_0 - a_1 H_i)^2 \quad (7.9)$$

式(7.8)の逆行列を展開すれば、次式が得られる。

$$\text{Var}(a_0) = \frac{\sum H_i^2}{n \sum H_i^2 - (\sum H_i)^2} \sigma^2 \quad (7.10)$$

$$\text{Var}(a_1) = \frac{n}{n \sum H_i^2 - (\sum H_i)^2} \sigma^2 \quad (7.11)$$

$$\text{Cov}(a_0, a_1) = -\frac{\sum H_i}{n \sum H_i^2 - (\sum H_i)^2} \sigma^2 \quad (7.12)$$

水位～流量曲線作成に用いた水位の平均値を $\bar{H} = \sum H_i / n$ と定義すると、式(7.10)～式(7.12)は次式のようにも整理される。

$$\text{Var}(a_0) = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{\bar{H}^2}{\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2} \right\} \sigma^2 \quad (7.13)$$

$$\text{Var}(a_1) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2} \sigma^2 \quad (7.14)$$

$$Cov(a_0, a_1) = -\frac{\bar{H}}{\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2} \sigma^2 \quad (7.15)$$

次に、式(7.1)から推定される流量 Q の精度がどのくらいになるかを把握しておく必要がある。統計学によれば、式(7.1)に示される $\sqrt{Q}$ の分散は次式で近似できることが知られている。

$$\begin{aligned} Var(\sqrt{Q}) &= \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial a_0} \right)^2 Var(a_0) + \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial a_1} \right)^2 Var(a_1) \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial a_0} \right) \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial a_1} \right) Cov(a_0, a_1) \\ &= Var(a_0) + H^2 Var(a_1) + 2H Cov(a_0, a_1) \end{aligned} \quad (7.16)$$

式(7.16)に式(7.13)～式(7.15)を代入して整理すると、次式が得られる。

$$Var(\sqrt{Q}) = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(H - \bar{H})^2}{\sum (H_i - \bar{H})^2} \right\} \sigma^2 \quad (7.17)$$

ここで、 $Q = (\sqrt{Q})^2$ であることから、流量 Q の分散は次式で計算されることがわかる。

$$Var(Q) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \sqrt{Q}} \right)^2 Var(\sqrt{Q}) = (2\sqrt{Q})^2 Var(\sqrt{Q}) = 4Q Var(\sqrt{Q}) \quad (7.18)$$

ある特定の水位、例えば最高水位 H_p が与えられたときのピーク流量推定値 Q_p とその推定誤差分散、 $Var(Q_p)$ は式(7.2)と式(7.18)から、以下のように計算されることがわかる。

$$Q_p = (a_0 + a_1 H_p)^2 = a_1^2 \left(H_p + \frac{a_0}{a_1} \right)^2 \quad (7.19)$$

$$Var(Q_p) = 4(a_0 + a_1 H_p)^2 \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(H_p - \bar{H})^2}{\sum (H_i - \bar{H})^2} \right\} \sigma^2 \quad (7.20)$$

(7.20)式は非常に重要な性質をもっている。すなわち、

(a) $H \sim Q$ 曲線を決定する際の標本数 n が少なければ、流量推定値の精度が低くなる。

- (b) 最高水位 H_p が平均水位 $\bar{H}$ に比して大きくなるにつれて、分散が大きくなり、推定精度も低下してくる。最高水位に対応するピーク流量の推定誤差は相当大きくなることから、式(7.20)からも予想できる。なお、式(7.20)中の $\bar{H}$ は流量観測時における水位観測値の平均値であることに注意する必要がある。
- (c) 以上の議論からも明らかなように、高水時の流量観測をできるだけ多く実施することによって、水位～流量曲線から補間される流量推定値の精度が向上することになる。

7.2 システム方程式の定式化

既に第3章で述べた損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)を流出モデルとして採用する。それを再記すれば次式で示される。

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r - q - b + q_0 \\ s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ b = k_{13}q \\ q_0 = q_B \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad (7.21)$$

ここで、 s ：貯留高(mm)、 r ：観測雨量(mm/h)、 q ：計算流出高(mm/h)、 b ：損失高(mm/h)、 q_0 ：基底流出高(mm/h)、 q_B ：初期流出高(mm/h)、 k_{11}, k_{12} ：貯留係数、 k_{13} ：損失係数、 p_1, p_2 ：貯留指数、 λ ：減衰係数

また k_{11} と k_{12} および k_{13} は、次式で表現される。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648} \\ c_{13} = k_{13} + 1 \end{cases} \quad (7.22)$$

ここで、 A ：流域面積(km²)、 $\bar{r}$ ：平均雨量強度(mm/h)、 c_{11}, c_{12}, c_{13} ：未知定数

式(7.21)を解くために、次の変数を「状態変量」に選定する。

$$\begin{cases} x_1 = q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (7.23)$$

ここで、モデル定数 c_{11}, c_{12}, c_{13} と回帰係数である b_0, b_1 を状態変量に含めて「システム方程式」を拡大する。モデル定数を状態変量に加えた場合式(4.7)と同様に、回帰係数は時間的に変動はないものとして、以下のように考える。

$$\begin{cases} \frac{db_0}{dt} = f_6 = 0 \\ \frac{db_1}{dt} = f_7 = 0 \end{cases} \quad (7.24)$$

式(7.24)を離散化表示すると、

$$\begin{cases} (b_0)_{k+1} = (b_0)_k \\ (b_1)_{k+1} = (b_1)_k \end{cases} \quad (7.25)$$

ここで、 k は任意の離散時刻である。

式(7.25)は状態変量（回帰係数 b_0 、 b_1 ）の伝達方程式で、新しい観測値が入手されれば更新される。状態変量をベクトル表示すると以下のように示される。

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

ここで、

$$X_1 = [x_1 \quad x_2]^T, \quad X_2 = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}]^T, \quad X_3 = [b_0 \quad b_1]^T \quad (7.27)$$

7.3 状態変量の伝達方程式

洪水予測では、状態変量の伝達方程式は l 時間先の流量、水位を予測することに対応しているので、表4.2に示す式(6)「状態変量の伝達方程式」について定式化を行う。

まず式(7.23)を微分すると、

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}, b_0, b_1) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}, b_0, b_1) \\ \quad = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \end{cases} \quad (7.28)$$

このとき、モデル定数は時間的に変動しないものとして、次のように考える。

$$\begin{cases} \frac{dc_{11}}{dt} = f_3 = 0 \\ \frac{dc_{12}}{dt} = f_4 = 0 \\ \frac{dc_{13}}{dt} = f_5 = 0 \end{cases} \quad (7.29)$$

この方策はカルマン・フィルタ理論適用にあたって、しばしば用いられる。よって、状態変量に関する微分方程式は式(7.28)と式(7.29)及び式(7.24)をまとめて、次式で表現できる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

上式を行列表示すると、

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (7.31)$$

ここで、

$$F(X) = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7]^T \quad (7.32)$$

線形近似式は次式になる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (7.33)$$

ここで、

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0_1 & 0_2 & 0_3 \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{26} & a_{27} \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

$$0_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

式(7.35)の行列 A_1 と A_2 の要素は次式で計算される。

$$\begin{cases} a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-2} (x_2^*) - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2-1} \\ a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} \\ a_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial c_{11}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = \left\{ -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) \right\} A^{0.24} \\ a_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial c_{12}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} \\ = \frac{1}{k_{12}^2} \left\{ k_{11} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) + c_{13} (x_1^*)^{1/p_2} - (r + q_0) \right\} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ a_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{13}} \frac{\partial k_{13}}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}} (x_1^*)^{1/p_2} \end{cases} \quad (7.37)$$

行列 A_3 の要素 a_{26} 、 a_{27} は次式で計算される。

$$\begin{cases} a_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial b_0} = 0 \\ a_{27} = \frac{\partial f_2}{\partial b_1} = 0 \end{cases} \quad (7.38)$$

また、式(7.33)のベクトル $D(X^*)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} D(X^*) &= F(X^*) - A(X^*)X^* \\ &= \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_2 &= f_2(x_1^*, x_2^*, c_{11}, c_{12}, c_{13}, b_0, b_1) \\
 &\quad - a_{21}x_1^* - a_{22}x_2^* - a_{23}c_{11} - a_{24}c_{12} - a_{25}c_{13} - a_{26}b_0 - a_{27}b_1 \\
 &= \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-1} x_2^* + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{1/p_2} + \frac{2}{k_{12}} (r + q_0)
 \end{aligned} \tag{7.40}$$

式(7.33)は線形常微分方程式であり、 $A(X^*)$ と $D(X^*)$ が定係数行列の場合、次の差分方程式に変換できる。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \tag{7.41}$$

式(7.41)を行列表示すると、次式が得られる。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \tag{7.42}$$

ここで、

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k \tag{7.43}$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.44}$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.45}$$

次に、計算上必要な Φ_1 と Φ_2 および Γ_1 の要素を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + a_{21}T\beta_1 \\ \phi_{12} = T\beta_2 \\ \phi_{21} = a_{21}\phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_{22}T + \frac{1}{2}a_1T^2 + \frac{1}{6}a_2T^3 + \frac{1}{24}(a_{21}a_1 + a_{22}a_2)T^4 \end{cases} \quad (7.46)$$

$$\begin{cases} \phi_{13} = a_{23}T\beta_1 \\ \phi_{14} = a_{24}T\beta_1 \\ \phi_{15} = a_{25}T\beta_1 \\ \phi_{23} = a_{23}T\beta_2 \\ \phi_{24} = a_{24}T\beta_2 \\ \phi_{25} = a_{25}T\beta_2 \end{cases} \quad (7.47)$$

$$\begin{cases} \gamma_{12} = T\beta_1 \\ \gamma_{22} = \phi_{12} \end{cases} \quad (7.48)$$

ここで、

$$\begin{cases} a_1 = a_{21} + a_{22}^2 \\ a_2 = 2a_{21}a_{22} + a_{22}^3 \end{cases} \quad (7.49)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_{22}T^2 + \frac{1}{24}a_1T^3 \\ \beta_2 = 1 + \frac{1}{2}a_{22}T + \frac{1}{6}a_1T^2 + \frac{1}{24}a_2T^3 \end{cases} \quad (7.50)$$

また、式(7.41)を行列要素で表すと次式になる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ \hline b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ \hline b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (7.51)$$

式(7.51)の行列を展開すると、**表4.2**に示す**式(6)「状態変量の伝達方程式」**に対応する式(7.41)は次のように記述できる。

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = \phi_{11}x_{1,k} + \phi_{12}x_{2,k} + \phi_{13}c_{11,k} + \phi_{14}c_{12,k} + \phi_{15}c_{13,k} + \gamma_{12}d_{2,k} \\ x_{2,k+1} = \phi_{21}x_{1,k} + \phi_{22}x_{2,k} + \phi_{23}c_{11,k} + \phi_{24}c_{12,k} + \phi_{25}c_{13,k} + \gamma_{22}d_{2,k} \end{cases} \quad (7.52)$$

$$\begin{cases} c_{11,k+1} = c_{11,k} \\ c_{12,k+1} = c_{12,k} \\ c_{13,k+1} = c_{13,k} \end{cases} \quad (7.53)$$

$$\begin{cases} b_{0,k+1} = b_{0,k} \\ b_{1,k+1} = b_{1,k} \end{cases} \quad (7.54)$$

すなわち式(7.52)は、基本式である式(7.30)の漸化式であり、モデルパラメータ c_{11}, c_{12}, c_{13} を状態変量に加えたときの状態変量 $x_1 (= q^{p_2})$ 、 $x_2 (= dq^{p_2}/dt)$ の伝達方程式となる。式(7.40)により右辺の d_2 に予測雨量を入れることで、状態変量 $x_{1,k+1}$ と $x_{2,k+1}$ の予測値を求めることが出来る。また、モデルパラメータは式(7.53)と式(7.54)により観測値間では時間変化していないことがわかる。

7.4 状態変量の推定誤差共分散伝達方程式の定式化

洪水予測では、状態変量の推定誤差共分散伝達方程式は l 時間先の流量及び水位予測値の精度（分散）に対応しているので、表4.2に示される式(7)「推定誤差共分散伝達方程式」について定式化を行う。

そこで、まず次式を定義する。

$$\tilde{X}_k = X_k - \hat{X}_k \quad (7.55)$$

$\tilde{X}_k$ は、状態変量の真値 X_k と最良推定値 $\hat{X}_k$ の差、すなわち誤差(～は以後誤差を表わすものとする)になっているので、状態変量推定誤差と呼ぶ。

また、 $\tilde{X}_k$ は式(7.41)の $\Gamma_k D_k$ を確定変量とすると、次式で表される。

$$\tilde{X}_{k+1} = \Phi_k \tilde{X}_k \quad (7.56)$$

この $\tilde{X}_k$ の分散・共分散(P_k)を計算すると、 P_k は式(7.57)で表される。

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E(\tilde{X}_{k+1} \tilde{X}_{k+1}^T) \\ &= \Phi_k P_k \Phi_k^T \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} & P_{3,k} \\ P_{2,k}^T & U_{1,k} & 0 \\ P_{3,k}^T & 0 & U_{3,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^T & 0 & 0 \\ \Phi_2^T & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.57)$$

ここで、 $P_{1,k}$: X_1 に関する(2×2)の分散・共分散行列、 $P_{2,k}$: X_1 と X_2 に関する(2×3)の共分散行列、 $P_{3,k}$: X_1 と X_3 に関する(2×2)の共分散行列、 $U_{1,k}$: X_2 に関する(3×3)の分散・共分散行列、 $U_{3,k}$: X_3 に関する(2×2)の分散・共分散行列

式(7.57)のベクトル $\Phi_k P_k \Phi_k^T$ を展開すると下式になる。

$$P_{1,k+1}(-) = \Phi_1 P_{1,k}(+) \Phi_1^T + \Phi_2 P_{2,k}^T(+) \Phi_1^T + \Phi_1 P_{2,k}(+) \Phi_2^T + \Phi_2 U_{1,k}(+) \Phi_2^T \quad (7.58)$$

$$P_{2,k+1}(-) = \Phi_1 P_{2,k}(+) + \Phi_2 U_{1,k}(+) \quad (7.59)$$

$$P_{3,k+1}(-) = \Phi_1 P_{3,k}(+) \quad (7.60)$$

$$U_{1,k+1}(-) = U_{1,k}(+) \quad (7.61)$$

$$U_{3,k+1}(-) = U_{3,k}(+) \quad (7.62)$$

システム方程式において b_0 と b_1 が0となることから、式(7.58)に $U_{3,k}$ が含まれていない。

式(7.62)のモデル定数の誤差分散・共分散 $U_{3,k}$ は、パラメータに関する推定誤差分散は新しい観測値が入手されるまでは変化しないことを意味している。その理由は、 $U_{3,k}$ は状態変量ベクトル $X_3 = [b_0 \ b_1]$ の推定値誤差分散・共分散であることから、式(7.54)に示されるように一定値が伝達されているからである。

式(7.61)のモデル定数の誤差分散・共分散 $U_{1,k}$ の値は、パラメータに関する推定誤差分散は新しい観測値が入手されるまでは変化しないことを意味している。その理由は、 $U_{1,k}$ は状態変量ベクトル $X_2 = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]$ の推定値誤差分散・共分散であり、式(7.53)に示されるように一定値が伝達されているからである。

$U_{1,k}$ の値をあらかじめ設定しておく必要がある。モデル定数、 c_{11}, c_{12}, c_{13} が互いに独立であると仮定すると、 $U_{1,k}$ は以下のように表すことができる。

$$U_{1,k} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{13}^2 \end{bmatrix} \quad (7.63)$$

ここで、 $\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{13}^2$ はそれぞれモデル定数、 c_{11}, c_{12}, c_{13} の分散の初期値である。この $U_{1,k}$ は、式(7.58)と式(7.59)において使用される。

また、式(7.62)の回帰係数の誤差分散・共分散 $U_{3,k}$ の値もあらかじめ以下のように設定しておく。

$$U_{3,k} = \begin{bmatrix} Var(b_0) & Cov(b_0, b_1) \\ Cov(b_0, b_1) & Var(b_1) \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

式(7.64)に示される行列要素は、以下に示す式(7.66)～式(7.68)で求めることができる。

実際の洪水予測にあたっては、適確な洪水予警報を発する意味からも、流量予測よりも水位予測がより重要となる。このとき、何らかの流出モデル(たとえば、貯留関数法)を用いて流量を推定し、式(7.1)に示される $H \sim Q$ 曲線の変換式を用いて水位を予測するのが妥当であろう。すなわち、

$$H = b_0 + b_1 \sqrt{Q} \quad (7.65)$$

ここで、式(7.1)の逆変換により、 $b_0 = -a_0 / a_1$ 、 $b_1 = 1 / a_1$ となる。

新しい回帰係数 b_0 と b_1 の分散及び共分散は次式で与えられる。

$$Var(b_0) = \left(-\frac{1}{a_1} \right)^2 Var(a_0) + \left(\frac{a_0}{a_1^2} \right)^2 Var(a_1) + 2 \left(-\frac{1}{a_1} \right) \left(\frac{a_0}{a_1^2} \right) Cov(a_0, a_1) \quad (7.66)$$

$$Var(b_1) = \left(-\frac{1}{a_1^2} \right)^2 Var(a_1) \quad (7.67)$$

$$Cov(b_0, b_1) = \left(\frac{a_0}{a_1^2} \right) \left(-\frac{1}{a_1^2} \right) Var(a_1) + \left(-\frac{1}{a_1} \right) \left(-\frac{1}{a_1^2} \right) Cov(a_0, a_1) \quad (7.68)$$

カルマン・フィルタによって洪水予測を行う場合、式(7.65)に示される水位を「観測方程式」とすることができる。式(7.23)の逆変換により、流出高は次式で与えられる。

$$q_k = x_{1,k}^{1/p_2} \quad (7.69)$$

ここで、 q_k : 流出高(mm/h)、 $x_{1,k}$: 状態変量、 $p_2 = 0.4648$ (固定値)

したがって、流量は次式で変換される。

$$Q_k = \frac{A}{3.6} q_k = \frac{A}{3.6} x_{1,k}^{1/p_2} \quad (7.70)$$

ここで、 Q_k : 流量(m^3/s)、 A : 流域面積(km^2)

式(7.70)を式(7.65)に代入すれば、状態変量 $x_{1,k}$ を用いたときの水位予測式に変換される。

$$z_k = b_0 + b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6}} (x_{1,k})^{1/2 p_2} = h(x_1, b_0, b_1) \quad (7.71)$$

ここで、 z_k : 離散時刻 k における水位推定値、 $x_{1,k}$: 時刻 k における状態変量 x_1 の値

カルマン・フィルタにおいては、回帰係数の b_0 と b_1 を状態変量に含めることができ、「システム方程式」を拡大することによって、 b_0 と b_1 の推定誤差分散・共分散も算出することが可能である。式(7.71)により計算される水位予測値の分散は、前述した方法に準じて、次式で求められる。

$$\begin{aligned}
 Var(z_k) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2 Var(x_1) + \left(\frac{\partial h}{\partial b_0} \right)^2 Var(b_0) + \left(\frac{\partial h}{\partial b_1} \right)^2 Var(b_1) \\
 &\quad + 2 \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial b_0} \right) Cov(x_1, b_0) + 2 \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial b_1} \right) Cov(x_1, b_1) \\
 &\quad + 2 \left(\frac{\partial h}{\partial b_0} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial b_1} \right) Cov(b_0, b_1) \\
 &= \begin{bmatrix} h_1^* & h_2^* & h_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var(x_1) & Cov(x_1, b_0) & Cov(x_1, b_1) \\ Cov(b_0, x_1) & Var(b_0) & Cov(b_0, b_1) \\ Cov(b_1, x_1) & Cov(b_1, b_0) & Var(b_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^* \\ h_2^* \\ h_3^* \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.72}$$

ここで、

$$\begin{cases} h_1^* = \frac{\partial h}{\partial x_1} = b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6}} \frac{1}{2p_2} (x_{1,k}^*)^{1/2p_2-1} \\ h_2^* = \frac{\partial h}{\partial b_0} = 1 \\ h_3^* = \frac{\partial h}{\partial b_1} = \sqrt{\frac{A}{3.6}} (x_{1,k}^*)^{1/2p_2} \end{cases} \tag{7.73}$$

式(7.72)中の $Var(x_1)$ ($P_{1,k}$ の1行1列目)と $Cov(x_1, b_0)$ ($P_{3,k}$ の1行1列目)及び $Cov(x_1, b_1)$ ($P_{3,k}$ の1行2列目)は、カルマン・フィルタにおける推定誤差分散・共分散の伝達方程式から自動計算される。一方、 $Var(b_0)$ 、 $Var(b_1)$ 及び $Cov(b_0, b_1)$ は式(7.66)～式(7.68)に示される。

以上、流量予測値は式(7.71)により水位予測値に変換され、そのときの水位予測値の精度(分散)は式(7.72)で計算されることになる。しかしながら、回帰係数 b_0 と b_1 を状態変量に含めると、データ処理や計算が複雑になる。そこで、係数 b_0 と b_1 を確定値と仮定して、変動特性を無視すれば、式(7.72)の分散は次のように簡約化される。

$$Var(z_k) \approx \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)^2 Var(x_1) \tag{7.74}$$

7.5 観測方程式の定式化

カルマン・フィルタ理論を適用するために観測方程式の定式化を行う。

式(7.71)は状態変量 x_1 が水位と関連づけられていることから、式(7.71)はカルマン・フィルタ理論を適用する際の「観測方程式」とみなすことができる。このとき、 z_k は離散時刻 k における水位観測値となる。なお、「観測誤差」として、「システム誤差」と同様に「乗算的ノイズ」を考慮すれば、式(7.71)は次のように変形される。

$$z_k = c_k (1 + v_k) \quad (7.75)$$

ここで、

$$c_k = b_0 + b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6}} (x_{1,k})^{1/2 p_2} \quad (7.76)$$

カルマン・フィルタは、元来線形方程式に関して理論展開がなされている。したがって、式(7.71)の非線形観測方程式を線形近似した後に、カルマン・ゲインを算定する。 x_1 、 b_0 及び b_1 を状態変量とすると、式(7.71)の線形化方程式は以下ようになる。

$$z_k = h_1^* x_{1,k} + h_2^* b_0 + h_3^* b_1 + h_{4,k}^* \quad (7.77)$$

ここで、 h_1^* 、 h_2^* 、 h_3^* ：式(7.73)で計算される既知量

$$\begin{aligned} h_{4,k}^* &= h(x_1^*, b_0, b_1) - h_1^* x_{1,k}^* - h_2^* b_0 - h_3^* b_1 \\ &= -\frac{b_1}{2 p_2} \sqrt{\frac{A}{3.6}} (x_{1,k}^*)^{1/2 p_2} \end{aligned} \quad (7.78)$$

7.6 状態変量の更新方程式

式(7.73)と式(7.78)中の $x_{1,k}^*$ の値として、 $x_{1,k}^* = \hat{x}_{1,k}(-)$ を用いる。

状態変量ベクトルを再記すれば、次式で定義される。

$$X_1^T = [x_1 \quad x_2], \quad X_2^T = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}], \quad X_3^T = [b_0 \quad b_1] \quad (7.79)$$

式(7.79)に示される状態変量ベクトルを用いて、式(7.77)の観測方程式を書き換えると、次式が得られる。

$$z_k = H_k X_k + h_{4,k}^* \quad (7.80)$$

ここで、

$$\begin{cases} H_k = [H_1 \mid H_2 \mid H_3] \\ H_1 = \begin{bmatrix} h_1^* & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} h_2^* & h_3^* \end{bmatrix} \\ X_k^T = \begin{bmatrix} X_1^T \mid X_3^T \mid X_3^T \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7.81)$$

以上の準備のもとに、観測値 z_k が入手された後の状態変量は次式で更新される。

$$\hat{X}_k(+) = \hat{X}_k(-) + K_k \left[z_k - b_0 - b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6}} \{ \hat{x}_{1,k}(-) \}^{1/2 p_2} \right] \quad (7.82)$$

7.7 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化

カルマン・フィルターの実行にあたって必要となる観測誤差の分散は次式で与えるものとする。

$$R_k = E\left\{ \{c_k v_k\}^2 \right\} = c_k^2 E(v_k^2) = c_k^2 \alpha_2^2 \quad (7.83)$$

$$\alpha_2^2 = E(v_k^2) \quad (\alpha_2 = 0.001 \sim 0.01) \quad (7.84)$$

α_2 の値は水位 z_k のオーダーに留意して、予測水位の誤差が数十センチメートル内に収まるように設定するとよい。たとえば、 z_k が3桁であれば、 $\alpha_2 = 0.001$ が適当であると考ええる。

すなわち、観測誤差として、 c_k の $100\alpha_2\%$ の大きさが見込まれていることになる。また、 c_k に含まれる $x_{1,k}$ の値には、新しい観測値が入手される直前の最新値 $\hat{x}_{1,k}(-)$ を用いればよい。

7.8 カルマン・ゲインの算定

表4.2に示される式(8)「カルマン・ゲイン」 K_k を再記すると次式のようにになる。

$$K_k = P_k(-) H_k^T \left[H_k P_k(-) H_k^T + R_k \right]^{-1} \quad (7.85)$$

ここで、記号(－)と(＋)はそれぞれ、新しい観測値情報が得られる直前と直後の時刻を表す。式(7.85)中の観測誤差分散 R_k には式(7.83)を用いる。

式(7.85)を計算するにあたって、状態変量の誤差分散・共分散行列 $P_k(-)$ を以下に示す小行列に分割する。

$$P_k(-) = \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) & P_{3,k}(-) \\ P_{2,k}^T(-) & U_{1,k}(-) & 0 \\ P_{3,k}^T(-) & 0 & U_{3,k}(-) \end{bmatrix} \quad (7.86)$$

ここで、 $U_{1,k}(-)$ は (3×3) のモデル定数誤差分散・共分散行列であり、 $U_{3,k}(-)$ は (2×2) の水位～流量曲線の回帰係数誤差分散・共分散である。なお、式(7.86)中のゼロ行列は $E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_3^T) = 0$ の仮定による。

まず、 $P_k(-)H_k^T$ の行列は次のように展開される。

$$P_k(-)H_k^T = P_k(-) \begin{bmatrix} H_1^T \\ 0 \\ H_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k}(-)H_1^T + P_{3,k}(-)H_3^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \\ P_{3,k}^T(-)H_1^T + U_{3,k}(-)H_3^T \end{bmatrix} \quad (7.87)$$

次に、式(7.85)中のスカラー量、 $H_k P_k(-)H_k^T + R_k$ は次式で計算される。

$$\begin{aligned} S &= H_k P_k(-)H_k^T + R_k \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_3 \end{bmatrix} P_k(-)H_k^T + R_k \\ &= H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + H_1 P_{3,k}(-)H_3^T + H_3 P_{3,k}^T(-)H_1^T + H_3 U_{3,k}(-)H_3^T + R_k \end{aligned} \quad (7.88)$$

最後に、カルマン・ゲイン K_k は状態変数ベクトル X_1 と X_2 および X_3 に対応して、以下のように分割される。

$$K_k = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k}(-)H_1^T + P_{3,k}(-)H_3^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \\ P_{3,k}^T(-)H_1^T + U_{3,k}(-)H_3^T \end{bmatrix} S^{-1} \quad (7.89)$$

上式の S^{-1} は、式(7.88)の値の逆数をとればよい。

式(7.89)は重要な意味をもつ。すなわち、

- (a) K_2 は流出モデル定数ベクトル $X_2^T = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]$ に係わるカルマン・ゲインである。同様に、 K_3 は水位～流量曲線の回帰係数ベクトル $X_3^T = [b_0 \ b_1]$ に係わるカルマン・ゲインである。
- (b) したがって、式(7.89)で計算されるカルマン・ゲイン K_k を式(7.82)に用いることにより、流出モデル定数及び回帰係数をオンライン同定することが可能となる。ここで、オンライン同定とは、水位が1時間毎にテレ・メータ情報から得られれば、これらの定数も1時間毎に変化させることができるという意味である。
- (c) 一般には、誰も洪水期間中に水位と流量の関係式が変化していることを予想しているが、どのように変化しているかを把握する手段は現在のところ皆無である。式(7.89)に示されるカルマン・ゲインを用いれば、洪水期間中の水位～流量曲線の関係式を変化させることは、原理的には可能である。
- (d) この原理を実用化するためには、前年度に設定された水位と流量の関係式を基に、上記の方法に従って、洪水期間中に状態変数ベクトル X_3 のオンラインが発散することなく作動するかどうかの検討が必要である。もし、洪水予測システムを実行して、解の発散などの問題が生ずる場合には、状態変数ベクトル X_2 と X_3 のオンライン同定は行わない方が賢明である。

7.9 状態変量の推定誤差共分散更新方程式

状態変量ベクトルが式(7.82)によって更新された後、その推定誤差分散・共分散行列も次式で算定される。

$$P_k(+)=\left[I-K_k H_k\right] P_k(-) \quad (7.90)$$

ここで、 I ：単位行列

式(7.90)がどのように計算されるかの手順を以下に示す。

$$\begin{aligned} K_k H_k &= \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K_1 H_1 & 0 & K_1 H_3 \\ K_2 H_1 & 0 & K_2 H_3 \\ K_3 H_1 & 0 & K_3 H_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.91)$$

$$\begin{aligned} P_k(+)&= \begin{bmatrix} P_{1,k}(+) & P_{2,k}(+) & P_{3,k}(+) \\ P_{2,k}^T(+) & U_{1,k}(+) & 0 \\ P_{3,k}^T(+) & 0 & U_{3,k}(+) \end{bmatrix} = \left[I-K_k H_k\right] P_k(-) \\ &= \begin{bmatrix} I-K_1 H_1 & 0 & -K_1 H_3 \\ -K_2 H_1 & I & -K_2 H_3 \\ -K_3 H_1 & 0 & I-K_3 H_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) & P_{3,k}(-) \\ P_{2,k}^T(-) & U_{1,k}(-) & 0 \\ P_{3,k}^T(-) & 0 & U_{3,k}(-) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.92)$$

したがって、 $P_k(+)$ の小行列は式(7.92)を展開して、次式で計算される。

$$P_{1,k}(+)=\left[I-K_1 H_1\right] P_{1,k}(-)-K_1 H_3 P_{3,k}^T(-) \quad (7.93)$$

$$P_{2,k}(+)=\left[I-K_1 H_1\right] P_{2,k}(-) \quad (7.94)$$

$$P_{3,k}(+)=\left[I-K_1 H_1\right] P_{3,k}(-)-K_1 H_3 U_{3,k}(-) \quad (7.95)$$

$$U_{1,k}(+)=-K_2 H_1 P_{2,k}(-)+U_{1,k}(-) \quad (7.96)$$

$$U_{3,k}(+)=-K_3 H_1 P_{3,k}(-)+\left[I-K_3 H_3\right] U_{3,k}(-) \quad (7.97)$$

7. 水位～流量曲線($H\sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

$U_{1,k}(+)$ と $U_{3,k}(+)$ はそれぞれ、状態変量ベクトル $X_2^T = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]$ と $X_3^T = [b_0 \ b_1]$ をオンライン同定したときの更新値推定誤差分散・共分散行列である。

7.10 水位～流量曲線を用いた洪水予測モデルの適用例

洪水予測対象地点は、単一流域である石狩川水系石狩川納内地点（流域面積 3558.0km²）を対象とし、適用例として、最近の洪水である平成 13 年 9 月 9 日 1:00～15 日 24:00 までの洪水を選定した。

(1) 水位～流量曲線計算書

水位～流量曲線を用いた洪水予測を行う際には、回帰係数 b_0 と b_1 を状態変量に入れてその値をカルマン・フィルターにより更新していくために $H\sim Q$ 式を一本化する必要があるが、現在のところ流量観測資料を整理して数本の式を用いて流量を推定しているのが現実である。また、洪水時の $H\sim Q$ 式はその洪水が終了してから観測資料をもとに算出されるものであり、予測計算を行う際には前年度の $H\sim Q$ 式を使用するのが普通である。

そこで、対象洪水の前年度にあたる平成 12 年(2000 年)の流観資料を整理し $H\sim Q$ 式を一本化したものを表 7.1 と表 7.2 に示す。

表7.1 石狩川納内地点 (3558.0km²) 2000 年 水位-流量($H \sim Q$)曲線計算書

No	H	H^2	$\sqrt{Q}$	$H\sqrt{Q}$	$(\sqrt{Q_i} - a_1 H_1 - a_0)^2$
1	54.31	2949.58	6.16	334.44	0.06527997
2	54.33	2951.75	6.44	349.62	0.01498429
3	54.36	2955.01	6.47	351.79	0.09124551
4	54.38	2957.18	6.52	354.35	0.16117024
5	54.40	2959.36	6.77	368.16	0.08647928
6	54.43	2962.62	7.15	389.32	0.01564888
7	54.44	2963.71	7.07	384.95	0.07765933
8	54.46	2965.89	7.20	392.19	0.08549932
9	54.48	2968.07	7.28	396.70	0.12699061
10	54.50	2970.25	7.29	397.14	0.24494132
11	54.51	2971.34	7.55	411.43	0.09367729
12	54.51	2971.34	7.79	424.58	0.00420162
13	54.52	2972.43	7.61	414.64	0.10283449
14	54.54	2974.61	7.59	413.82	0.23280545
15	54.54	2974.61	7.86	428.82	0.04302278
16	54.58	2978.98	8.07	440.68	0.08068733
17	54.59	2980.07	8.19	447.34	0.05550827
18	54.59	2980.07	7.98	435.70	0.20149713
19	54.60	2981.16	8.12	443.14	0.14907588
20	54.63	2984.44	8.53	465.73	0.03723141
21	54.63	2984.44	8.61	470.23	0.01224480
22	54.65	2986.62	8.73	477.02	0.01784149
23	54.66	2987.72	8.81	481.44	0.01596031
24	54.68	2989.90	8.88	485.48	0.03988345
25	54.68	2989.90	8.89	485.91	0.03679791
26	54.68	2989.90	8.95	489.26	0.01708486
27	54.69	2991.00	8.54	467.05	0.37265262
28	54.69	2991.00	8.98	491.24	0.02827593
29	54.69	2991.00	8.96	490.05	0.03605836
30	54.70	2992.09	9.04	494.27	0.03472440
31	54.72	2994.28	8.68	474.87	0.47375652
32	54.74	2996.47	9.24	505.66	0.07456103
33	54.75	2997.56	9.32	510.15	0.07010960
34	54.76	2998.66	9.38	513.81	0.07374951
35	54.77	2999.75	9.61	526.28	0.01385482
36	54.78	3000.85	9.52	521.53	0.07732686
37	54.80	3003.04	9.71	532.15	0.05373677
38	54.82	3005.23	9.85	540.00	0.05583736
39	54.82	3005.23	9.68	530.91	0.16172966
40	54.89	3012.91	10.50	576.08	0.00914237
41	54.92	3016.21	11.07	607.73	0.06697019
42	54.93	3017.30	11.10	609.55	0.04747818

表 7.1 石狩川納内地点 (3558.0km²) 2000 年 水位-流量($H \sim Q$)曲線計算書(つづき)

No	H	H^2	$\sqrt{Q}$	$H\sqrt{Q}$	$(\sqrt{Q_i} - a_1 H_1 - a_0)^2$
43	54.94	3018.40	10.68	586.86	0.07247727
44	54.98	3022.80	11.37	624.91	0.01615517
45	54.98	3022.80	11.33	623.19	0.00918280
46	55.00	3025.00	11.62	639.23	0.05724913
47	55.02	3027.20	12.01	660.72	0.23191271
48	55.03	3028.30	11.31	622.57	0.08175699
49	55.03	3028.30	12.07	664.20	0.22146312
50	55.08	3033.81	12.33	679.16	0.13773626
51	55.15	3041.52	12.68	699.47	0.04820881
52	55.18	3044.83	13.09	722.42	0.17008506
53	55.19	3045.94	13.13	724.38	0.13955709
54	55.20	3047.04	13.24	730.62	0.17000613
55	55.21	3048.14	13.20	728.73	0.09217283
56	55.24	3051.46	13.27	733.05	0.02513837
57	55.24	3051.46	13.45	742.73	0.11137481
58	55.30	3058.09	13.85	765.78	0.09234228
59	55.35	3063.62	14.41	797.39	0.25226557
60	55.40	3069.16	14.58	807.93	0.10204241
61	55.47	3076.92	14.85	823.89	0.00716756
62	55.55	3085.80	15.54	863.17	0.03770573
63	55.60	3091.36	15.95	886.89	0.06079689
64	55.61	3092.47	15.70	873.02	0.00601949
65	55.63	3094.70	16.32	908.00	0.16111525
66	55.74	3106.95	16.82	937.82	0.01255086
67	55.75	3108.06	16.97	946.26	0.03543381
68	55.82	3115.87	17.31	966.43	0.00058281
69	55.82	3115.87	17.41	971.81	0.01454897
70	56.19	3157.32	20.35	1143.55	0.15788797
71	56.32	3171.94	21.07	1186.50	0.03120644
72	56.34	3174.20	21.26	1197.61	0.04943145
73	56.94	3242.16	26.62	1515.91	1.60531360
74	56.95	3243.30	26.59	1514.56	1.36098096
75	57.04	3253.56	27.30	1557.42	1.50766335
76	57.31	3284.44	29.03	1663.66	1.01666345
77	57.33	3286.73	29.14	1670.64	0.95222043
78	57.66	3324.68	31.78	1832.40	1.53191598
79	57.94	3357.04	33.57	1944.93	1.01931171
80	58.13	3379.10	34.97	2032.80	1.08783681
81	58.69	3444.52	38.87	2281.28	0.82751591
82	58.93	3472.74	39.47	2326.07	0.04711615
83	60.09	3610.81	45.20	2715.80	8.11174660
84	60.18	3621.63	45.53	2740.21	9.97483367
Σ	4653.70	257953.58	1198.91	67379.13	35.4089

表7.2 水位～流量($H \sim Q$)曲線の変動特性

$$\sqrt{Q} = a_0 + a_1 H$$

$$a_0 = \boxed{-384.73}$$

式(7.6)

$$a_1 = \boxed{7.2021}$$

式(7.7)

$$\sigma^2 = \boxed{0.4315}$$

式(7.9)

$$Var(a_0) = \boxed{9.959}$$

式(7.10)

$$Var(a_1) = \boxed{0.003}$$

式(7.11)

$$Cov(a_0, a_1) = \boxed{-0.180}$$

式(7.12)

$$H = b_0 + b_1 \sqrt{Q}$$

$$b_0 = \boxed{53.42}$$

式(7.65)

$$b_1 = \boxed{0.1388}$$

式(7.65)

$$Var(b_0) = \boxed{3.446 \times 10^{-4}}$$

式(7.66)

$$Var(b_1) = \boxed{1.205 \times 10^{-6}}$$

式(7.67)

$$Cov(b_0, b_1) = \boxed{-1.720 \times 10^{-5}}$$

式(7.68)

ピーク流量の計算

$$\text{ピーク水位 } H_p = \boxed{60.09} \quad (\text{2001 年})$$

$$\text{ピーク流量 } Q_p = \boxed{2308.0785}$$

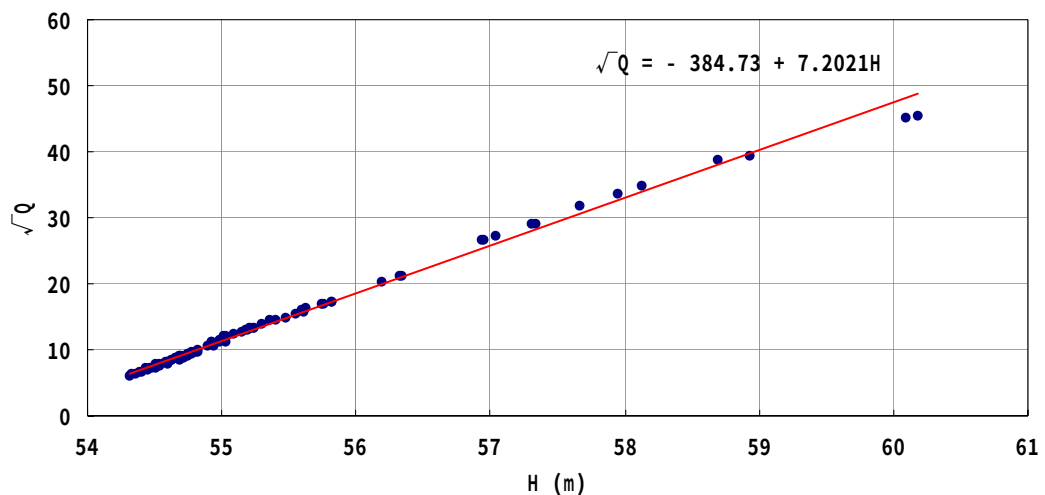
式(7.19)

$$\text{ピーク流量推定誤差分散 } Var(Q_p) = \boxed{706.6608}$$

式(7.18)

$$\sqrt{Var(Q_p)} / Q_p = \boxed{0.0115}$$

ピーク流量の変動係数は、1.15%で非常に小さい。



(2) 初期条件の設定

予測計算を行う際の状態変量及びその推定誤差分散・共分散の伝達方程式（表4.2式(6)及び式(7)）を適用するためには初期値を設定しなくてはならない。そこで、状態変量及びその推定誤差分散・共分散は次のように設定する。

表 7.3 状態変量の初期条件

x_1	x_2	c_{11}	c_{12}	c_{13}	b_0	b_1
$q_B^{p_2}$	0	6.386	0.153	1.743	53.42	0.1388

x_1 に含まれる q_B は初期流出高であり、貯留指数 p_1 と p_2 はそれぞれ0.6と0.4648を与える。 x_2 は dx_1/dt であるので、初期値は0を与える。また c_{11} と c_{12} および c_{13} の値は、既往洪水定数解析の平均値を与えた。 b_0 と b_1 の値及びその分散・共分散は表7.2中に示されている。

表 7.4 状態変量の誤差分散・共分散の初期条件

x_1 の誤差分散	x_2 の誤差分散	σ_{11}^2	σ_{12}^2	σ_{13}^2
$(0.1x_1)^2$	$(0.1x_1)^2$	$(0.2c_{11})^2$	$(0.2c_{12})^2$	$(0.2c_{13})^2$

式(7.86)の $U_{1,k}$ は X_2 の分散・共分散行列であり、その要素 $\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \sigma_{13}^2$ は、モデル定数の分散の初期値である。今回は経験的に初期値をそれぞれ c_{11}, c_{12}, c_{13} の2割を設定した。

また、 $U_{3,k}$ は X_3 の分散・共分散行列である（式(7.64)参照）。その要素 $Var(b_0)$ と $Var(b_1)$ および $Cov(b_0, b_1)$ は、それぞれ、式(7.66)と式(7.67)および式(7.68)より算出する（表7.2参照）。 x_2 の初期値はゼロで与えるが、その分散をゼロとするのは不合理であるため、 x_2 の誤差分散を $(0.1x_1)^2$ に設定した。

(3) 計算条件の設定

表 7.5 計算条件

減衰係数 λ	0.019
平均降雨強度 $\bar{r}$	2.138mm/h
計算時間間隔 nl	12
観測誤差分散 R_k	$(c_k \alpha_2)^2$
システム誤差分散 $Q_{1,k}, Q_{2,k}$	$(0.1x_1)^2, (0.1x_2)^2$

観測誤差分散 R_k は、式(7.76)と式(7.83)および式(7.84)より算出する（7.7 節・乗算的ノイズを参照）。システム誤差分散 $Q_{1,k}$ と $Q_{2,k}$ は、式(4.56)よりそれぞれ $(0.1x_1)^2$ と $(0.1x_2)^2$ を与える。また、平均降雨強度 $\bar{r}$ は既往洪水の平均値とし、1時間あたりの計算時間分割数 nl は12と設定した。

(4) 洪水予測シミュレーション

上記の初期条件、計算条件をもとに納内地点(流域面積 3558.0km²)において、表7.6に示す流域平均雨量と実績水位から算出した1時間～3時間先予測までの予測シミュレーションの結果を図7.1に示す。図7.2は逐次更新されるパラメータ($c_{11}, c_{12}, c_{13}, b_0, b_1$)を初期値100%として1時間ごとの変動率を表したものである。また、1時間～3時間先予測までの予測水位と標準偏差を表7.6に、パラメータの更新値を表7.7に示す。

結論を述べると、表7.7と図7.2に示すとおり回帰係数 b_0 と b_1 を状態変量に加えても初期値からの変化量は1%以下であることから、状態変量に加える効果は大きくないと考える。その理由は、表7.2に示される b_0 と b_1 の分散・共分散の値が非常に小さいことにもよる。

表7.6 シミュレーション結果一覧表1

地点名 : 納内地点

洪水期間: 平成13年9月9日 1:00～15日 24:00

時間	雨量	実測水位	予測水位(m)			標準偏差 σ		
	(mm/h)	(m)	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour
1	0.00	55.05	55.05	55.05	55.04	0.24	0.34	0.44
2	0.00	55.03	55.04	55.04	55.03	0.34	0.43	0.51
3	0.00	55.01	55.03	55.02	55.01	0.38	0.45	0.50
4	0.00	55.01	55.01	55.00	55.00	0.38	0.43	0.47
5	0.00	55.00	55.00	54.99	54.99	0.37	0.40	0.43
6	0.00	54.98	54.99	54.98	55.00	0.35	0.37	0.39
7	0.29	54.97	54.98	55.00	55.05	0.33	0.35	0.36
8	0.46	54.96	54.99	55.04	55.13	0.32	0.33	0.34
9	2.42	54.95	55.03	55.12	55.24	0.31	0.32	0.32
10	2.38	54.95	55.09	55.22	55.37	0.30	0.31	0.32
11	3.00	54.93	55.17	55.33	55.46	0.30	0.31	0.31
12	4.74	54.93	55.25	55.39	55.51	0.30	0.31	0.31
13	1.36	54.93	55.29	55.42	55.56	0.30	0.31	0.31
14	0.14	54.92	55.30	55.45	55.63	0.31	0.31	0.31
15	1.70	54.93	55.33	55.51	55.74	0.31	0.31	0.32
16	3.56	55.06	55.43	55.65	55.90	0.31	0.32	0.33
17	4.90	55.43	55.65	55.91	56.15	0.32	0.33	0.34
18	5.58	56.05	56.04	56.29	56.49	0.33	0.34	0.35
19	3.67	56.78	56.57	56.77	56.92	0.35	0.36	0.37
20	1.66	57.44	57.15	57.29	57.38	0.38	0.38	0.39
21	0.24	57.68	57.55	57.64	57.68	0.40	0.40	0.40
22	0.03	57.79	57.76	57.80	57.80	0.42	0.42	0.42
23	0.00	57.89	57.87	57.87	57.84	0.42	0.42	0.42
24	0.00	57.96	57.92	57.89	57.83	0.43	0.43	0.42
25	0.00	57.98	57.92	57.86	57.79	0.43	0.43	0.42
26	0.00	57.89	57.85	57.78	57.69	0.43	0.42	0.42
27	0.05	57.72	57.71	57.63	57.53	0.43	0.42	0.41
28	0.31	57.44	57.48	57.40	57.30	0.42	0.42	0.41
29	0.03	57.11	57.20	57.11	57.02	0.41	0.41	0.40
30	0.00	57.04	57.03	56.94	56.85	0.40	0.40	0.39
31	0.00	57.01	56.93	56.84	56.75	0.40	0.39	0.39
32	0.00	56.97	56.86	56.77	56.70	0.39	0.39	0.38
33	0.03	56.94	56.81	56.73	56.68	0.39	0.39	0.38
34	0.18	56.91	56.78	56.72	56.67	0.39	0.38	0.38
35	1.29	56.84	56.75	56.70	56.66	0.38	0.38	0.38
36	0.87	56.70	56.68	56.64	56.63	0.38	0.38	0.37
37	0.49	56.54	56.58	56.57	56.62	0.38	0.38	0.37
38	1.40	56.40	56.49	56.54	56.66	0.38	0.37	0.37
39	2.90	56.31	56.47	56.58	56.74	0.37	0.37	0.37
40	5.21	56.27	56.50	56.65	56.82	0.37	0.37	0.37
41	4.44	56.25	56.55	56.72	56.90	0.37	0.37	0.37
42	4.07	56.31	56.62	56.80	56.98	0.37	0.37	0.37

表7.6 シミュレーション結果一覧表1(つづき)

時間	雨量	実測水位	予測水位(m)			標準偏差 σ		
	(mm/h)	(m)	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour
43	2.82	56.49	56.74	56.92	57.08	0.38	0.38	0.37
44	3.99	56.61	56.86	57.02	57.18	0.38	0.38	0.38
45	1.63	56.78	56.99	57.15	57.34	0.39	0.39	0.39
46	2.20	56.95	57.13	57.33	57.55	0.39	0.39	0.39
47	3.63	57.16	57.34	57.56	57.78	0.40	0.40	0.40
48	6.28	57.44	57.61	57.83	58.04	0.41	0.41	0.41
49	3.93	57.74	57.90	58.11	58.30	0.42	0.42	0.42
50	4.19	57.92	58.12	58.31	58.48	0.43	0.43	0.43
51	3.59	58.10	58.30	58.47	58.65	0.44	0.44	0.44
52	2.91	58.27	58.46	58.64	58.83	0.44	0.44	0.44
53	4.37	58.45	58.63	58.83	59.05	0.45	0.45	0.44
54	5.01	58.57	58.79	59.02	59.25	0.45	0.45	0.45
55	5.99	58.70	58.96	59.20	59.40	0.46	0.46	0.46
56	7.45	58.82	59.11	59.32	59.48	0.46	0.46	0.46
57	4.73	58.96	59.22	59.39	59.54	0.47	0.47	0.47
58	3.66	59.09	59.31	59.46	59.59	0.47	0.47	0.47
59	3.73	59.22	59.40	59.54	59.67	0.47	0.47	0.47
60	4.25	59.42	59.55	59.68	59.79	0.48	0.47	0.47
61	5.23	59.61	59.72	59.83	59.89	0.48	0.48	0.47
62	4.24	59.81	59.89	59.95	59.94	0.48	0.48	0.48
63	4.28	59.98	60.01	60.00	59.93	0.49	0.48	0.48
64	0.96	60.07	60.04	59.97	59.86	0.49	0.49	0.48
65	0.65	60.09	60.00	59.90	59.77	0.49	0.49	0.48
66	1.01	60.04	59.92	59.79	59.65	0.49	0.49	0.48
67	0.99	59.95	59.81	59.67	59.53	0.49	0.48	0.48
68	1.80	59.83	59.69	59.54	59.39	0.49	0.48	0.48
69	1.40	59.73	59.57	59.42	59.26	0.48	0.48	0.48
70	1.57	59.58	59.43	59.27	59.11	0.48	0.48	0.48
71	1.19	59.40	59.25	59.09	58.91	0.48	0.47	0.47
72	0.99	59.19	59.05	58.87	58.69	0.47	0.47	0.47
73	0.38	58.95	58.81	58.63	58.46	0.47	0.47	0.47
74	0.13	58.73	58.58	58.41	58.24	0.46	0.46	0.46
75	0.47	58.55	58.39	58.22	58.05	0.45	0.46	0.46
76	0.36	58.39	58.22	58.05	57.89	0.45	0.45	0.45
77	0.21	58.26	58.07	57.91	57.77	0.44	0.44	0.45
78	0.22	58.13	57.95	57.80	57.66	0.44	0.44	0.44
79	0.73	58.01	57.83	57.69	57.55	0.43	0.44	0.44
80	0.47	57.89	57.72	57.58	57.45	0.43	0.43	0.43
81	0.03	57.78	57.61	57.48	57.35	0.43	0.43	0.43
82	0.29	57.68	57.51	57.38	57.26	0.42	0.42	0.42
83	0.16	57.57	57.41	57.29	57.17	0.42	0.42	0.42
84	0.29	57.48	57.32	57.21	57.10	0.41	0.41	0.41

表7.6 シミュレーション結果一覧表1(つづき)

時間	雨量	実測水位	予測水位(m)			標準偏差 σ		
	(mm/h)	(m)	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour
85	0.31	57.38	57.24	57.12	57.02	0.41	0.41	0.41
86	0.35	57.30	57.16	57.05	56.95	0.41	0.41	0.41
87	0.23	57.22	57.08	56.98	56.88	0.40	0.40	0.40
88	0.20	57.15	57.01	56.91	56.81	0.40	0.40	0.40
89	0.17	57.08	56.94	56.85	56.75	0.40	0.40	0.39
90	0.11	56.95	56.85	56.75	56.65	0.39	0.39	0.39
91	0.00	56.87	56.76	56.67	56.57	0.39	0.39	0.39
92	0.00	56.82	56.69	56.60	56.51	0.39	0.38	0.38
93	0.03	56.76	56.63	56.54	56.46	0.38	0.38	0.38
94	0.14	56.71	56.58	56.49	56.41	0.38	0.38	0.37
95	0.08	56.67	56.53	56.45	56.37	0.38	0.37	0.37
96	0.04	56.62	56.49	56.41	56.33	0.37	0.37	0.37
97	0.00	56.58	56.45	56.37	56.29	0.37	0.37	0.37
98	0.00	56.54	56.41	56.33	56.25	0.37	0.37	0.36
99	0.00	56.49	56.36	56.29	56.21	0.37	0.37	0.36
100	0.00	56.45	56.32	56.25	56.18	0.37	0.36	0.36
101	0.02	56.41	56.28	56.21	56.14	0.36	0.36	0.36
102	0.06	56.39	56.26	56.19	56.12	0.36	0.36	0.36
103	0.05	56.35	56.22	56.16	56.09	0.36	0.36	0.35
104	0.00	56.31	56.19	56.12	56.06	0.36	0.36	0.35
105	0.00	56.28	56.16	56.09	56.03	0.36	0.35	0.35
106	0.00	56.26	56.13	56.07	56.00	0.36	0.35	0.35
107	0.00	56.23	56.11	56.04	55.98	0.35	0.35	0.35
108	0.00	56.20	56.08	56.02	55.96	0.35	0.35	0.35
109	0.00	56.17	56.05	55.99	55.93	0.35	0.35	0.34
110	0.00	56.15	56.03	55.97	55.91	0.35	0.35	0.34
111	0.00	56.13	56.01	55.95	55.89	0.35	0.34	0.34
112	0.04	56.10	55.98	55.93	55.87	0.35	0.34	0.34
113	0.04	56.08	55.96	55.91	55.85	0.35	0.34	0.34
114	0.00	56.05	55.94	55.88	55.83	0.34	0.34	0.34
115	0.00	56.03	55.92	55.86	55.81	0.34	0.34	0.34
116	0.00	56.01	55.90	55.84	55.79	0.34	0.34	0.33
117	0.00	55.99	55.88	55.83	55.77	0.34	0.34	0.33
118	0.00	55.96	55.86	55.80	55.75	0.34	0.34	0.33
119	0.00	55.94	55.83	55.78	55.73	0.34	0.33	0.33
120	0.00	55.93	55.82	55.77	55.72	0.34	0.33	0.33
121	0.00	55.91	55.80	55.75	55.70	0.34	0.33	0.33
122	0.04	55.90	55.79	55.74	55.69	0.33	0.33	0.33
123	0.00	55.88	55.77	55.72	55.68	0.33	0.33	0.33
124	0.00	55.86	55.76	55.71	55.66	0.33	0.33	0.33
125	0.00	55.84	55.74	55.69	55.65	0.33	0.33	0.32
126	0.00	55.83	55.72	55.68	55.63	0.33	0.33	0.32

表7.6 シミュレーション結果一覧表1(つづき)

時間	雨量	実測水位	予測水位(m)			標準偏差 σ		
	(mm/h)	(m)	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour
127	0.00	55.81	55.71	55.66	55.62	0.33	0.33	0.32
128	0.00	55.80	55.69	55.65	55.61	0.33	0.33	0.32
129	0.00	55.78	55.68	55.63	55.59	0.33	0.32	0.32
130	0.00	55.78	55.67	55.63	55.58	0.33	0.32	0.32
131	0.00	55.76	55.66	55.61	55.57	0.33	0.32	0.32
132	0.00	55.74	55.64	55.60	55.56	0.33	0.32	0.32
133	0.00	55.73	55.63	55.59	55.55	0.32	0.32	0.32
134	0.00	55.71	55.61	55.57	55.53	0.32	0.32	0.32
135	0.00	55.70	55.60	55.56	55.52	0.32	0.32	0.32
136	0.00	55.69	55.59	55.55	55.51	0.32	0.32	0.31
137	0.00	55.67	55.58	55.54	55.50	0.32	0.32	0.31
138	0.00	55.66	55.56	55.52	55.48	0.32	0.32	0.31
139	0.00	55.66	55.56	55.52	55.48	0.32	0.32	0.31
140	0.00	55.65	55.55	55.51	55.47	0.32	0.32	0.31
141	0.00	55.64	55.54	55.50	55.46	0.32	0.32	0.31
142	0.00	55.63	55.53	55.49	55.45	0.32	0.31	0.31
143	0.00	55.62	55.52	55.48	55.45	0.32	0.31	0.31
144	0.00	55.60	55.51	55.47	55.43	0.32	0.31	0.31
145	0.00	55.58	55.49	55.46	55.42	0.32	0.31	0.31
146	0.00	55.56	55.48	55.44	55.41	0.32	0.31	0.31
147	0.00	55.55	55.47	55.43	55.39	0.31	0.31	0.31
148	0.00	55.55	55.46	55.42	55.38	0.31	0.31	0.31
149	0.00	55.53	55.44	55.41	55.37	0.31	0.31	0.31
150	0.00	55.52	55.43	55.40	55.36	0.31	0.31	0.30
151	0.00	55.51	55.42	55.39	55.35	0.31	0.31	0.30
152	0.00	55.50	55.41	55.38	55.34	0.31	0.31	0.30
153	0.00	55.49	55.40	55.37	55.33	0.31	0.31	0.30
154	0.00	55.48	55.39	55.36	55.33	0.31	0.31	0.30
155	0.00	55.48	55.39	55.35	55.32	0.31	0.31	0.30
156	0.00	55.47	55.38	55.35	55.31	0.31	0.30	0.30
157	0.00	55.46	55.37	55.34	55.31	0.31	0.30	0.30
158	0.00	55.45	55.36	55.33	55.30	0.31	0.30	0.30
159	0.00	55.44	55.35	55.32	55.29	0.31	0.30	0.30
160	0.00	55.42	55.34	55.31	55.28	0.31	0.30	0.30
161	0.00	55.42	55.33	55.30	55.27	0.30	0.30	0.30
162	0.00	55.42	55.33	55.30	55.27	0.30	0.30	0.30
163	0.00	55.41	55.32	55.29	55.26	0.30	0.30	0.30
164	0.00	55.39	55.31	55.28	55.25	0.30	0.30	0.30
165	0.00	55.39	55.30	55.27	55.24	0.30	0.30	0.30
166	0.00	55.38	55.30	55.27	55.24	0.30	0.30	0.30
167	0.00	55.38	55.29	55.26	55.23	0.30	0.30	0.30
168	0.00	55.37	55.28	55.25	55.23	0.30	0.30	0.29

表7.7 シミュレーション結果一覧表2

時間	パラメータ				
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	b_0	b_1
1	6.386	0.153	1.743	53.4200	0.1388
2	6.386	0.153	1.743	53.4200	0.1388
3	6.386	0.153	1.743	53.4200	0.1388
4	6.386	0.153	1.743	53.4200	0.1388
5	6.386	0.153	1.743	53.4200	0.1388
6	6.386	0.153	1.743	53.4200	0.1388
7	6.386	0.153	1.743	53.4200	0.1388
8	6.386	0.153	1.743	53.4200	0.1388
9	6.386	0.153	1.744	53.4200	0.1388
10	6.386	0.153	1.744	53.4200	0.1388
11	6.387	0.153	1.745	53.4200	0.1388
12	6.392	0.154	1.747	53.4200	0.1388
13	6.406	0.155	1.750	53.4200	0.1388
14	6.431	0.156	1.753	53.4200	0.1388
15	6.463	0.157	1.757	53.4200	0.1388
16	6.492	0.158	1.759	53.4200	0.1388
17	6.492	0.158	1.759	53.4200	0.1388
18	6.437	0.157	1.755	53.4200	0.1388
19	6.327	0.155	1.748	53.4200	0.1388
20	6.195	0.152	1.740	53.4200	0.1388
21	6.119	0.151	1.735	53.4200	0.1388
22	6.089	0.151	1.732	53.4200	0.1388
23	6.074	0.152	1.731	53.4200	0.1388
24	6.066	0.152	1.730	53.4200	0.1388
25	6.061	0.152	1.729	53.4200	0.1388
26	6.063	0.152	1.729	53.4200	0.1388
27	6.068	0.151	1.732	53.4200	0.1388
28	6.076	0.151	1.737	53.4200	0.1388
29	6.081	0.150	1.745	53.4200	0.1388
30	6.081	0.150	1.749	53.4200	0.1388
31	6.081	0.150	1.750	53.4200	0.1388
32	6.082	0.150	1.749	53.4200	0.1388
33	6.085	0.150	1.747	53.4200	0.1388
34	6.089	0.150	1.744	53.4200	0.1388
35	6.092	0.150	1.742	53.4200	0.1388
36	6.089	0.150	1.744	53.4200	0.1388
37	6.082	0.150	1.747	53.4200	0.1388
38	6.072	0.150	1.751	53.4200	0.1388
39	6.062	0.151	1.756	53.4200	0.1388
40	6.052	0.151	1.760	53.4200	0.1388
41	6.043	0.151	1.766	53.4200	0.1388
42	6.040	0.152	1.771	53.4200	0.1388

表7.7 シミュレーション結果一覧表2(つづき)

時間	パラメータ				
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	b_0	b_1
43	6.042	0.152	1.774	53.4200	0.1388
44	6.047	0.153	1.777	53.4200	0.1388
45	6.051	0.153	1.778	53.4200	0.1388
46	6.054	0.153	1.779	53.4200	0.1388
47	6.052	0.153	1.779	53.4200	0.1388
48	6.043	0.153	1.777	53.4200	0.1388
49	6.031	0.153	1.775	53.4200	0.1388
50	6.029	0.153	1.774	53.4200	0.1388
51	6.031	0.153	1.775	53.4200	0.1388
52	6.034	0.153	1.775	53.4200	0.1388
53	6.034	0.153	1.775	53.4200	0.1388
54	6.039	0.153	1.776	53.4200	0.1388
55	6.046	0.153	1.778	53.4200	0.1388
56	6.057	0.153	1.780	53.4200	0.1388
57	6.068	0.153	1.783	53.4200	0.1388
58	6.077	0.153	1.786	53.4200	0.1388
59	6.084	0.153	1.787	53.4200	0.1388
60	6.082	0.153	1.787	53.4200	0.1388
61	6.079	0.153	1.786	53.4200	0.1388
62	6.074	0.153	1.784	53.4200	0.1388
63	6.070	0.153	1.782	53.4200	0.1388
64	6.067	0.153	1.781	53.4200	0.1388
65	6.065	0.153	1.780	53.4200	0.1388
66	6.064	0.153	1.779	53.4200	0.1388
67	6.064	0.153	1.778	53.4200	0.1388
68	6.064	0.153	1.778	53.4200	0.1388
69	6.065	0.153	1.777	53.4200	0.1388
70	6.065	0.153	1.776	53.4200	0.1388
71	6.064	0.153	1.777	53.4200	0.1388
72	6.062	0.153	1.779	53.4200	0.1388
73	6.057	0.153	1.781	53.4200	0.1388
74	6.053	0.153	1.784	53.4200	0.1388
75	6.051	0.153	1.785	53.4200	0.1388
76	6.051	0.153	1.784	53.4200	0.1388
77	6.054	0.153	1.783	53.4200	0.1388
78	6.059	0.153	1.782	53.4200	0.1388
79	6.064	0.153	1.780	53.4200	0.1388
80	6.069	0.153	1.779	53.4200	0.1388
81	6.074	0.153	1.777	53.4200	0.1388
82	6.080	0.153	1.775	53.4200	0.1388
83	6.085	0.153	1.774	53.4200	0.1388
84	6.091	0.153	1.772	53.4200	0.1388

表7.7 シミュレーション結果一覧表2(つづき)

時間	パラメータ				
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	b_0	b_1
85	6.096	0.153	1.771	53.4200	0.1388
86	6.101	0.153	1.769	53.4200	0.1388
87	6.107	0.153	1.768	53.4200	0.1388
88	6.113	0.153	1.766	53.4200	0.1388
89	6.119	0.153	1.765	53.4200	0.1388
90	6.119	0.153	1.765	53.4200	0.1388
91	6.121	0.153	1.764	53.4200	0.1388
92	6.126	0.153	1.763	53.4200	0.1388
93	6.132	0.153	1.762	53.4200	0.1388
94	6.138	0.153	1.760	53.4200	0.1388
95	6.146	0.153	1.758	53.4200	0.1388
96	6.153	0.153	1.757	53.4200	0.1388
97	6.160	0.152	1.755	53.4200	0.1388
98	6.167	0.152	1.753	53.4200	0.1388
99	6.174	0.152	1.751	53.4200	0.1388
100	6.180	0.152	1.750	53.4200	0.1388
101	6.187	0.152	1.748	53.4200	0.1388
102	6.195	0.152	1.746	53.4200	0.1388
103	6.202	0.152	1.745	53.4200	0.1388
104	6.208	0.152	1.743	53.4200	0.1388
105	6.214	0.152	1.742	53.4200	0.1388
106	6.221	0.152	1.740	53.4200	0.1388
107	6.228	0.152	1.739	53.4200	0.1388
108	6.235	0.152	1.737	53.4200	0.1388
109	6.241	0.152	1.736	53.4200	0.1388
110	6.247	0.152	1.734	53.4200	0.1388
111	6.254	0.152	1.733	53.4200	0.1388
112	6.260	0.152	1.731	53.4200	0.1388
113	6.266	0.152	1.730	53.4200	0.1388
114	6.272	0.152	1.728	53.4200	0.1388
115	6.277	0.152	1.727	53.4200	0.1388
116	6.283	0.152	1.726	53.4200	0.1388
117	6.288	0.152	1.724	53.4200	0.1388
118	6.293	0.152	1.723	53.4200	0.1388
119	6.298	0.152	1.722	53.4200	0.1388
120	6.304	0.152	1.721	53.4200	0.1388
121	6.309	0.152	1.719	53.4200	0.1388
122	6.315	0.152	1.718	53.4200	0.1388
123	6.320	0.152	1.717	53.4200	0.1388
124	6.325	0.152	1.716	53.4200	0.1388
125	6.330	0.152	1.714	53.4200	0.1388
126	6.335	0.152	1.713	53.4200	0.1388

表7.7 シミュレーション結果一覧表2(つづき)

時間	パラメータ				
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	b_0	b_1
127	6.339	0.152	1.712	53.4200	0.1388
128	6.344	0.152	1.711	53.4200	0.1388
129	6.349	0.152	1.710	53.4200	0.1388
130	6.354	0.152	1.708	53.4200	0.1388
131	6.359	0.152	1.707	53.4200	0.1388
132	6.363	0.152	1.706	53.4200	0.1388
133	6.368	0.152	1.705	53.4200	0.1388
134	6.372	0.152	1.704	53.4200	0.1388
135	6.376	0.152	1.703	53.4200	0.1388
136	6.381	0.152	1.702	53.4200	0.1388
137	6.384	0.152	1.701	53.4200	0.1388
138	6.389	0.152	1.700	53.4200	0.1388
139	6.393	0.152	1.699	53.4200	0.1388
140	6.398	0.152	1.698	53.4200	0.1388
141	6.402	0.152	1.696	53.4200	0.1388
142	6.407	0.152	1.695	53.4200	0.1388
143	6.411	0.152	1.694	53.4200	0.1388
144	6.414	0.152	1.693	53.4200	0.1388
145	6.418	0.152	1.693	53.4200	0.1388
146	6.421	0.152	1.692	53.4200	0.1388
147	6.424	0.152	1.691	53.4200	0.1388
148	6.428	0.152	1.690	53.4200	0.1388
149	6.431	0.151	1.689	53.4200	0.1388
150	6.435	0.151	1.688	53.4200	0.1388
151	6.438	0.151	1.687	53.4200	0.1388
152	6.442	0.151	1.686	53.4200	0.1388
153	6.445	0.151	1.686	53.4200	0.1388
154	6.448	0.151	1.685	53.4200	0.1388
155	6.452	0.151	1.684	53.4200	0.1388
156	6.456	0.151	1.683	53.4200	0.1388
157	6.459	0.151	1.682	53.4200	0.1388
158	6.463	0.151	1.681	53.4200	0.1388
159	6.466	0.151	1.680	53.4200	0.1388
160	6.469	0.151	1.679	53.4200	0.1388
161	6.472	0.151	1.679	53.4200	0.1388
162	6.476	0.151	1.678	53.4200	0.1388
163	6.479	0.151	1.677	53.4200	0.1388
164	6.482	0.151	1.676	53.4200	0.1388
165	6.485	0.151	1.675	53.4200	0.1388
166	6.488	0.151	1.674	53.4200	0.1388
167	6.492	0.151	1.674	53.4200	0.1388
168	6.495	0.151	1.673	53.4200	0.1388

洪水の再現性を評価する方法として、予測水位 H_{ci} (m)と実測水位 H_{oi} (m)の平均2乗誤差の平方根(RMSE:Root Mean Squares Error)を用いた。表7.8に計算結果を示す。

表7.8 水位～流量曲線の誤差を考慮した予測水位の比較

	1時間先予測	2時間先予測	3時間先予測
実測ピーク水位	60.09m	60.09m	60.09m
予測ピーク水位	60.04m	60.00m	59.94m
予測水位+標準偏差	60.53m	60.48m	60.41m
RMSE	0.15m	0.21m	0.25m

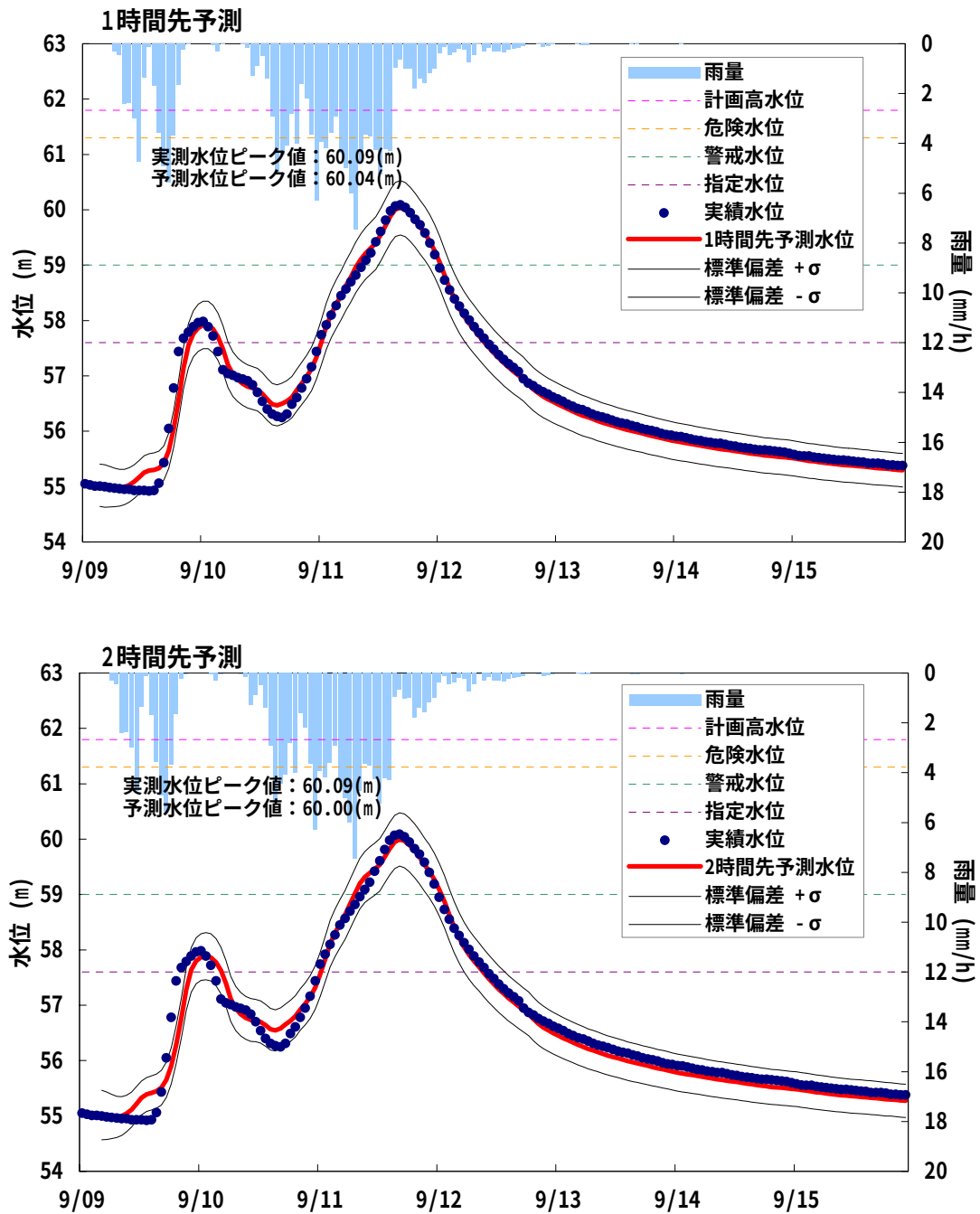


図7.1 洪水予測シミュレーション図 納内地点 (平成13年洪水)

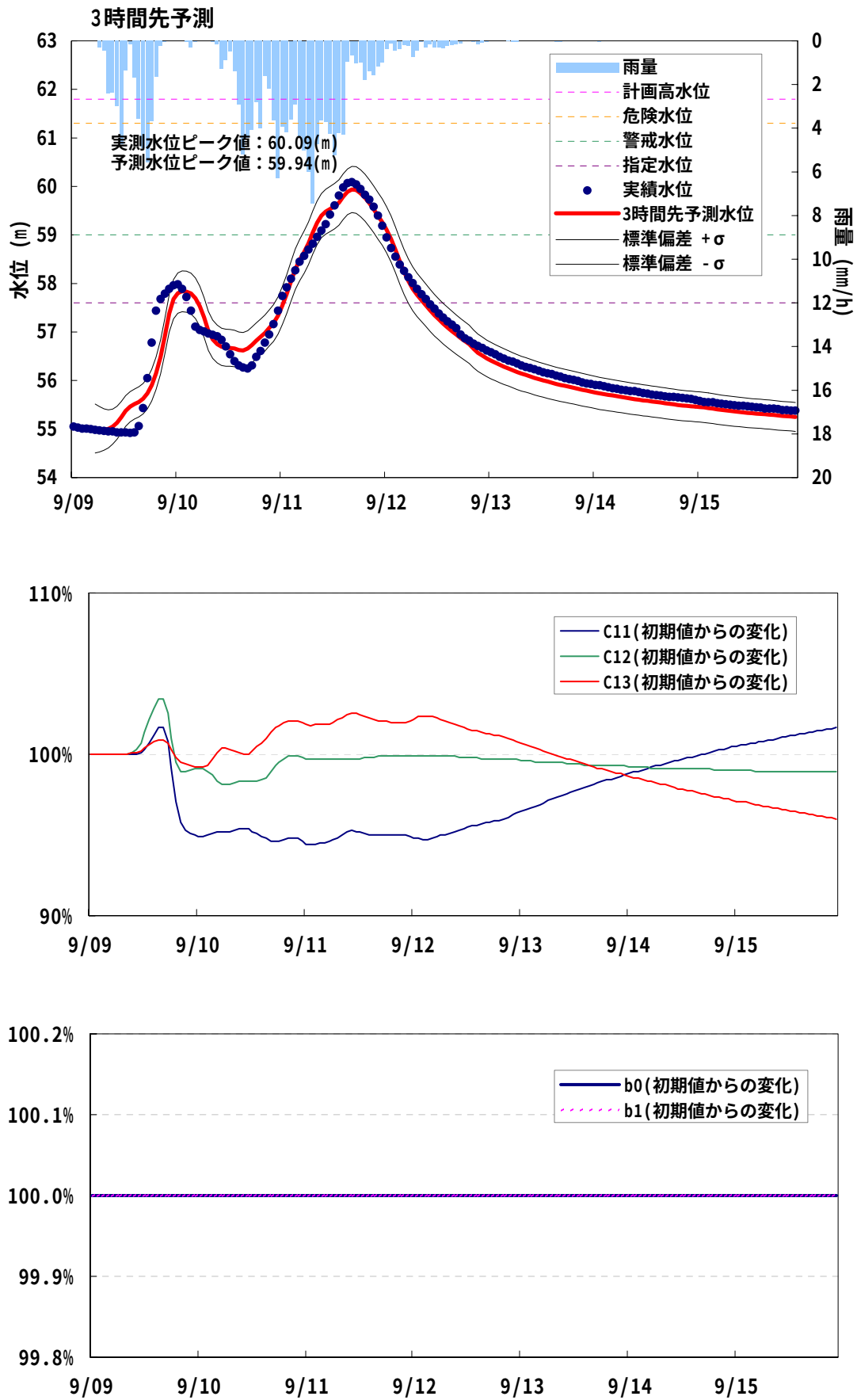


図7.2 パラメータ更新値の変化率

7.11 水位～流量曲線の変動特性 Fortran プログラム

観測資料をもとに水位～流量曲線を一本化し、回帰係数 a_0, a_1 と b_0, b_1 およびその分散・共分散を計算する Fortran プログラムと入力変数名を以下に示す。

(1) 主プログラムの機能

対象洪水の1年前には流量観測資料が得られている。式(7.1)～式(7.68)を用いて、水位～流量曲線を一本化する。

(2) 主な入力変数の内容

sh	ΣH
sq	$\Sigma \sqrt{Q}$
ah	$\bar{H}$ (水位の平均値)
sh2	$\Sigma(H^2)$
shq	$\Sigma(H\sqrt{Q})$
a0	式(7.1)に関する回帰係数 a_0
a1	式(7.1)に関する回帰係数 a_1
b0	式(7.65)に関する回帰係数 b_0
b1	式(7.65)に関する回帰係数 b_1
Va0	a_0 の分散 $Var(a_0)$
va1	a_1 の分散 $Var(a_1)$
ca0a1	a_0 と a_1 の共分散 $Cov(a_0, a_1)$
vb0	b_0 の分散 $Var(b_0)$
vb1	b_1 の分散 $Var(b_1)$
cb0b1	b_0 と b_1 の共分散 $Cov(b_0, b_1)$
hmax	対象洪水のピーク水位 H_p
q0	ピーク流量 Q_p
vq0	Q_p の分散 $Var(Q_p)$

(3) データ入力

納内

3558.00

平成12年度観測資料

84

H

54.31	54.33	54.36	54.38	54.40	54.43	54.44	54.46	54.48	54.50
54.51	54.51	54.52	54.54	54.54	54.58	54.59	54.59	54.60	54.63
54.63	54.65	54.66	54.68	54.68	54.68	54.69	54.69	54.69	54.70
54.72	54.74	54.75	54.76	54.77	54.78	54.80	54.82	54.82	54.89
54.92	54.93	54.94	54.98	54.98	55.00	55.02	55.03	55.03	55.08
55.15	55.18	55.19	55.20	55.21	55.24	55.24	55.30	55.35	55.40
55.47	55.55	55.60	55.61	55.63	55.74	55.75	55.82	55.82	56.19
56.32	56.34	56.94	56.95	57.04	57.31	57.33	57.66	57.94	58.13
58.69	58.93	60.09	60.18						

$\sqrt{Q}$

6.16	6.44	6.47	6.52	6.77	7.15	7.07	7.20	7.28	7.29
7.55	7.79	7.61	7.59	7.86	8.07	8.19	7.98	8.12	8.53

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

8.61	8.73	8.81	8.88	8.89	8.95	8.54	8.98	8.96	9.04
8.68	9.24	9.32	9.38	9.61	9.52	9.71	9.85	9.68	10.50
11.07	11.10	10.68	11.37	11.33	11.62	12.01	11.31	12.07	12.33
12.68	13.09	13.13	13.24	13.20	13.27	13.45	13.85	14.41	14.58
14.85	15.54	15.95	15.70	16.32	16.82	16.97	17.31	17.41	20.35
21.07	21.26	26.62	26.59	27.30	29.03	29.14	31.78	33.57	34.97
38.87	39.47	45.20	45.53						

平成 13 年 9 月 11 日洪水実測水位
168

H

55.05	55.03	55.01	55.01	55.00	54.98	54.97	54.96	54.95	54.95
54.93	54.93	54.93	54.92	54.93	55.06	55.43	56.05	56.78	57.44
57.68	57.79	57.89	57.96	57.98	57.89	57.72	57.44	57.11	57.04
57.01	56.97	56.94	56.91	56.84	56.70	56.54	56.40	56.31	56.27
56.25	56.31	56.49	56.61	56.78	56.95	57.16	57.44	57.74	57.92
58.10	58.27	58.45	58.57	58.70	58.82	58.96	59.09	59.22	59.42
59.61	59.81	59.98	60.07	60.09	60.04	59.95	59.83	59.73	59.58
59.40	59.19	58.95	58.73	58.55	58.39	58.26	58.13	58.01	57.89
57.78	57.68	57.57	57.48	57.38	57.30	57.22	57.15	57.08	56.95
56.87	56.82	56.76	56.71	56.67	56.62	56.58	56.54	56.49	56.45
56.41	56.39	56.35	56.31	56.28	56.26	56.23	56.20	56.17	56.15
56.13	56.10	56.08	56.05	56.03	56.01	55.99	55.96	55.94	55.93
55.91	55.90	55.88	55.86	55.84	55.83	55.81	55.80	55.78	55.78
55.76	55.74	55.73	55.71	55.70	55.69	55.67	55.66	55.66	55.65
55.64	55.63	55.62	55.60	55.58	55.56	55.55	55.55	55.53	55.52
55.51	55.50	55.49	55.48	55.48	55.47	55.46	55.45	55.44	55.42
55.42	55.42	55.41	55.39	55.39	55.38	55.38	55.37		

(4) 計算出力

納内

4653.70: ΣH

1198.93: $\Sigma \sqrt{Q}$

55.40: $\Sigma (H)/N$

257953.58: $\Sigma (H^2)$

67380.44: $\Sigma (H \cdot \sqrt{Q})$

35.38: $\Sigma (\sqrt{Q} - a_0 H - a_1)^2$

```
=====
a0 = -384.73  a1 = 7.2021
b0 = 53.42   b1 = 0.1388
σ^2= 0.4315
```

```
Var(a0) = 9.9588  Var(b0) = 0.000344575
Var(a1) = 0.0032  Var(b1) = 0.000001205
Cov(a0,a1)= -0.1797  Cov(b0,b1)=-0.000017203
```

```
Qp = 2308.0785
Var(Qp) = 705.6608
√Var(Qp)/Qp= 0.0115
```

(5) プログラムリスト

```

      program hq
      implicit double precision(a-h,o-z)
      parameter(IP1=500)
c-----
c   観測資料をもとに水位～流量曲線を一本化
c   hq
c-----
      character titen*20
      real h(IP1),q(IP1),h1(IP1)
c
      open(1,file='data',status='old')
      rewind 1
c
      sh=0.0   !  $\Sigma H$ 
      sq=0.0   !  $\Sigma \sqrt{Q}$ 
      ah=0.0   ! Average(H)
      sh2=0.0  !  $\Sigma (H^2)$ 
      shq=0.0  !  $\Sigma (H \sqrt{Q})$ 
c
      read(1,'(a20)') titen
      read(1,'(f8.2)') area
      read(1,'()')
      read(1,'(i5)') kosu
      read(1,'()')
      read(1,'(10f8.2)')(h(i),i=1,kosu)
      read(1,'()')
      read(1,'(10f8.2)')(q(i),i=1,kosu)
      read(1,'()')
      read(1,'(i5)') kosu1
      read(1,'()')
      read(1,'(10f8.2)')(h1(i),i=1,kosu1)

      do i=1,kosu
         sh=sh+h(i)
         sq=sq+q(i)
      end do

      have=sh/kosu                                ! 平均水位

      ah=sh/kosu
      do i=1,kosu
         sh2=sh2+h(i)**2
         shq=shq+h(i)*q(i)
      end do

c-----式 7.6, 7.7
      a0=((sq*sh2)-(shq*sh))/(kosu*sh2-sh**2)
      a1=((kosu*shq)-(sh*sq))/(kosu*sh2-sh**2)

c-----式 7.3
      ep=0.0 !  $\epsilon$ 
      do i=1,kosu
         ep=ep+(q(i)-a0-a1*h(i))**2
      end do

c-----式 7.9
      s2=ep/(kosu-2) !  $\sigma^2$ 
      s2=int(s2*10000)

```

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

```

s2=s2/10000.0

c-----式 7.10, 7.11, 7.12
va0=s2*sh2/(kosu*sh2-sh**2)          !Var(a0)分散
va1=s2*kosu/(kosu*sh2-sh**2)         !Var(a1)
ca0a1=(-1)*s2*sh/(kosu*sh2-sh**2) !Cov(a0,a1)共分散

c-----式 7.22, 7.23, 7.24
vb0=((-1/a1)**2)*va0+va1*(a0/a1**2)**2      !Var(b0)分散
&
+2*(-1/a1)*(a0/a1**2)*ca0a1
vb1=((-1/a1**2)**2)*va1      !Var(b1)
cb0b1=(a0/a1**2)*(-1/a1**2)*va1+(-1/a1)*(-1/a1**2)*ca0a1 !Cov(b0,b1)共分散

c-----式 7.19, 7.16
hmax=0.0
do i=1,kosu1
  if(hmax.lt.h1(i)) hmax=h1(i)      !最高水位
end do

h0=hmax
q0=(a0+a1*h0)**2      !Qp ピーク流量
vq0=4*q0*(va0+va1*h0**2+2*h0*ca0a1) !Var(Qp)分散

c-----計算結果の出力-----
open(2,file='out',status='unknown')
rewind 2

c
write(2,'(a20)')titen
write(2,'(f10.2,':ΣH')')sh
write(2,'(f10.2,':Σ√Q')')sq
write(2,'(f10.2,':ΣAverage(H)')')ah
write(2,'(f10.2,':Σ(H^2)')')sh2
write(2,'(f10.2,':Σ(H*√Q)')')shq
write(2,'(f10.2,':Σ(√Q-a0H-a1)^2')')ep
write(2,'()')
write(2,'
&('=====')')
write(2,'()')
write(2,'('a0  =',f10.2,'    a1  =',f10.4)')a0,a1
write(2,'('b0  =',f10.2,'    b1  =',f10.4)')-a0/a1,1/a1
write(2,'('σ^2=',f10.4)')s2

c
write(2,'()')
write(2,'('Var(a0)  =',f10.4,
&
'' Var(b0)  =',f12.9)')va0,vb0
write(2,'('Var(a1)  =',f10.4,
&
'' Var(b1)  =',f12.9)')va1,vb1
write(2,'('Cov(a0,a1)=',f10.4,
&
'' Cov(b0,b1)=',f12.9)')ca0a1,cb0b1
write(2,'()')
write(2,'('Qp      =',f10.4)')q0
write(2,'('Var(Qp)  =',f10.4)')vq0
write(2,'('√Var(Qp)/Qp=',f10.4)')sqrt(vq0)/q0

c
close(1)
close(2)

c
stop
end

```

7.12 水位～流量曲線を用いた Fortran プログラム

1 段タンク型貯留関数法にカルマン・フィルタ理論を適用し、表 7.2 (7.11 節) で一本化した水位～流量曲線を用いて、3 時間先までの水位予測値($\text{dis}(i,j)$)と標準偏差($\text{sig}(i,j)$)およびモデルパラメータ更新値($x_{\text{prn}}(i)$)を計算する Fortran プログラムと入力変数名を以下に示す。また、プログラム中にはコメント文を加えたので、変数名と計算内容が容易に理解できるものとする。

(1) 主プログラムの機能

洪水予測を行うに際して、降雨量と水位の観測値が 1 時間ごとに得られるものとして、各地点での 3 時間先までの水位予測値(dis)と標準偏差(sig)およびモデルパラメータ更新値(x_{prn})を計算する。このとき、新しい流量観測値に基づいて、1 時間ごとに状態変数と誤差共分散が更新される。予測を行った後の状態変数と誤差共分散の更新・伝達は、予測の出発点にもどる。このプログラム例では、将来の降雨量予測を行っておらず、実測値を用いている点に注意すべきである。

(2) サブプログラムの機能

(a) Subroutine no2kal

式(7.52)の状態変数の伝達方程式により、 X_k を計算する。同時に、式(7.58)と式(7.59)および式(7.60)の推定誤差分散・共分散伝達方程式により、 $P_{1,k}$ と $P_{2,k}$ および $P_{3,k}$ を計算する。

(b) Subroutine no2upd

1 時間ごとに観測値が入手されるとして、式(7.82)により状態変数とパラメータの更新値を計算する。このとき、同時に式(7.93)～式(7.97)により状態変数とパラメータの推定誤差分散・共分散($P_{1,k}, P_{2,k}, P_{3,k}, U_{1,k}, U_{3,k}$)を更新する。

(c) Subroutine input

状態変数 X_k の初期値及びその誤差分散・共分散の初期値 P_1 と P_2 および P_3 を設定する。パラメータ c_{11}, c_{12}, c_{13} の初期値とその誤差分散・共分散 $U_{1,k}$ と $U_{3,k}$ を指定する。また、システム誤差分散・共分散 Q_k と観測誤差分散 R_k を入力する。

(d) Subroutine mul31, mul21, mul21t

式(7.58)と式(7.59)および式(7.60)に含まれる行列演算、 ABC^T と AB および AB^T を出力する。

(3) 主な入力変数の内容

(a) Input Data

pa_c1, pa_c2, pa_c3	それぞれ、パラメータ c_{11}, c_{12}, c_{13} の初期値
rah	平均雨量強度(既往洪水平均値)
ram	地下流出成分の減衰係数($\lambda=0.019$ に仮定)
suikei	水系名
kasen	河川名
chiten	地点名
title	洪水名
area	流域面積

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

hwl	計画高水位
xwl	危険水位
dwl	警戒水位
swl	指定水位
iy, im, id, ih	開始年、月、日、時
nr, nq	降雨データ数、水位データ数
r(i)	雨量データ
hrea(i)	水位データ
a00, a11	式(7.1)における回帰係数 a_0 と a_1
b00, b11	式(7.65)における回帰係数 b_0 と b_1
var_b0, var_b1, cov_b0b1	式(7.66)～式(7.68)の b_0 と b_1 の分散・共分散

(b) Main Program

n	更新する状態変数数($n=2$)
np	c_{11}, c_{12}, c_{13} に関する配列数($np=3$)
np2	b_0 と b_1 に関する配列数($np2=2$)
iyoso	リードタイム(3時間先予測まで可能)
wp1	モデル定数 p_1 ($wp1=0.6$)
zp2	モデル定数 p_2 ($zp2=0.4678$)
nl	計算時間間隔(1時間)の分割数($nl=12$)
xvap(i, j)	予測誤差分散
sig(i, j)	標準偏差
x(i)	状態変数 x_1, x_2 ($i=1 \sim 2$)
p1(i, j)	X_1 に関する(2×2)の分散・共分散
p2(i, j)	X_1 と X_2 に関する(2×3)の分散・共分散
p33(i, j)	X_1 と X_3 に関する(2×2)の分散・共分散
z	式(7.71)の現在時刻の観測水位

(c) Subroutine no2kal

x(i)	状態変数 c_{11}, c_{12}, c_{13} ($i=3 \sim 5$)
a21～a25	A_1, A_2 の要素である式(4.15)の値
f(i)	Φ の要素である式(4.23)と式(4.24)の値
g(i)	Γ の要素式(4.25)の値
d2	式(4.17)の d_2

(d) Subroutine no2upd

ck	式(7.76)の c_k
rq	観測誤差分散 R_k
s	表4.2に示される式(8)「カルマン・ゲイン」の右辺第2項
q(i, j)	システム誤差分散・共分散 Q_k
u1(i, j), u3(i, j)	パラメータの誤差分散・共分散 $U_{1,k}$ と $U_{3,k}$

(e) Subroutine input

alph1 システム誤差として x_1 と x_2 に乗ずる定数
 alph2 初期値の誤差分散に乗ずる定数
 alph3 モデルパラメータの誤差分散に乗ずる定数
 alph4 観測誤差として c_k に乗ずる定数

(4) データ入力

6.386	0.153	1.743	2.138	0.019						
石狩川										
石狩川										
納内										
平成 13 年 9 月 11 日洪水										
3558.00	61.80	61.30	59.00	57.60						
2001	9	9	1							
168	168									
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.46	2.42	2.38	
3.00	4.74	1.36	0.14	1.70	3.56	4.90	5.58	3.67	1.66	
0.24	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.31	0.03	0.00	
0.00	0.00	0.03	0.18	1.29	0.87	0.49	1.40	2.90	5.21	
4.44	4.07	2.82	3.99	1.63	2.20	3.63	6.28	3.93	4.19	
3.59	2.91	4.37	5.01	5.99	7.45	4.73	3.66	3.73	4.25	
5.23	4.24	4.28	0.96	0.65	1.01	0.99	1.80	1.40	1.57	
1.19	0.99	0.38	0.13	0.47	0.36	0.21	0.22	0.73	0.47	
0.03	0.29	0.16	0.29	0.31	0.35	0.23	0.20	0.17	0.11	
0.00	0.00	0.03	0.14	0.08	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.02	0.06	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.04	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
55.05	55.03	55.01	55.01	55.00	54.98	54.97	54.96	54.95	54.95	
54.93	54.93	54.93	54.92	54.93	55.06	55.43	56.05	56.78	57.44	
57.68	57.79	57.89	57.96	57.98	57.89	57.72	57.44	57.11	57.04	
57.01	56.97	56.94	56.91	56.84	56.70	56.54	56.40	56.31	56.27	
56.25	56.31	56.49	56.61	56.78	56.95	57.16	57.44	57.74	57.92	
58.10	58.27	58.45	58.57	58.70	58.82	58.96	59.09	59.22	59.42	
59.61	59.81	59.98	60.07	60.09	60.04	59.95	59.83	59.73	59.58	
59.40	59.19	58.95	58.73	58.55	58.39	58.26	58.13	58.01	57.89	
57.78	57.68	57.57	57.48	57.38	57.30	57.22	57.15	57.08	56.95	
56.87	56.82	56.76	56.71	56.67	56.62	56.58	56.54	56.49	56.45	
56.41	56.39	56.35	56.31	56.28	56.26	56.23	56.20	56.17	56.15	
56.13	56.10	56.08	56.05	56.03	56.01	55.99	55.96	55.94	55.93	
55.91	55.90	55.88	55.86	55.84	55.83	55.81	55.80	55.78	55.78	
55.76	55.74	55.73	55.71	55.70	55.69	55.67	55.66	55.66	55.65	
55.64	55.63	55.62	55.60	55.58	55.56	55.55	55.55	55.53	55.52	
55.51	55.50	55.49	55.48	55.48	55.47	55.46	55.45	55.44	55.42	
55.42	55.42	55.41	55.39	55.39	55.38	55.38	55.37			
H-Q式										
-384.73		7.2021						! a0, a1		
53.42		0.1388						! b0, b1		
H-Q式の分散等										
0.344575E-5	0.120500E-7	-0.17203E-6						! Var(b0), Var(b1), Cov(b0,b1))		

(5) 計算出力

地点名 : 納内

開始時間 : 2001 年 9 月 9 日 1 時

流域面積 : 3558.00

分割数(n1): 12

<---貯留指数---><---パラメータ初期値--->

p1	p2	c11	c12	c13
0.6000	0.4648	6.386	0.153	1.743

		<----- 予測値 ----->			<----- 標準偏差 ----->			<----- モデル定数 ----->					
N0	雨量	実測値	1 時間後	2 時間後	3 時間後	1 時間後	2 時間後	3 時間後	c11	c12	c13	b0	b1
1	0.00	55.05	55.049	55.047	55.043	0.2376	0.3426	0.4416	6.3860	0.1530	1.7430	53.4200	0.1388
2	0.00	55.03	55.042	55.037	55.032	0.3431	0.4295	0.5067	6.3860	0.1530	1.7430	53.4200	0.1388
3	0.00	55.01	55.025	55.018	55.010	0.3825	0.4468	0.5031	6.3860	0.1530	1.7430	53.4200	0.1388
4	0.00	55.01	55.012	55.003	54.997	0.3825	0.4280	0.4674	6.3860	0.1530	1.7431	53.4200	0.1388
5	0.00	55.00	54.999	54.992	54.991	0.3677	0.3992	0.4264	6.3860	0.1530	1.7431	53.4200	0.1388
6	0.00	54.98	54.985	54.984	55.004	0.3499	0.3716	0.3903	6.3859	0.1530	1.7432	53.4200	0.1388
7	0.29	54.97	54.979	54.998	55.051	0.3335	0.3484	0.3613	6.3859	0.1530	1.7432	53.4200	0.1388
8	0.46	54.96	54.992	55.044	55.128	0.3201	0.3303	0.3392	6.3858	0.1530	1.7433	53.4200	0.1388
9	2.42	54.95	55.031	55.115	55.244	0.3101	0.3172	0.3241	6.3856	0.1530	1.7435	53.4200	0.1388
10	2.38	54.95	55.091	55.220	55.372	0.3038	0.3096	0.3151	6.3855	0.1531	1.7441	53.4200	0.1388
11	3.00	54.93	55.173	55.325	55.461	0.3015	0.3065	0.3096	6.3868	0.1534	1.7452	53.4200	0.1388
12	4.74	54.93	55.253	55.389	55.514	0.3025	0.3059	0.3080	6.3922	0.1540	1.7471	53.4200	0.1388
13	1.36	54.93	55.292	55.417	55.559	0.3043	0.3069	0.3100	6.4061	0.1551	1.7498	53.4200	0.1388
14	0.14	54.92	55.304	55.446	55.626	0.3058	0.3089	0.3137	6.4307	0.1563	1.7531	53.4200	0.1388
15	1.70	54.93	55.332	55.511	55.737	0.3074	0.3120	0.3192	6.4634	0.1574	1.7565	53.4200	0.1388
16	3.56	55.06	55.427	55.651	55.904	0.3108	0.3177	0.3269	6.4923	0.1582	1.7592	53.4200	0.1388
17	4.90	55.43	55.653	55.905	56.148	0.3186	0.3274	0.3370	6.4919	0.1582	1.7591	53.4200	0.1388
18	5.58	56.05	56.042	56.285	56.490	0.3330	0.3420	0.3504	6.4368	0.1569	1.7552	53.4200	0.1388
19	3.67	56.78	56.567	56.770	56.921	0.3536	0.3607	0.3670	6.3267	0.1545	1.7480	53.4200	0.1388
20	1.66	57.44	57.146	57.290	57.384	0.3778	0.3821	0.3860	6.1951	0.1522	1.7398	53.4200	0.1388
21	0.24	57.68	57.547	57.636	57.678	0.4009	0.4027	0.4041	6.1193	0.1514	1.7348	53.4200	0.1388
22	0.03	57.79	57.761	57.801	57.802	0.4164	0.4163	0.4156	6.0885	0.1514	1.7323	53.4200	0.1388
23	0.00	57.89	57.870	57.870	57.839	0.4245	0.4228	0.4202	6.0742	0.1515	1.7308	53.4200	0.1388
24	0.00	57.96	57.919	57.887	57.831	0.4281	0.4251	0.4210	6.0657	0.1516	1.7296	53.4200	0.1388
25	0.00	57.98	57.920	57.864	57.792	0.4293	0.4253	0.4199	6.0610	0.1517	1.7287	53.4200	0.1388
26	0.00	57.89	57.847	57.776	57.693	0.4286	0.4239	0.4179	6.0629	0.1516	1.7292	53.4200	0.1388
27	0.05	57.72	57.707	57.625	57.534	0.4257	0.4207	0.4145	6.0684	0.1514	1.7316	53.4200	0.1388
28	0.31	57.44	57.483	57.395	57.301	0.4204	0.4155	0.4096	6.0758	0.1510	1.7371	53.4200	0.1388
29	0.03	57.11	57.201	57.111	57.019	0.4125	0.4079	0.4025	6.0809	0.1504	1.7453	53.4200	0.1388
30	0.00	57.04	57.030	56.940	56.849	0.4033	0.3991	0.3942	6.0809	0.1502	1.7491	53.4200	0.1388
31	0.00	57.01	56.930	56.839	56.751	0.3965	0.3926	0.3881	6.0807	0.1502	1.7496	53.4200	0.1388
32	0.00	56.97	56.858	56.770	56.696	0.3920	0.3883	0.3840	6.0817	0.1502	1.7486	53.4200	0.1388
33	0.03	56.94	56.808	56.734	56.677	0.3888	0.3852	0.3810	6.0845	0.1503	1.7465	53.4200	0.1388
34	0.18	56.91	56.781	56.723	56.673	0.3865	0.3829	0.3787	6.0890	0.1504	1.7439	53.4200	0.1388
35	1.29	56.84	56.750	56.699	56.659	0.3848	0.3811	0.3767	6.0920	0.1504	1.7424	53.4200	0.1388
36	0.87	56.70	56.676	56.637	56.628	0.3828	0.3790	0.3746	6.0892	0.1504	1.7436	53.4200	0.1388
37	0.49	56.54	56.575	56.568	56.620	0.3795	0.3758	0.3719	6.0815	0.1504	1.7470	53.4200	0.1388
38	1.40	56.40	56.490	56.544	56.658	0.3753	0.3722	0.3691	6.0715	0.1504	1.7513	53.4200	0.1388
39	2.90	56.31	56.466	56.581	56.735	0.3717	0.3695	0.3670	6.0615	0.1506	1.7557	53.4200	0.1388
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
168	0.00	55.37	55.284	55.254	55.225	0.3011	0.2981	0.2947	6.4946	0.1513	1.6726	53.4200	0.1388

(6) プログラムリスト

```

      program kalman1th
c-----
c      損失項を含む1段タンク型貯留関数法+カルマンフィルター
c      による洪水予測計算（観測値は水位）
c      一本化したH-Q式を使用
c
c      kalman1th < data > out
c
c       $s = k1 \cdot q^{**}p1 + k2 \cdot d(q^{**}p2)/dt$ 
c       $ds/dt = r - q - b + q0$ 
c       $b = k3 \cdot q$ 
c       $q0 = qb \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$ 
c
c       $k1 = c1 \cdot A^{**}0.24$ 
c       $k2 = c2 + k1^{**}2 \cdot rr^{**}(-0.2648)$ 
c       $k3 = c3 - 1$ 
c      p1 = 0.6（固定）
c      p2 = 0.4648（固定）
c-----
c
c      character suikei*80, kasen*80, chiten*80, title*80
c
c      dimension x(7), x_prn(7)
c      dimension p1(5,5), p2(5,5), q(5,5), u1(5,5), u3(5,5)
c      dimension xex(5), plex(5,5), p2ex(5,5)
c      dimension p33(5,5), p3ex(5,5)
c      dimension qq(200), re(200), qbase(200), dis(24,200)
c      dimension r(200), qq0(200), hrea(200)
c      dimension xpr(24), sig(24,200)
c      dimension mdays(12)
c      dimension pr_b0(200), pr_b1(200)
c
c      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
c      common /st2/ h,h2,h3,h4
c      common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4
c      common /st4/ u_wc1,u_wc2,u_wc3
c      common /st5/ wb00, wb11
c      common /st6/ var_a0, var_a1, cov_a0a1
c      common /st7/ var_b0, var_b1, cov_b0b1
c
c      data mdays /31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31/
c
c      n=2          ! 更新する状態変量 x1,x2
c      np=3         ! c1,c2,c3 に関する配列
c      np2=2        ! b0,b1 に関する配列
c      iyoso=3      ! 予測時間幅
c      wp1=0.6      ! モデル定数 p1
c      zp2=0.4648   ! モデル定数 p2
c      wp2=1.0/zp2
c
c      n1=12        ! 計算時間間隔（1時間の分割数）
c      xn1=n1
c      h=1.0/xn1
c      h2=h**2
c      h3=h2*h
c      h4=h3*h
c

```

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

```

c
c*****
c データ読み込み開始
c   c11,c12,c13,平均雨量強度,減衰係数λ
c     read(5,'(5f8.0)') pa_c1,pa_c2,pa_c3,rah,ram
c
c   水系名
c     read(5,'(a80)') suikei
c
c   河川名
c     read(5,'(a80)') kasen
c
c   地点名
c     read(5,'(a80)') chiten
c
c   洪水名
c     read(5,'(a80)') title
c
c   流域面積、HWL、危険水位、警戒水位、指定水位
c     read(5,'(5f8.0)') area,hwl,xwl,dwl,swl
c
c   開始年、月、日、時
c     read(5,'(4i5)') iy,im,id,ih
c
c   降雨、水位データ数
c     read(5,'(2i5)') nr,nq
c
c   雨量
c     read(5,'(10f8.0)') (r(i),i=1,nr)
c
c   水位
c     read(5,'(10f8.0)') (hrea(i),i=1,nq)
c   H-Q式
c     read(5,'()')
c     read(5,'(2f12.0)') a00, a11
c     read(5,'(2f12.0)') b00, b11
c     pr_b0(1) = b00
c     pr_b1(1) = b11
c   H-Q式の分散等
c     read(5,'()')
c     read(5,'(3e12.0)') var_b0, var_b1, cov_b0b1
c
c     do j = 1, nq
c       qq0(j) = ( a00 + a11 * hrea(j) ) ** 2.0
c     end do
c   データ読み込み終了
c*****
c
c   wc1=pa_c1
c   wc2=pa_c2
c   wc3=pa_c3
c   wb00=b00
c   wb11=b11
c
c
c*****
c   ヘッダ部分出力開始
c     write(6,'(''地 点 名  : '' ,a80)') chiten
c     write(6,'(''開始時間  : '' ,i4,'''年'',i2,'''月'',
c       +               i2,'''日'',i2,'''時''')')iy,im,id,ih

```

```

write(6,('流域面積 : ',f8.2))area
write(6,('分割数(n1): ',i2))n1
write(6,('<---貯留指数---><---パラメータ初期値--->'))
write(6,('      p1      p2      c11      c12      c13'))
write(6,('2f8.4,3f8.3')) wp1, zp2, wc1, wc2, wc3
write(6,807)
807  format(/19x,'<----- 予測値 ----->',
+        ' <----- 標準偏差 ----->',
+        ' <----- モデル定数 ----->')
write(6,808)
808  format(' NO ',x,'雨量 実測値',3x,
&        '1 時間後',1x,'2 時間後',1x,'3 時間後',1x,2x,
&        '1 時間後',2x,'2 時間後',2x,'3 時間後',2x,
&        '      c11      c12      c13      b0      b1')
c ヘッダ部分出力終了
c*****
c
c
c
c      do i=1,nr
c        re(i)=r(i)
c      end do
c
c      do i=1,nq
c        qq(i)=3.6*qq0(i)/area ! qq(i) : 観測流出高
c      end do
c
c      ih=ih-1
c      if(mod(iy,4).eq.0) mdays(2)=29
c      if(iy.gt.1988) then
c        iy=iy-1988
c      else
c        iy=iy-1925
c      end if
c
c
c
c 初期値の設定
c      call input(x,p1,p2,p33,q,u1,u3,qq(1),hrea(1))
c
c q0 の算出
c      do ll=2,nq+iyoso
c        ex1 = exp(-ram*(ll-1))
c        ex2 = exp(-ram*(ll-2))
c        ex0 = ( ex1 + ex2 ) * 0.5
c        qbase(ll) = qq(1) * ex0
c      end do
c
c
c
c*****
c 計算開始
c*****
c      do 3000 ll=2,nq+1 ! ll は現在時刻のループ
c
c        do i = 1, n+np+np2
c          x_prn(i) = x(i)
c        end do
c
c
c        wk1 = x(3) * area**0.24
c        zk2 = x(4) * wk1**2.0 * rah**(-0.2648)
c        wk2 = 1.0 / zk2
c
c

```

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

```

C
C*****
C      予測計算開始
C*****
C
C      状態変量 X1(x1,x2)の保存
C      do i=1,n
C          xex(i)=x(i)
C      end do
C
C      X1 に関する (2*2)の分散・共分散の保存
C      do i=1,n
C          do j=1,n
C              p1ex(i,j)=p1(i,j)
C          end do
C      end do
C
C      X2 に関する (2*3)の分散・共分散の保存
C      do i=1,n
C          do j=1,np
C              p2ex(i,j)=p2(i,j)
C          end do
C      end do
C
C      X3 に関する (2*2)の分散・共分散の保存
C      do i=1,n
C          do j=1,np2
C              p3ex(i,j)=p33(i,j)
C          end do
C      end do
C
C      ..... iyoso-hour ahead prediction .....
C
C      do lt=1,iyoso
C          rain=0.0
C          if(l1+lt.le.nr) rain=re(l1+lt-1)
C          q_00 = qbase(l1+lt-1)
C
C      状態変量、誤差分散・共分散の伝達
C      do k=1,nl
C          call no2kal(q_00,x,p1,p2,p33,u1)
C      end do
C
C      予測水位
C      xpr(lt) = x(6) + x(7) * (area/3.6)**0.5
+      * x(1)**(0.5*wp2)
C      dis(lt,l1)=xpr(lt)
C
C      予測水位誤差分散
C      hh1 = x(7) * (area/3.6)**0.5 * 0.5*wp2
+      * x(1)**(0.5*wp2-1.0)
C      hh2 = 1.0
C      hh3 = (area/3.6)**0.5 * x(1)**(0.5*wp2)
C      varh = hh1**2.0 * p1(1,1)
+      + hh2**2.0 * u3(1,1)
+      + hh3**2.0 * u3(2,2)
+      + 2.0 * hh1 * hh2 * p33(1,1)
+      + 2.0 * hh1 * hh3 * p33(1,2)
+      + 2.0 * hh2 * hh3 * u3(1,2)
C      標準偏差算出

```

```

sig(lt,ll)=varh**0.5
c
c
c      end do

c*****
c      予測計算終了
c*****
c
c
c
c      z0=hrea(ll-1)
c      ih=ih+1
c      if(ih.gt.24) then
c          ih=1
c          id=id+1
c          if(id.gt.mdays(im)) then
c              id=1
c              im=im+1
c              if(im.gt.12) then
c                  im=1
c                  iy=iy+1
c              end if
c          end if
c      end if
c      end if

c
c
c*****
c      計算結果出力
c*****
c      write(6,809) ll-1,r(ll-1),z0,
c      &          (dis(i,ll),i=1,3),
c      &          (sig(i,ll),i=1,3),
c      &          (x_prn(i),i=3,7)
809  format(i3,f6.2,f8.2,2x,3f8.3,x,3f9.4,2x,5f8.4)
c
c      状態変量 X1(x1,x2)を元に戻す
c      do i=1,n
c          x(i)=xex(i)
c      end do

c
c      X1 に関する (2*2)の分散・共分散を元に戻す
c      do i=1,n
c          do j=1,n
c              p1(i,j)=p1ex(i,j)
c          end do
c      end do

c
c      X2 に関する (2*3)の分散・共分散を元に戻す
c      do i=1,n
c          do j=1,np
c              p2(i,j)=p2ex(i,j)
c          end do
c      end do

c
c      X3 に関する (2*2)の分散・共分散を元に戻す
c      do i=1,n
c          do j=1,np2
c              p33(i,j)=p3ex(i,j)
c          end do
c      end do

```

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

```

c      rain=0.0
c      if(l1+1 .le. nr) rain = re(l1)
c      q_00 = qbase(l1)
c
c      状態変量、誤差分散・共分散の伝達
c      do k=1,nl
c          call no2kal(q_00,x,p1,p2,p33,u1)
c      end do
c
c      P1 に乗算的ノイズを設定
c      do i=1,n
c          q(i,i)=(x(i)*alph1)**2 ! 観測誤差の分散 R (ck* $\alpha$  4)^2
c          p1(i,i)=p1(i,i)+q(i,i)
c      end do
c
c      z=hrea(l1) ! 現在時刻の観測水位
c
c      カルマンフィルターによる状態変量、誤差分散・共分散の更新
c      call no2upd(x,p1,p2,p33,u1,u3,z)
c
c      3000 continue
c      *****
c      計算終了
c      *****
c
c      stop
c      end
c
c
c      subroutine no2kal(q_00,x,p1,p2,p33,u1)
c      -----
c          s = k1*q**p1 + k2*d(q**p2)/dt
c
c          extrapolation equation of kalman filter
c          linearization of nonlinear vector equation
c          x(k+1) = phi*x(k) + gamma*d(k)
c      -----
c
c      dimension x(7),y(5),f(15),g(4),z(10)
c      dimension p1(5,5),p2(5,5),p3(5,5),p4(5,5)
c      dimension phi1(5,5),phi2(5,5)
c      dimension u1(5,5)
c      dimension p33(5,5)
c
c      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
c      common /st2/ h,h2,h3,h4
c
c      np=3 ! c11,c12,c13 に関する配列
c      np2=1 ! r に関する配列
c
c      .. 方程式の拡張部分を配列に割り当てる
c      z(1) = x(3) ! 状態変量 c11
c      z(2) = x(4) ! 状態変量 c12
c      z(3) = x(5) ! 状態変量 c13
c
c      cc1=0.0
c      cc2=0.0
c      cc3=0.0
c
c      y1=x(1)

```



```

      y2=x(2)
c
c.. 計算上の変数への割り当て
      if(y1.gt.0.0) then
        cc1=y1**(wp1*wp2-1.0) ! x1^(p1/p2-1)
        cc2=y1**(wp1*wp2-2.0) ! x1^(p1/p2-2)
        cc3=y1**(wp2-1.0)      ! x1^(1/p2-1)
      end if
      e1 = wk1*wk2*wp1*wp2 ! (k1/k2)*(p1/p2)
      e2 = wp1*wp2         ! p1/p2
c
c.. a21～a26 の計算
      a21 = -e1*(e2-1.0)*cc2*y2 - z(3)*wk2*wp2*cc3
      a22 = -e1*cc1
      a23 = (-wk2*e2*cc1*y2) * area**0.24
      a24 = wk2**2 * ( wk1*e2*cc1*y2 + z(3)*y1**wp2 - (rain+q_00) )
      +      * zk2/z(2)
      a25 = -wk2*y1**wp2
c.. d2 の計算
      d2 = e1*cc1*y2*(e2-1.0) + z(3)*wk2*y1**wp2*(wp2-1.0)
      +      + 2.0*(rain+q_00)*wk2
c
c.. 計算上の変数への割り当て
      a1 = a21 + a22**2.0
      a2 = 2.0*a21*a22 + a22**3.0
      bt1 = h/2.0 + a22*h2/6.0 + a1*h3/24.0
      bt2 = 1.0 + a22*h/2.0 + a1*h2/6.0 + a2*h3/24.0
c
c.. Φ、Γの要素の計算
      f(1) = 1.0 + a21*h*bt1 ! φ11
      f(2) = h*bt2           ! φ12
      f(3) = a21*f(2)         ! φ21
      f(4) = 1.0 + a22*h + a1*h2/2.0 + a2*h3/6.0 ! φ22
      +      + (a21*a1+a22*a2)*h4/24.0
c
      f(5) = a23*h*bt1 ! φ13
      f(6) = a24*h*bt1 ! φ14
      f(7) = a25*h*bt1 ! φ15
      f(8) = a23*h*bt2 ! φ23
      f(9) = a24*h*bt2 ! φ24
      f(10) = a25*h*bt2 ! φ25
c
      g(1) = h*bt1 ! γ12
      g(2) = f(2)  ! γ22
c
c Φ1、Φ2、Φ3 の配列への割り当て ( i:行、j:列 )
c ..... phi1(i,j) and phi2(i,j) matrices .....
      k=0
      do i=1,n
        do j=1,n
          k=k+1
          phi1(i,j)=f(k) ! Φ1...(2*2)行列
        end do
      end do
c
      k=4
      do i=1,n
        do j=1,np
          k=k+1
          phi2(i,j)=f(k) ! Φ2...(2*3)行列
        end do
      end do

```

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

```

        end do
    end do
c
c 状態変量の伝達方程式 (状態変量 x1,x2 の更新)
c ..... extrapolation of state variables .....
    do i=1,n
        y(i)=0.0
        do j=1,n
            y(i)=y(i)+phi1(i,j)*x(j)  !  $\phi_1$  の項
        end do
        do j=1,np
            y(i)=y(i)+phi2(i,j)*z(j)  !  $\phi_2$  の項
        end do
        y(i)=y(i)+g(i)*d2              !  $\gamma$  の項
    end do

c
    do i=1,n
        x(i)=y(i)                      ! 状態変量の更新
    end do

c
c エラー処理
c if(x(1).lt.0.0) x(1)=0.0

c 誤差分散・共分散行列の伝達方程式
c ..... extrapolation equation .....
c
c p1(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
c 行列演算： $\Phi_1^T P_1 \Phi_1$  ( $p_3$ ) の計算
c call mul31(2,2,2,2,phi1,p1,phi1,p3)
c
c 行列演算： $\Phi_1^T P_2 \Phi_2$  ( $p_4$ ) の計算
c call mul31(2,2,2,3,phi1,p2,phi2,p4)
c
    do i=1,n
        do j=i,n
            p3(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)
        end do
    end do

c
    do i=1,n
        do j=i,n
            p3(i,j)=p3(i,j)+p4(j,i)
        end do
    end do

c
c 行列演算： $\Phi_2^T U \Phi_2$  ( $p_4$ ) の計算
c call mul31(2,2,3,3,phi2,u1,phi2,p4)
c
    do i=1,n
        do j=i,n
            p1(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)  !  $P_1$ (更新値)(2*2)行列の計算
            if(i.ne.j) p1(j,i)=p1(i,j)
        end do
    end do

c
c p2(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
    do i=1,5
        do j=1,5

```

```

        p3(i,j) = 0.0
        p4(i,j) = 0.0
    end do
end do
c
c 行列演算： $\Phi^1 \cdot P_2$  の計算 (2*3)行列
call mul21(2,3,2,phi1,p2,p3)
c
c 行列演算： $\Phi^2 \cdot U$  の計算 (2*3)行列
call mul21(2,3,3,phi2,u1,p4)
c
do i=1,n
do j=1,np
    p2(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)    ! P2(更新値)(2*3)行列の計算
end do
end do
c
c p33(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
c 行列演算： $\Phi^1 \cdot P_3$  の計算 (2*2)行列
call mul21(2,2,2,phi1,p33,p3)
c
do i=1,n
do j=1,np2
    p33(i,j)=p3(i,j)          ! P3(更新値)(2*2)行列の計算
end do
end do
c
return
end
c
c
c
c subroutine no2upd(x,p1,p2,p33,u1,u3,z)
c -----
c         update equation of kalman filter
c -----
c
dimension x(1),p1(5,5),p2(5,5),u1(5,5)
dimension xm1(5),xm2(5),xm3(5),xkal(10)
dimension p3(5,5),p4(5,5)
dimension p33(5,5)
dimension u3(5,5)
dimension plbk(5,5),p2bk(5,5),p33bk(5,5)
dimension ubk(5,5),vbk(5,5)
dimension zm1(5,5),zm2(5,5),zm3(5,5)
dimension zm4(5,5),zm5(5,5),zm6(5,5)
c
common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4
c
n1=3  ! c11,c12,c13 に関する配列
n2=2  ! b0,b1 に関する配列
c
ck = x(6) + x(7) * (area/3.6)**0.5 * x(1)**(0.5*wp2)
c
err = z - ck
c
c 観測誤差分散
c
rq=(ck*alph4)**2
c
c h1 の計算

```

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

```

        hh1 = x(7) * (area/3.6)**0.5 * 0.5*wp2
        +      * x(1)**(0.5*wp2-1.0)
c      h2 の計算
        hh2 = 1.0
c      h3 の計算
        hh3 = (area/3.6)**0.5 * x(1)**(0.5*wp2)
c
c      ss1 の計算
        ss1 = hh1**2.0 * p1(1,1)
c      ss2 の計算
        ss2 = hh1 * hh2 * p33(1,1) + hh1 * hh3 * p33(1,2)
c      ss3 の計算
        ss3 = hh1 * hh2 * p33(1,1) + hh1 * hh3 * p33(1,2)
c      ss4 の計算
        ss4 = hh2**2.0 * u3(1,1)
        +      + 2.0 * hh2 * hh3 * u3(1,2)
        +      + hh3**2.0 * u3(2,2)
c      s の計算
        s = ss1 + ss2 + ss3 + ss4 + rq
c
c      カルマンゲイン K1, K2 の計算 (状態変数 x1,x2 に対するもの)
        do i=1,n
            xm1(i) = p1(i,1) * hh1
            *      + p33(i,1) * hh2
            *      + p33(i,2) * hh3
            xkal(i) = xm1(i) / s
        end do
c
c      カルマンゲイン K3～K5 の計算 (c11,c12,c13 に対するもの)
        do i=1,n1
            xm2(i) = p2(1,i) * hh1
            xkal(i+2) = xm2(i) / s
        end do
c
c      カルマンゲイン K6～K7 の計算 (b0,b1 に対するもの)
        xm3(1) = p33(1,1)*hh1 + u3(1,1)*hh2 + u3(1,2)*hh3
        xm3(2) = p33(1,2)*hh1 + u3(1,2)*hh2 + u3(2,2)*hh3
        do i=1,n2
            xkal(i+5) = xm3(i) / s
        end do
c
c      状態変数 x1,x2,c11,c12,c13,b0,b1 の更新
        do i=1,n+n1+n2
            x(i) = x(i) + xkal(i) * err
        end do
c
c      分散・共分散の保存
        do i = 1, n
            do j = 1, n
                p1bk(i,j) = p1(i,j)
            end do
            do j = 1, n1
                p2bk(i,j) = p2(i,j)
            end do
            do j = 1, n2
                p33bk(i,j) = p33(i,j)
            end do
        end do
        do i = 1, n1
            do j = 1, n1

```

```

        ubk(i,j) = u1(i,j)
    end do
end do
do i = 1, n2
    do j = 1, n2
        vbk(i,j) = u3(i,j)
    end do
end do
c
do i = 1, 5
    do j = 1, 5
        zm1(i,j) = 0.0
        zm2(i,j) = 0.0
        zm3(i,j) = 0.0
        zm4(i,j) = 0.0
        zm5(i,j) = 0.0
        zm6(i,j) = 0.0
    end do
end do
c
c マトリックスM1 の計算
c
    zm1(1,1) = 1.0 - hh1 * xkal(1)
    zm1(1,2) = 0.0
    zm1(2,1) = -hh1 * xkal(2)
    zm1(2,2) = 1.0
c
c マトリックスM2 の計算
c
    zm2(1,1) = -hh1 * xkal(3)
    zm2(2,1) = -hh1 * xkal(4)
    zm2(3,1) = -hh1 * xkal(5)
c
c マトリックスM3 の計算
c
    zm3(1,1) = -hh1 * xkal(6)
    zm3(2,1) = -hh1 * xkal(7)
c
c マトリックスM4 の計算
c
    zm4(1,1) = -hh2 * xkal(1)
    zm4(1,2) = -hh3 * xkal(1)
    zm4(2,1) = -hh2 * xkal(2)
    zm4(2,2) = -hh3 * xkal(2)
c
c マトリックスM6 の計算
c
    zm6(1,1) = 1.0 - hh2 * xkal(6)
    zm6(1,2) = -hh3 * xkal(6)
    zm6(2,1) = -hh2 * xkal(7)
    zm6(2,2) = 1.0 - hh3 * xkal(7)
c
c X1 に関する (2*2) の誤差分散・共分散 P1 の更新
c
    call mul21(2,2,2,zm1,p1bk,p3)
    call mul21t(2,2,2,zm4,p33bk,p4)
    do i=1,n
        do j=i,n
            p1(i,j) = p3(i,j) + p4(i,j)
            if( i. ne. j ) p1(j,i) = p1(i,j)
        end do
    end do
c
c X2 に関する (2*3) の誤差分散・共分散 P2 の更新
c
    call mul21(2,3,2,zm1,p2bk,p3)
    do i=1,n

```

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

```

      do j=1,n1
        p2(i,j) = p3(i,j)
      end do
    end do
c
c  X3 に関する (2*2) の誤差分散・共分散 P3 の更新
call mul21(2,2,2,zm1,p3bk,p3)
call mul21(2,2,2,zm4,vbk,p4)
do i=1,n
  do j=1,n2
    p33(i,j) = p3(i,j) + p4(i,j)
  end do
end do
c
c  パラメータの誤差分散・共分散 U3 の更新
do i=1,n1
  do j=i,n1
    u1(i,j) = zm2(i,1) * p2bk(1,j) + ubk(i,j)
    if( i. ne. j ) u1(j,i) = u1(i,j)
  end do
end do
c
c  回帰係数の誤差分散・共分散 U3 の更新
call mul21(2,2,2,zm6,vbk,p3)
do i=1,n2
  do j=i,n2
    u3(i,j) = zm3(i,1) * p33bk(1,j) + p3(i,j)
    if( i. ne. j ) u3(j,i) = u3(i,j)
  end do
end do
c
  return
end
c
c
c  subroutine mul31(np,n2,n3,n4,a,b,c,d)
c  -----
c      multiplication of matrices a, b, and ct
c  -----
c  dimension a(5,5),b(5,5),c(5,5),d(5,5)
c
  do 10 i=1,np
    do 10 j=1,n2
      d(i,j)=0.0
      do 12 k=1,n3
        do 12 l=1,n4
12 d(i,j)=d(i,j)+a(i,k)*b(k,l)*c(j,l)
10 continue
      return
    end do
  end do
c
c
c  subroutine mul21(np,n2,n3,a,b,c)
c  -----
c      multiplication of matrices a and b
c  -----
c  dimension a(5,5),b(5,5),c(5,5)
  do 10 i=1,np
    do 10 j=1,n2
      c(i,j)=0.0

```

```

      do 12 k=1,n3
12  c(i,j)=c(i,j)+a(i,k)*b(k,j)
10  continue
      return
      end

c
c
      subroutine mul21t(n1,n2,n3,a,b,c)
c
c -----
c           multiplication of matrices a and bt
c -----
css      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension a(5,5),b(5,5),c(5,5)
      do 10 i=1,n1
      do 10 j=1,n2
      c(i,j)=0.0
      do 12 k=1,n3
12  c(i,j)=c(i,j)+a(i,k)*b(j,k)
10  continue
      return
      end

c
c
      subroutine input(x,p1,p2,p33,q,u1,u3,qinit,hinit)
c
c -----
c           input data for implementing kalman filter
c           初期値の設定
c -----
      dimension x(1),p1(5,5),p2(5,5)
      dimension p33(5,5)
      dimension q(5,5),u1(5,5)
      dimension u3(5,5)

c
      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
      common /st2/ h,h2,h3,h4
      common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4
      common /st4/ u_wc1,u_wc2,u_wc3
      common /st5/ wb00, wb11
      common /st6/ var_a0, var_a1, cov_a0a1
      common /st7/ var_b0, var_b1, cov_b0b1

c
      alph1 = 0.10    ! システム誤差として x1 と x2 に乗ずる定数
      alph2 = 0.10    ! 初期値の誤差分散に乗ずる定数
      alph3 = 0.20    ! モデルパラメータの誤差分散に乗ずる定数

c
c 観測誤差として ck に乗ずる定数 α4 の設定
      alph4 = 0.1
      if( hinit. ge. 10.0 ) alph4 = 0.01
      if( hinit. ge. 100.0 ) alph4 = 0.001

c
      n1=3    ! c11,c12,c13 に関する配列
      n2=2    ! b0,b1 に関する配列

c
      do i=1,n+n1+n2
      x(i)=0.0
      end do

c
      x(1)=qinit**zp2    ! 状態変量 x1 の初期値
      x(2)=0.0          ! 状態変量 x2 の初期値

```

7. 水位～流量曲線($H \sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法

```

x(3)=wc1          ! 状態変量 x3 の初期値
x(4)=wc2          ! 状態変量 x4 の初期値
x(5)=wc3          ! 状態変量 x5 の初期値
x(6)=wb00         ! 状態変量 x6 の初期値
x(7)=wb11         ! 状態変量 x7 の初期値
c
do i=1,n
  do j=1,n
    p1(i,j) = 0.0          ! X1 に関する (2*2) の分散・共分散
  end do
end do
p1(1,1) = (alph2*x(1))**2.0 ! X1(x1) に関する (2*2) の分散・共分散
p1(2,2) = (alph2*x(1))**2.0 ! X1(x2)          "
c
do i=1,n
  do j=1,n1
    p2(i,j) = 0.0          ! X2 に関する (2*3) の分散・共分散
  end do
end do
c
do i=1,n
  do j=1,n2
    p33(i,j) = 0.0 ! X3 に関する (2*2) の分散・共分散
  end do
end do
c
do i=1,n
  do j=1,n
    q(i,j) = 0.0 ! システム誤差 分散・共分散
  end do
end do
c
do i=1,n1
  do j=1,n1
    u1(i,j) = 0.0 ! U のパラメータ誤差 分散・共分散
  end do
end do
c
u1(1,1)=(wc1*0.2)**2
u1(2,2)=(wc2*0.2)**2
u1(3,3)=(wc3*0.2)**2
c
do i=1,n2
  do j=1,n2
    u3(i,j) = 0.0 ! V のパラメータ誤差 分散・共分散
  end do
end do
u3(1,1) = var_b0 ! b0 の誤差分散
u3(2,2) = var_b1 ! b1 の誤差分散
u3(1,2) = cov_b0b1 ! b0,b の誤差共分散
u3(2,1) = u3(1,2)
c
return
end

```


8. 地下水流出成分を含む貯留関数法（2段タンク型貯留関数モデル）の最適化手法

8.1 流出成分フィルター分離 AR 法の特徴¹⁰⁾

第3章においては、事前に有効雨量の算出を必要としない損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）を用いた洪水予測手法について述べた。しかしながら、1段タンク型貯留関数モデルを数多くの洪水例に適用した結果を総合するとピーク流量が過少に計算される傾向にある。また、以下の条件下での多くの事例において計算洪水ハイドログラフの再現性がよくないことが判明した⁹⁾。

- (a) 火山灰土壌が広域にわたって分布し、浸透性が高い流域では、損失及び遅れて流出してくる成分を正しく表現できるようなモデル構成でなければ、洪水ハイドログラフ全体の形状特性、とくに、ハイドログラフ低減曲線部の再現がよくない。
- (b) 長期にわたって断続的な降雨が続く、流域の保水性が高くなっている場合、その影響を正確に評価することができなければ、その後の集中豪雨に対する出水特性がうまく再現できない。

我々は、概念的に全流出は比較的早く流出してくる「表面・中間流出成分」と長時間かけて流出してくる「地下水流出成分」に分離されることは衆知している。日野・長谷部¹⁰⁾は「フィルター分離 AR 法」を用いて、観測流出量を客観的に（あるいは数学的に）「表面・中間流出成分」と「地下水流出成分」に分離する手法を提案している。しかもこの方法は、2つの流出成分を線形微分方程式で表わすことによって、2成分への降雨入力を逆推定できる特徴を持っている。

従来の貯留関数法は有効雨量を用いるために、「表面・中間流出成分」の解析に主眼をおいた手法と言える。一方、上述した洪水事例に含まれる問題点を解決するためには、どうしても「地下水流出成分」を表現できるようなモデル導入が必要となってくる。**本章**では、日野・長谷部によって提案された「フィルター分離 AR 法」を用いることによって、地下水流出成分のモデル定数を確定値として算定する近似解法を提案している。

従来の「地下水流出成分を含む貯留関数法」では^{8,9)}、「フィルター分離 AR 法」を適用して、ハイドログラフの低減部から求めた分離時定数 T_c と減衰係数 δ (通常 2.0~3.0)を用いて、まず「地下水流出成分」を求め、「表面・中間流出成分」を分離したのち、表面・中間流出成分に含まれる3個のモデル定数のみについて最適化を行っている。その最適化結果から求められる浸透供給量を入力として、地下水流出成分を再計算し、全流出量のハイドログラフを再現している。したがって、この最適化手法は「地下水流出成分」のモデル定数の最適化を行わない簡易法と言える。

本章では、1段目タンクのモデル定数の「地下水流出成分（2段目タンク）」に及ぼす影響（感度係数と言われる）をも考慮して、全流出量に関するモデル定数の最適化を試み、ハイドログラフ全体の再現性向上を図った。以降に述べる最適化手法を既往洪水資料に適用すれば、「地下水流出成分を含む貯留関数法」のモデル定数が容易に同定される。

8.2 2段タンク型貯留関数モデルによる計算手法

「フィルター成分分離法」では、「表面・中間流出成分」と「地下水流出成分」を線形モデルで表現しているが、本報告モデルでは1段目タンクを表面・中間流出成分の再現に有効な次式の非線形モデルを用いる（**図8.1**参照）。

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{dt} = r - q_1 - b \\ s_1 = k_{11}q_1^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ b = k_{13}q_1 = (c_{13} - 1)q_1 \end{cases} \quad (8.1)$$

ここで、 s_1 : 1 段目タンク貯留高(mm)、 r : 観測雨量(mm/h)、 q_1 : 表面・中間流出高(mm/h)、 b : 1 段目タンクから 2 段目タンクへの浸透供給量(mm/h)、 k_{11}, k_{12} : 貯留係数、 k_{13}, c_{13} : 浸透係数、 p_1, p_2 : 貯留指数

1 段目の損失 b は浸透供給量として、すべて 2 段目タンクへの入力とした。また、 p_1 と p_2 については表面流にマニング則を用い、以下の値に固定した。

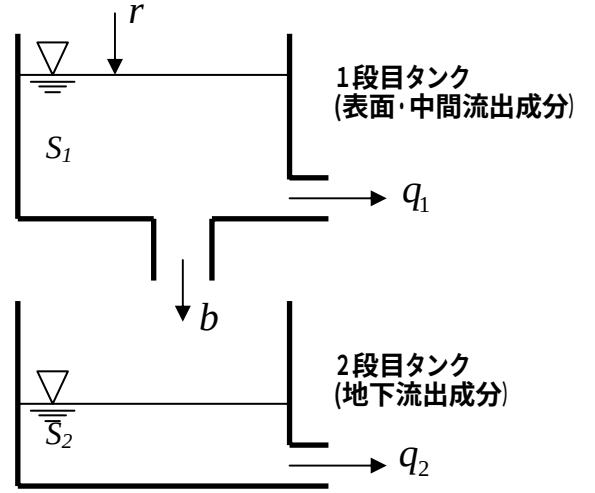


図8.1 2段タンク型貯留関数法モデル

$$\begin{cases} p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648} \end{cases} \quad (8.2)$$

ここで、 A : 流域面積(km^2)、 $\bar{r}$: 平均雨量強度(mm/h)、 c_{11}, c_{12} : 未知定数

次に 2 段目タンクは、地下水流出成分を次式の線形モデルで表現した。

$$\begin{cases} s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} = b - q_2 \end{cases} \quad (8.3)$$

ここで、 s_2 : 2 段目タンク貯留高(mm)、 k_{21}, k_{22} : 貯留係数、 q_2 : 地下水流出高(mm/h)

1 段目（表面・中間流出成分）の流出高 q_1 と 2 段目（地下水流出成分）の流出高 q_2 を合計して全流出高 q とする。

$$q = q_1 + q_2 \quad (8.4)$$

8.3 地下水流出成分のモデル定数設定

流出成分の分離は、日野・長谷部によって提案された「フィルター成分分離法」を用いて表面・中間流出成分と地下水流出成分に分離する。

日野らはフィルター成分分離法による地下水流出成分を線形方程式で表現可能であるとし、次式で表現した。

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c_1 \frac{dq_2}{dt} + c_0 q_2 = c_0 q \quad (8.5)$$

ここで、 q_2 ：地下水流出成分流量、 q ：全流出量
 c_0 と c_1 は次式で与えられる。

$$c_0 = (\delta / T_c)^2, \quad c_1 = \delta^2 / T_c \quad (8.6)$$

T_c は、ハイドログラフの低減部より決定される定数である。減衰係数 δ は、通常 2.0～3.0 の値となるが、本報告では $\delta=2.1$ とした。

式(8.3)に示される地下水流出成分の未知定数は k_{21} と k_{22} の2つである。これらの定数は、以下の方法により算出される。貯留関数による地下水流出成分を表す式(8.3)は、以下のように変形される。

$$\frac{ds_2}{dt} = k_{21} \frac{dq_2}{dt} + k_{22} \frac{d^2 q_2}{dt^2} = b - q_2 \quad (8.7)$$

すなわち、

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c'_1 \frac{dq_2}{dt} + c'_0 q_2 = c'_0 b \quad (8.8)$$

ここに、

$$c'_1 = \frac{k_{21}}{k_{22}}, \quad c'_0 = \frac{1}{k_{22}} \quad (8.9)$$

フィルター成分分離法による線形方程式(8.5)と貯留関数法による線形方程式(8.8)は同じ表現になっており、全流出量 q が浸透供給量 b に置き換わっているだけである。

2式の間係数を調べるために、式(8.8)に式(8.1)と式(8.4)を代入すると、式(8.10)が得られる。

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c'_1 \frac{dq_2}{dt} + c'_0 (1 + k_{13}) q_2 = c'_0 k_{13} q \quad (8.10)$$

式(8.10)の定数項部分に式(8.9)の関係式を代入すると、以下の式が得られる。

$$c'_0 (1 + k_{13}) = \frac{1 + k_{13}}{k_{22}}, \quad c'_0 k_{13} = \frac{k_{13}}{k_{22}} \quad (8.11)$$

既往洪水の解析結果によれば、 $k_{22} \gg 1$ であることから、 $1/k_{22} \approx 0$ とみなすことができる。したがって、近似的に次式が成り立つと考えられる。

$$c'_0(1+k_{13}) \approx c'_0 k_{13} \quad (8.12)$$

以上の仮定のもとに、式(8.5)と式(8.10)が等価であるとするとき、定数間に次の関係式が成立する。

$$\begin{cases} c'_1 = c_1 \\ c'_0(1+k_{13}) \approx c'_0 k_{13} = c_0 \end{cases} \quad (8.13)$$

式(8.9)を式(8.13)に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{k_{21}}{k_{22}} = c_1, \quad \frac{k_{13}}{k_{22}} = c_0 \quad (8.14)$$

上式より、モデル定数は式(8.15)で求められる。

$$k_{21} = c_1 k_{22}, \quad k_{22} = k_{13} / c_0 \quad (8.15)$$

もちろん、式(8.13)からも次式が成立している。

$$c'_1 = c_1, \quad c'_0 = \frac{c_0}{k_{13}} \quad (8.16)$$

すなわち、地下水流出成分のモデル定数は、式(8.6)に示される確定値と1段目タンクの未知浸透係数 k_{13} の関数で与えられることがわかる。

8.4 流出成分の数値解法

1段目のタンクの解法にあたって、次の変数変換を行う。

$$y_1 = q_1^{p_2}, \quad y_2 = \frac{d}{dt} (q_1^{p_2}) \quad (8.17)$$

その結果、式(8.1)は以下のように表現される。

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (8.18)$$

式(8.18)の未知定数は k_{11} , k_{12} , c_{13} ($=k_{13}+1$) の3つであり、これらの定数の最適化にはニュートン法を用いた。

式(8.18)はさらに式(8.19)のようにベクトル表示できる。

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \quad (8.19)$$

ここに、

$$Y = [y_1 \ y_2]^T \quad (8.20)$$

$$F(Y) = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

$$f_1(y_1, y_2) = y_2 \quad (8.22)$$

$$f_2(y_1, y_2) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \quad (8.23)$$

2 階非線形方程式(8.19)を近似線形化する。1 ステップ前における Y の値を Y^* とし、 $F(Y)$ を 1 次の項まで Taylor 級数展開した式を用いると、式(8.19)は式(8.25)に変換される。

$$F(Y) = F(Y^*) + A(Y^*)(Y - Y^*) \quad (8.24)$$

$$\frac{dY}{dt} = A(Y^*)Y + B(Y^*) \quad (8.25)$$

ここに、

$$A(Y^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

$$a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{p_1/p_2-2} (y_2^*) - \frac{c_{13}}{k_{12} p_2} (y_1^*)^{1/p_2-1} \quad (8.27)$$

$$a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (y_1^*)^{p_1/p_2-1} \quad (8.28)$$

$$B(Y^*) = F(Y^*) - A(Y^*)Y^* = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \end{bmatrix}^T \quad (8.29)$$

$$b_2 = \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{p_1/p_2-1} (y_2^*) + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \quad (8.30)$$

式(8.25)を数値計算の便宜上、離散化方程式に変換する。

$A(Y^*)$ と $B(Y^*)$ が定係数行列の時、 k を任意のタイム・ステップとして、式(8.25)は差分方程式

(8.31)に変換できる。

$$Y_{k+1} = \Phi Y_k + \Gamma B_k \quad (8.31)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_k = [y_1 \quad y_2]_k^T, \quad B_k = [0 \quad b_2]_k^T \\ \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (8.32)$$

なお、 Φ および Γ は次の級数和で求められる。

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{AT} \\ &= I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \dots + \frac{1}{m!}(AT)^m \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= (e^{AT} - I)A^{-1} \\ &= T \left(I + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 + \dots + \frac{1}{m!}(AT)^{m-1} \right) \end{aligned} \quad (8.34)$$

ここで、 I ：単位行列、 T ：計算時間間隔

通常、級数は第5項まで展開すれば十分なので、 $m=4$ としたときの Φ および Γ の要素を求めると、その要素は次式で与えられることがわかる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{11} = 1 + \frac{1}{2}a_1 T^2 + \frac{1}{6}a_1 a_2 T^3 + \frac{1}{24}a_1 a_3 T^4 \\ \phi_{12} = T \left(1 + \frac{1}{2}a_2 T + \frac{1}{6}a_3 T^2 + \frac{1}{24}a_2 a_4 T^3 \right) \\ \phi_{21} = a_1 \phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_2 T + \frac{1}{2}a_3 T^2 + \frac{1}{6}a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{24}(a_1 a_3 + a_2^2 a_4) T^4 \end{array} \right. \quad (8.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} = T \left(1 + \frac{1}{6}a_1 T^2 + \frac{1}{24}a_1 a_2 T^3 \right) \\ \gamma_{12} = T^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_2 T + \frac{1}{24}a_3 T^2 \right) \\ \gamma_{21} = a_1 \gamma_{12} \\ \gamma_{22} = \phi_{12} \end{array} \right. \quad (8.36)$$

ここに、

$$a_3 = a_1 + a_2^2, \quad a_4 = a_1 + a_3 \quad (8.37)$$

所要流出高 q_1 は、漸化式(8.31)により任意のタイム・ステップ k における $y_1 = q_1^{p_2}$ と $y_2 = d(q_1^{p_2})/dt$ の値が逐次計算されるので、式(8.17)を用いて次のように求められる。

$$q_1 = y_1^{1/p_2} \quad (8.38)$$

さらに、 k_{21} と k_{22} を用いた 2 段目のタンクの解法にあたっては、式(8.3)に関して次の変数変換を行う。

$$y_3 = q_2, \quad y_4 = \frac{dq_2}{dt} \quad (8.39)$$

この時、式(8.3)は以下のように表現される。

$$\begin{cases} \frac{dy_3}{dt} = y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} = -\frac{1}{k_{22}} y_3 - \frac{k_{21}}{k_{22}} y_4 + \frac{b}{k_{22}} \end{cases} \quad (8.40)$$

ここで、式(8.40)の係数に式(8.15)と式(8.16)の関係式を代入すれば、式(8.40)は以下のように表現される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c'_0 & -c'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c'_0 b \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

式(8.40)は式(8.25)と同一の式形になることから、その数値解法も式(8.25)の解法に準拠すればよい。

したがって、**図 8.1**に示される 2 段タンク型の非線形貯留関数モデルを想定する場合、未知定数 $c_{11}, c_{12}, c_{13}, k_{21}, k_{22}$ の 5 個のうち、最適化が必要となるのは、 c_{11}, c_{12}, c_{13} の 3 個だけとなり、モデル定数の最適化を行う計算負担が大幅に軽減される。

8.5 全流出量に関する感度係数の算出

本報告モデルの特徴として、全流出量に対するモデル定数の最適化を図ることがあげられる。このため、 $k_{11}, k_{12}, c_{13} (=k_{13}+1)$ についての全流出量の感度係数を求めることが必要となる。

ここで、定数からなるベクトルを K とおくと、

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & c_{13} \end{bmatrix}^T \quad (8.42)$$

式(8.4)より全流出量の感度係数ベクトルは次式で表される。

$$\frac{\partial q}{\partial K} = \frac{\partial q_1}{\partial K} + \frac{\partial q_2}{\partial K} \quad (8.43)$$

まず、1段目タンクの感度係数の算定を行う。

モデル定数ベクトル K に関する y_1 と y_2 の感度係数を求めるために、定数が時間的に変化しないことを考慮して、式(8.18)をモデル定数 k_{11} , k_{12} , c_{13} で微分すれば式(8.44)となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \right) = \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial y_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial y_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \right) = \frac{\partial y_2}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} \right) = \frac{\partial y_2}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_2}{\partial k_{11}} \right) = \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(-\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \right) \\ \quad = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{p_1/p_2-2} y_2 \frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \\ \quad \quad - \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} \frac{\partial y_2}{\partial k_{11}} - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_2}{\partial k_{12}} \right) = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{p_1/p_2-2} y_2 \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \\ \quad \quad - \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} \frac{\partial y_2}{\partial k_{12}} + \frac{c_{13}}{k_{12}^2} y_1^{1/p_2} - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} - \frac{r}{k_{12}^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_2}{\partial c_{13}} \right) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{p_1/p_2-2} y_2 \frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} - \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} \frac{\partial y_2}{\partial c_{13}} \\ \quad \quad - \frac{1}{k_{12}} y_1^{1/p_2} - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} \end{array} \right. \quad (8.44)$$

この時、式(8.44)は以下のように行列表現される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial c_{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial c_{13}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 \\ \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 + \frac{c_{13}}{k_{12}^2} y_1^{1/p_2} - \frac{r}{k_{12}^2} \\ -\frac{1}{k_{12}} y_1^{1/p_2} \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

ここに、

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) y_1^{p_1/p_2-2} y_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \\ a_2 = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} \end{cases} \quad (8.46)$$

ここで、式(8.46)は式(8.27)及び式(8.28)と同じ係数から成る。式(8.26)と式(8.45)の右辺第一項の係数を比較すると、その要素配列が同一である。感度係数においては、式(8.45)の行列は式(8.26)と同じ要素をもつ対角行列になっている。したがって、感度方程式の解法にあたっては、システム方程式に用いた同じ係数を反復して使用することができる。このため、システム方程式の次数が高く、しかも同定すべきモデル定数が多くなっても、計算を容易に行うことができる。また、式(8.45)の解法の詳細に関しては、参考文献 5)を参照されたい。

さらに、 q_1 に関する感度係数は式(8.38)を用いて、式(8.47)により算出可能となる。

$$\begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (8.47)$$

同様に、2段目タンクの感度係数の算定を行う。

モデル定数ベクトル K に関する y_3 と y_4 の感度係数を求めるために、定数が時間的に変化しないとして、式(8.41)をモデル定数 k_{11} , k_{12} , c_{13} で微分すれば式(8.48)となる。

$$\begin{cases}
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_3}{\partial k_{11}} \right) = \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial y_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial y_4}{\partial k_{11}} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_3}{\partial k_{12}} \right) = \frac{\partial y_4}{\partial k_{12}} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_3}{\partial c_{13}} \right) = \frac{\partial y_4}{\partial c_{13}} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_4}{\partial k_{11}} \right) = \frac{\partial}{\partial k_{11}} (-c'_0 y_3 - c'_1 y_4 + c'_0 b) \\
 \quad = -c'_0 \frac{\partial y_3}{\partial k_{11}} - c'_1 \frac{\partial y_4}{\partial k_{11}} + c'_0 \frac{\partial b}{\partial k_{11}} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_4}{\partial k_{12}} \right) = -c'_0 \frac{\partial y_3}{\partial k_{12}} - c'_1 \frac{\partial y_4}{\partial k_{12}} + c'_0 \frac{\partial b}{\partial k_{12}} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y_4}{\partial c_{13}} \right) = -c'_0 \frac{\partial y_3}{\partial c_{13}} - c'_1 \frac{\partial y_4}{\partial c_{13}} + c'_0 \frac{\partial b}{\partial c_{13}} - \frac{\partial c'_0}{\partial c_{13}} (y_3) + \frac{\partial c'_0}{\partial c_{13}} (b)
 \end{cases} \quad (8.48)$$

式(8.48)中の $\partial c'_0 / \partial c_{13}$ は式(8.16)と $c_{13} = k_{13} + 1$ の関係式から、以下のように計算される。

$$\frac{\partial c'_0}{\partial c_{13}} = -\frac{c_0}{(c_{13} - 1)^2} \quad (8.49)$$

この時、式(8.48)は以下のように行列表現される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial y_3}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial y_3}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial y_4}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial y_4}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial y_4}{\partial c_{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c'_0 & 0 & 0 & -c'_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c'_0 & 0 & 0 & -c'_1 & 0 \\ 0 & 0 & -c'_0 & 0 & 0 & -c'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_3}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial y_3}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial y_3}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial y_4}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial y_4}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial y_4}{\partial c_{13}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c'_0 \frac{\partial b}{\partial k_{11}} \\ c'_0 \frac{\partial b}{\partial k_{12}} \\ c'_0 \frac{\partial b}{\partial c_{13}} - \frac{\partial c'_0}{\partial c_{13}} (y_3 - b) \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

式(8.50)は式(8.45)と同形であり、その解法にあたっては、式(8.45)の解法に準拠すればよい。

ここで、式(8.50)中の b に関する感度係数は式(8.1)から、次式で容易に算定される。

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial k_{11}} = (c_{13} - 1) \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial b}{\partial k_{12}} = (c_{13} - 1) \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial b}{\partial c_{13}} = q_1 + (c_{13} - 1) \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (8.51)$$

また、式(8.50)に含まれる b と $y_3 = q_2$ の値は、それぞれ、式(8.18)と式(8.41)を解くことにより求められる。

さらに、式(8.39)により q_2 に関する感度係数は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} = \frac{\partial y_3}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} = \frac{\partial y_3}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial q_2}{\partial c_{13}} = \frac{\partial y_3}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (8.52)$$

以上より、1段目タンクと2段目タンクの感度係数が求められたので、式(8.47)と式(8.52)を式(8.43)に代入すれば、全流出量に関する感度係数が算出される。

定数 k_{11} と k_{12} のオーダーが違うので、 c_{11} と c_{12} の係数について最適化を行うこととする。このとき、式(8.2)の関係式を用いると、これらの感度係数は次式で算出される。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial c_{11}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{11}} = (A^{0.24}) \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_{12}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{12}} = \left[k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \right] \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_{13}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (8.53)$$

8.6 モデル定数の最適化

モデル定数の最適化には、観測流量 q_i^* と計算流量 $q_i(c_{11}, c_{12}, c_{13})$ の誤差 2 乗和 $e_i^2(c_{11}, c_{12}, c_{13})$ をできるだけ小さくするようなカイ 2 乗誤差基準を用い、次の目的関数 $J(c_{11}, c_{12}, c_{13})$ を設定した。

$$\text{Min}_C J = \sum_{i=1}^N \frac{[q_i^* - q(C)]^2}{q_i^*} = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (8.54)$$

ここで、 N = 流量標本数（流量データ数）, $C = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]^T$

また、誤差項は次式で与えられる。

$$e_i = \frac{q_i^* - q_i(C)}{\sqrt{q_i^*}} \quad (8.55)$$

次に誤差項における感度係数は式(8.55)より

$$\frac{\partial e_i}{\partial C} = -\frac{1}{\sqrt{q_i^*}} \frac{\partial q_i(C)}{\partial C} = -W_i \quad (8.56)$$

定数ベクトルを以下のように定義する。

$$[C]^{m+1} = [C]^m + [\Delta C] \quad (8.57)$$

ここに、 m はニュートン法における繰り返し計算ステップを表し、補正項ベクトル ΔC は次式で更新される。

$$[W^T W] \Delta C = [W^T E] \quad (8.58)$$

ここで、 ΔC : (3×1) 行列からなる c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の補正項, W : $(N \times 3)$ 行列からなる式(8.56)の感度係数, E : $(N \times 1)$ 行列からなる式(8.55)の誤差系列

式(8.58)の解法には成分回帰分析手法を用いる。参考文献 5)を参照されたい。

8.7 適用例

実流域における計算手順を記述し、モデル定数の同定過程及び計算ハイドログラフの再現性を検証する。対象計算流域は、後志利別川の今金地点（流域面積 361.4km²）であり、過去の洪水8ケースについて再現計算を行った。

(1) モデル定数初期値と計算条件の設定

表8.1には、地下水流出成分の計算に必要な分離時定数 T_c と減衰係数 δ が示されている。また、繰り返し計算時のモデル定数初期値も示されている。

表8.1 モデル定数初期値と定数の設定

c_{11}	c_{12}	c_{13}	δ	T_c
5.000	0.050	1.500	2.1	53.25

計算手順は図8.2に示すフローチャートの通りであり、感度係数を解析的に求めることにより、3個のモデル定数をニュートン法により最適化計算を行うことができた。

一般に流出解析を行う場合、ハイドログラフの低減部から求められる T_c の値は個人差が現れやすく、経験の浅い技術者にとっては決定するのが難しい。また、短期間に複数のピークを持つ洪水が発生する場合、的確な T_c の値を求めることは極めて困難である。 T_c の値は、地下水流出特性を規定する重要なモデル定数であり、河川流域毎にある一定範囲の値をとるものと想定される。分離時定数 T_c の値とモデル定数 c_{13} は地下水流出量に大きく影響を及ぼすことから、 T_c の値を流域固有な値として与えた。また、本報告では、定数 c_{13} の最適値探索を行っており、浸透供給量と地下水流出量が自動調整され、全流出量が計算されるので、 T_c の値として過去の洪水例から固定値を用いて解析を行うことがより実用的な方法と考えられる。そこで、文献5)に示される今金観測所地点における平均値 53.25 を固定値として採用し、 δ は2.1を用いた。

表8.2に、過去の洪水8ケースの中で例として、今金地点における昭和49年8月26日洪水の洪水データを示す。

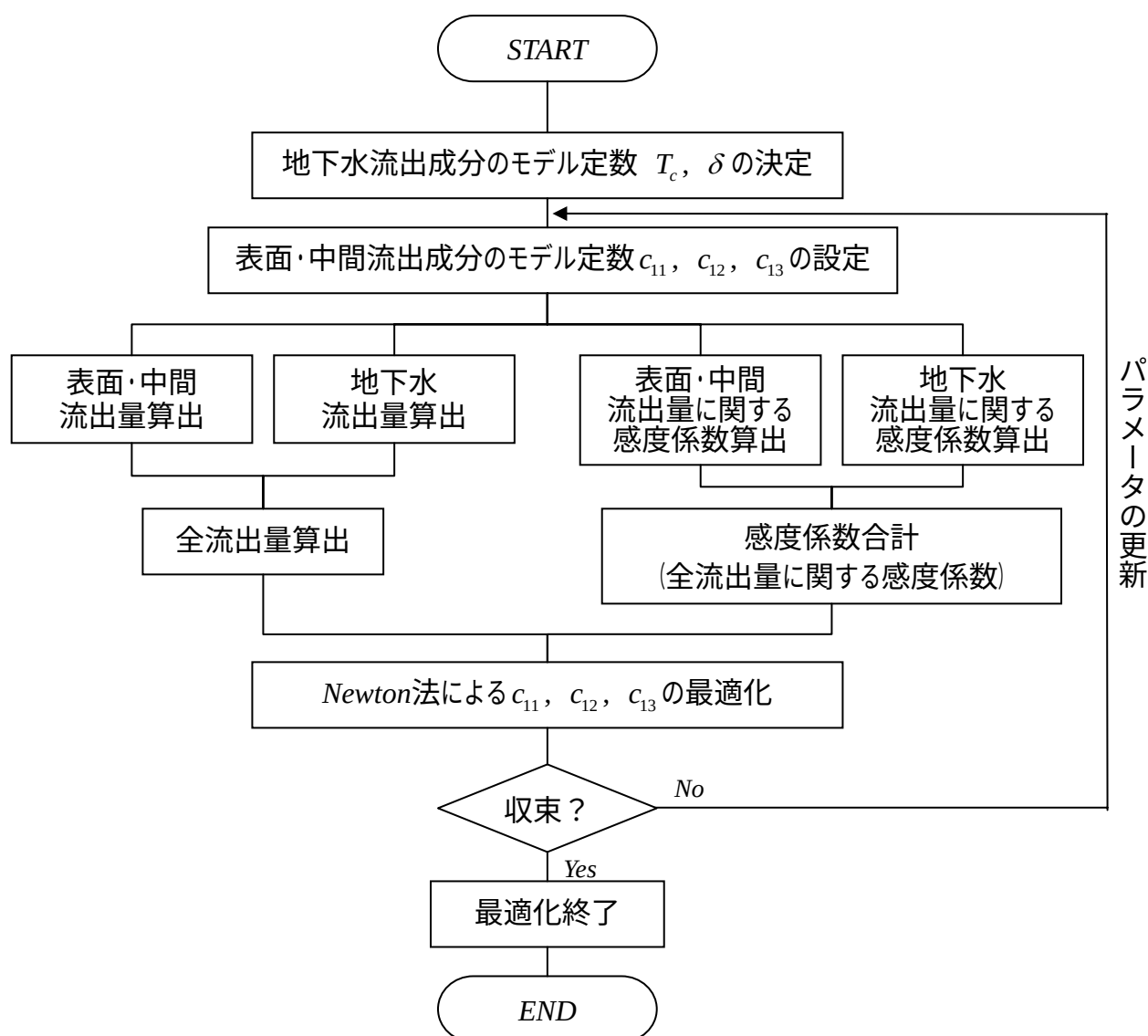


図8.2 計算フローチャート

表8.2 解析対象洪水データ一覧表

地点名 : 今金地点 (流域面積: 361.4km²)

洪水期間: 昭和 49 年 8 月 25 日 18:00~28 日 9:00

時間	雨量	流出高	流量	時間	雨量	流出高	流量
	(mm/h)	(mm/h)	(m ³ /s)		(mm/h)	(mm/h)	(m ³ /s)
1	0.08	0.19	18.87	33	0.00	0.56	56.61
2	0.13	0.19	18.87	34	0.00	0.55	55.47
3	0.83	0.19	18.87	35	0.00	0.55	54.72
4	3.88	0.19	18.87	36	0.00	0.54	53.72
5	13.79	0.21	20.68	37	0.00	0.52	51.75
6	29.83	0.36	36.48	38	0.00	0.48	47.92
7	12.07	0.75	75.72	39	0.17	0.47	46.99
8	4.48	1.65	165.95	40	0.00	0.45	45.14
9	5.94	1.90	190.27	41	0.00	0.45	45.14
10	4.36	1.80	180.96	42	0.00	0.45	45.14
11	0.31	2.07	207.42	43	0.00	0.43	43.34
12	0.41	2.18	218.51	44	0.00	0.43	43.34
13	0.23	1.91	191.32	45	0.00	0.43	43.34
14	0.13	1.70	170.88	46	0.00	0.41	40.70
15	0.00	1.46	146.94	47	0.00	0.41	40.70
16	0.25	1.29	129.10	48	0.00	0.39	38.99
17	0.00	1.11	111.60	49	0.00	0.38	38.14
18	0.00	1.00	100.64	50	0.00	0.38	38.14
19	0.15	0.91	91.70	51	0.00	0.37	37.31
20	0.00	0.84	84.57	52	0.00	0.37	37.31
21	0.32	0.79	79.07	53	0.00	0.36	36.48
22	0.00	0.74	74.41	54	0.00	0.36	36.48
23	0.31	0.72	71.81	55	0.00	0.36	36.48
24	0.82	0.67	67.37	56	0.00	0.36	36.48
25	2.31	0.66	66.13	57	0.00	0.36	36.48
26	1.14	0.65	65.51	58	0.00	0.36	36.48
27	1.01	0.63	63.08	59	0.00	0.36	36.48
28	0.48	0.62	61.87	60	0.00	0.36	35.67
29	0.00	0.60	60.68	61	0.00	0.36	35.67
30	0.00	0.60	60.09	62	0.00	0.36	35.67
31	0.00	0.59	59.51	63	0.00	0.36	35.67
32	0.00	0.58	57.76	64	0.00	0.25	25.22

(2) 最適化計算結果

表 8.3 には 8 洪水例のモデル定数最適値とそのときの精度評価値が示されている。表中に示される J_{PE} と J_{RE} は、それぞれピーク相対誤差とハイドログラフ相対誤差であり次式で計算される。

$$J_{PE} = \frac{|q_p^* - q_p|}{q_p^*} \quad (8.59)$$

$$J_{RE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|q_{si}^* - q_{si}|}{q_{si}^*} \quad (8.60)$$

ここに、 q_p^* : 観測ピーク流出高(mm/h)、 q_p : 計算ピーク流出高(mm/h)、 q_{si}^* : 観測流出高(mm/h)、 q_{si} : 計算流出高(mm/h)、 N : 流量データ数

各モデル定数の平均値は、 c_{11} が 6.85、 c_{12} が 0.36、 c_{13} が 2.45 となっており、ピーク相対誤差 (J_{PE}) は最大で 28%、平均で 14%、ハイドログラフ相対誤差 (J_{RE}) は最大で 21%、平均で 14% と良好な結果が得られた。

表 8.3 解析結果一覧表 [後志利別川今金地点 (361.4km²)]

対象洪水	c_{11}	c_{12}	c_{13}	J_{PE}	J_{RE}
S38.7.17	7.08	0.52	3.08	0.12	0.17
S44.8.31	4.67	0.51	1.55	0.01	0.21
S49.8.26	9.62	0.13	3.55	0.06	0.12
S50.8.23	7.81	0.32	3.08	0.17	0.07
S53.5.09	9.05	0.17	1.65	0.19	0.11
S55.8.31	4.94	0.56	1.76	0.08	0.11
S58.8.19	5.64	0.22	1.81	0.19	0.13
S62.7.12	5.98	0.43	3.08	0.28	0.21
平均値	6.85	0.36	2.45	0.14	0.14

次に、図 8.3 から図 8.6 に流出解析計算結果によるハイドログラフを示す。図 8.3 と図 8.4 はピーク流出量までの立ち上がり早いケースであり、両ケースともに、ピーク部と減水部を精度良く再現している。図 8.5 と図 8.6 は降雨が長期にわたり、ピーク流出量に至るまでの時間経過が長い例であるが、この場合も立ち上がり部、ピーク部、減水部において十分な再現性を有している。

ここで、表 8.2 に示す洪水データ例と同じように今金地点昭和 49 年 8 月 26 日洪水を例として、モデル定数の収束するまでの同定過程を表 8.4 に示す。この例では、8 回の繰り返し計算で最適値が得られていることがわかる。表 8.5 には、繰り返し計算終了時のモデル定数同定値及び実測値と再現値の比較が示されている。また、最適値を用いた計算流量（地下水流出量を含む）と実測流量を比較して表 8.6 に示す。

8. 地下水流出成分を含む貯留関数法（２段タンク型貯留関数モデル）の最適化手法

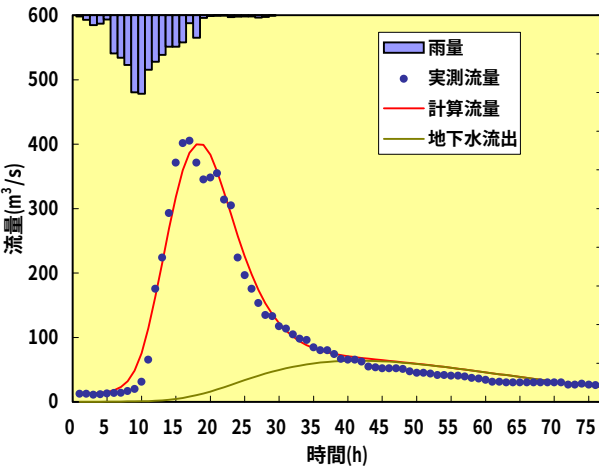


図8.3 昭和44年8月31日洪水

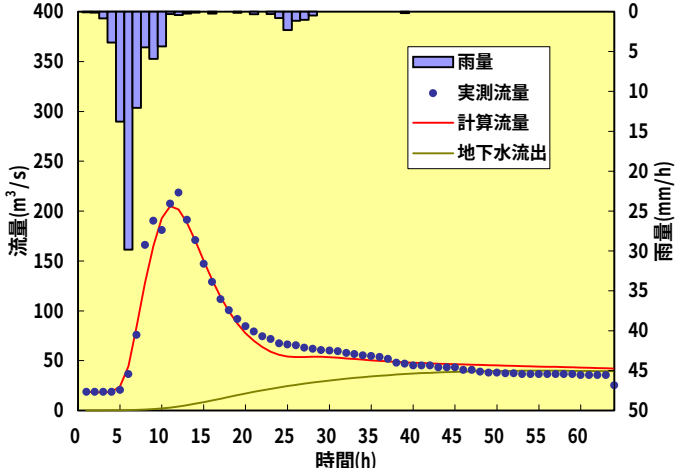


図8.4 昭和49年8月26日洪水

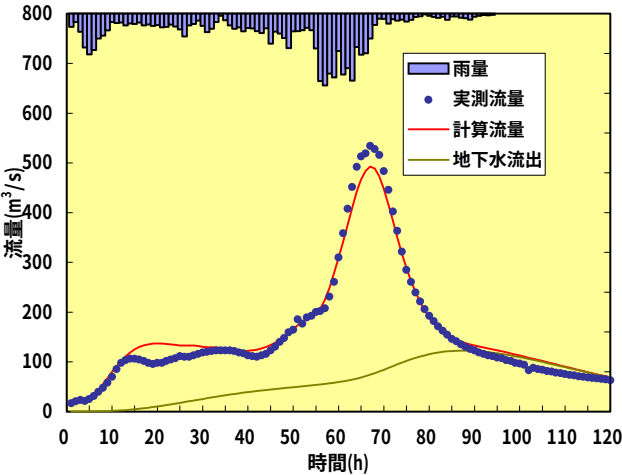


図8.5 昭和55年8月31日洪水

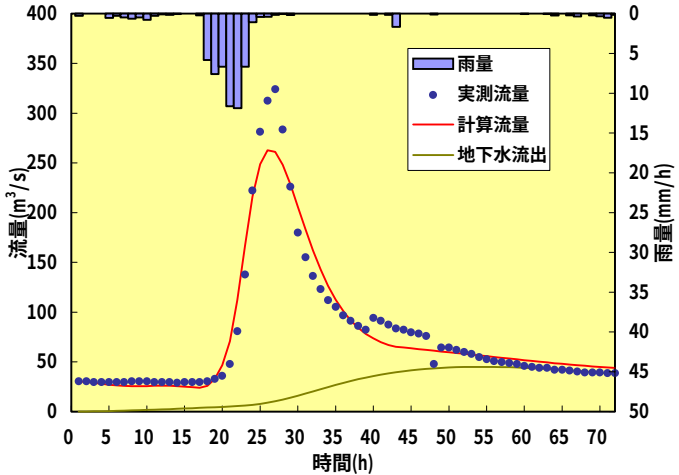


図8.6 昭和58年8月19日洪水

表8.4 モデル定数の同定過程

No	c_{11}	c_{12}	c_{13}	J / N
1	5.000	0.050	1.500	1.194
2	6.101	0.072	1.791	0.522
3	7.602	0.116	2.441	0.109
4	8.892	0.158	3.110	0.023
5	9.520	0.155	3.472	0.014
6	9.688	0.136	3.554	0.012
7	9.631	0.128	3.557	0.011
8	9.620	0.128	3.554	0.011

表8.5 収束時における再現結果

比流量	0.60	収束回数	9
総雨量	83.43	c_{11}	9.620
観測総流出	42.96	c_{12}	0.128
計算総流出	42.67	c_{13}	3.554
観測ピーク	218.51	k_{11}	39.547
計算ピーク	204.99	k_{12}	143.729
J_{PE}	0.062	k_{21}	135.999
J_{RE}	0.124	k_{22}	1642.17
目的関数	0.011		

表 8.6 実測流量と計算流量の比較

時間	雨量	実測流量	計算流量	地下水流量	時間	雨量	実測流量	計算流量	地下水流量
	(mm/h)	(m ³ /s)	(m ³ /s)	(m ³ /s)		(mm/h)	(m ³ /s)	(m ³ /s)	(m ³ /s)
1	0.08	18.87	18.72	0.01	33	0.00	56.61	51.64	32.77
2	0.13	18.87	18.34	0.06	34	0.00	55.47	50.99	33.53
3	0.83	18.87	18.02	0.12	35	0.00	54.72	50.36	34.23
4	3.88	18.87	18.75	0.21	36	0.00	53.72	49.77	34.88
5	13.79	20.68	24.15	0.31	37	0.00	51.75	49.22	35.49
6	29.83	36.48	44.62	0.45	38	0.00	47.92	48.72	36.04
7	12.07	75.72	84.23	0.64	39	0.17	46.99	48.30	36.55
8	4.48	165.95	127.77	0.94	40	0.00	45.14	47.94	37.01
9	5.94	190.27	165.16	1.40	41	0.00	45.14	47.61	37.44
10	4.36	180.96	192.79	2.06	42	0.00	45.14	47.29	37.82
11	0.31	207.42	204.99	2.95	43	0.00	43.34	46.99	38.16
12	0.41	218.51	201.70	4.07	44	0.00	43.34	46.70	38.47
13	0.23	191.32	188.46	5.39	45	0.00	43.34	46.43	38.74
14	0.13	170.88	170.07	6.88	46	0.00	40.70	46.18	38.98
15	0.00	146.94	150.08	8.49	47	0.00	40.70	45.93	39.19
16	0.25	129.10	130.99	10.18	48	0.00	38.99	45.69	39.37
17	0.00	111.60	113.98	11.91	49	0.00	38.14	45.46	39.52
18	0.00	100.64	99.35	13.65	50	0.00	38.14	45.24	39.65
19	0.15	91.70	87.26	15.37	51	0.00	37.31	45.01	39.75
20	0.00	84.57	77.48	17.05	52	0.00	37.31	44.79	39.82
21	0.32	79.07	69.76	18.69	53	0.00	36.48	44.58	39.88
22	0.00	74.41	63.72	20.26	54	0.00	36.48	44.36	39.91
23	0.31	71.81	59.05	21.75	55	0.00	36.48	44.14	39.93
24	0.82	67.37	55.73	23.18	56	0.00	36.48	43.92	39.93
25	2.31	66.13	54.11	24.52	57	0.00	36.48	43.70	39.91
26	1.14	65.51	53.70	25.79	58	0.00	36.48	43.48	39.87
27	1.01	63.08	53.74	26.98	59	0.00	36.48	43.25	39.82
28	0.48	61.87	53.89	28.11	60	0.00	35.67	43.03	39.75
29	0.00	60.68	53.81	29.16	61	0.00	35.67	42.80	39.67
30	0.00	60.09	53.45	30.15	62	0.00	35.67	42.57	39.58
31	0.00	59.51	52.92	31.08	63	0.00	35.67	42.33	39.48
32	0.00	57.76	52.30	31.96	64	0.00	25.22	42.10	39.37

8.8 Fortran プログラム

(1) 主プログラムの機能

主プログラムにおいては、データの入力、観測流出高の成分分離、流出モデルにおける未知定数 3 個の最適同定を行う。流出量とその感度係数ベクトルを算出し、ニュートン法を用いて、3 個のモデル定数を更新し、誤差が許容限界値に収まるまで繰り返し計算を続行する。このとき、モデル定数補正値の算定には「成分回帰分析手法」を併用している⁵⁾。

主要入力データを以下に示す。

- (a) 流域面積
- (b) T_c の値、 δ の値、未知定数 c_{11}, c_{12} および c_{13} の初期値
- (c) 流域平均雨量
- (d) 実測流量

モデル定数の初期値、最適値、ピーク誤差、ハイドログラフの相対誤差および収束計算回数を出力する。最後に、定数最適値を用いて流量を計算し、出力する。

(2) サブプログラムの機能

(a) Subroutine phigam

ϕ, γ を計算する。

(b) Subroutine momreg

モデル定数 c_{11}, c_{12} および c_{13} の補正値を「成分回帰分析手法」を用いて算出する。「成分回帰分析手法」の理論展開については参考文献 5) を参照されたい。

(3) 主な入力変数の内容

(a) Main Program

title1	水系名
title2	河川名
title3	観測所名
title4	洪水名
area	流域面積
delta	δ の値
tc	分離時定数(T_c)の値
cc1	c_{11} の初期値
cc2	c_{12} の初期値
c3	c_{13} の初期値
time	洪水年月日時
nr	雨量データ個数
nq	流量データ個数
nn	計算データ個数
r(i)	降雨データ
qr(i)	実測流量データ
rb	流域平均雨量強度
p1	p_1 の値 (cp1=0.6)

p2	p_2 の値 (cp2=0.4648)
nl	サンプリング時間間隔の分割数 (nl=10)
c00	c_0 の値
c01	c_1 の値
wk1	k_{11} の値
wk2	k_{12} の値
fac	緩和係数
hiryu	比流量
sume	目的関数(J / N)
sotai	相対誤差
peak	ピーク誤差
qq(i)	計算流量
qq1(i)	表面・中間流出成分
qq2(i)	地下水流出成分
b(i)	浸透供給量
pas(i,j)	感度係数行列
dpa(i)	パラメータ補正項

(b) Subroutine phigam

phi1~phi4	ϕ の値
gam1~gam4	γ の値

(4) データ入力

後志利別川

後志利別川

今 金

昭和 49 年 8 月 26 日洪水

361.40										
2.10	53.25	5.000	0.050	1.500						
1974	8	25	10	8	25	20	8	27	8	
64	64	64								
0.08	0.13	0.83	3.88	13.79	29.83	12.07	4.48	5.94	4.36	
0.31	0.41	0.23	0.13	0.00	0.25	0.00	0.00	0.15	0.00	
0.32	0.00	0.31	0.82	2.31	1.14	1.01	0.48	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
Q										
18.87	18.87	18.87	18.87	20.68	36.48	75.72	165.95	190.27	180.96	
207.42	218.51	191.32	170.88	146.94	129.10	111.60	100.64	91.70	84.57	
79.07	74.41	71.81	67.37	66.13	65.51	63.08	61.87	60.68	60.09	
59.51	57.76	56.61	55.47	54.72	53.72	51.75	47.92	46.99	45.14	
45.14	45.14	43.34	43.34	43.34	40.70	40.70	38.99	38.14	38.14	
37.31	37.31	36.48	36.48	36.48	36.48	36.48	36.48	36.48	35.67	
35.67	35.67	35.67	25.22							

(5) 計算出力

後志利別川

後志利別川

今 金

昭和 49 年 8 月 26 日洪水

N0	c1	c2	c3	J/N
1	5.000	0.050	1.500	1.194
2	6.101	0.072	1.791	0.522
3	7.602	0.116	2.441	0.109
4	8.892	0.158	3.110	0.023
5	9.520	0.155	3.472	0.014
6	9.688	0.136	3.554	0.012
7	9.631	0.128	3.557	0.011
8	9.620	0.128	3.554	0.011

計算時間数	流域面積	雨量強度	δ	Tc				
64	361.40	3.476	2.100	53.250				
収束回数	c11	c12	c13	k11	k12	k21	k22	
9	9.620	0.128	3.554	39.547	143.729	135.999	1642.170	
比流量	総雨量	観測総流出	計算総流出	観測ピーク	計算ピーク	Jpe	Jre	目的関数
0.60	83.43	42.96	42.67	218.51	204.99	0.062	0.124	0.011

時間	雨量	実測流量	計算流量	地下水流量
1	0.08	18.87	18.72	0.01
2	0.13	18.87	18.34	0.06
3	0.83	18.87	18.02	0.12
4	3.88	18.87	18.75	0.21
5	13.79	20.68	24.15	0.31
6	29.83	36.48	44.62	0.45
7	12.07	75.72	84.23	0.64
8	4.48	165.95	127.77	0.94
9	5.94	190.27	165.16	1.40
10	4.36	180.96	192.79	2.06
11	0.31	207.42	204.99	2.95
12	0.41	218.51	201.70	4.07
13	0.23	191.32	188.46	5.39
14	0.13	170.88	170.07	6.88
15	0.00	146.94	150.08	8.49
16	0.25	129.10	130.99	10.18
17	0.00	111.60	113.98	11.91
18	0.00	100.64	99.35	13.65
19	0.15	91.70	87.26	15.37
20	0.00	84.57	77.48	17.05
21	0.32	79.07	69.76	18.69
22	0.00	74.41	63.72	20.26
23	0.31	71.81	59.05	21.75
24	0.82	67.37	55.73	23.18
25	2.31	66.13	54.11	24.52
26	1.14	65.51	53.70	25.79
27	1.01	63.08	53.74	26.98
28	0.48	61.87	53.89	28.11
29	0.00	60.68	53.81	29.16
30	0.00	60.09	53.45	30.15
31	0.00	59.51	52.92	31.08
:	:	:	:	:
64	0.00	25.22	42.10	39.37

(6) プログラムリスト

```

c*****
c  下段の感度係数を考慮した2段タンクモデル
c  program name 2kadan.for
c*****
c
c      character title1*128,title2*128,title3*128,title4*128,
& time*128,damy*128
c
c      dimension r(200),qr(200),qq(200),e(200),
- dpa(7),pas(200,7),rr(200),bb(200,200),qq1(200),qq2(200)
c
c-----
c      タイトル
c      read (5,'(a80)') title1
c      read (5,'(a80)') title2
c      read (5,'(a80)') title3
c      read (5,'(a80)') title4
c      write(6,'(a80)') title1
c      write(6,'(a80)') title2
c      write(6,'(a80)') title3
c      write(6,'(a80)') title4
c      write(6,*)
c      write(6,'('' NO      c1      c2      c3      J/N'')')
c
c      t=0.1 ! 計算時間間隔
c      read (5,'(f8.0)') area ! 流域面積
c      read(5,'(5f8.0)') delta,tc,cc1,cc2,c3 !  $\delta$ ,tc,c11,c12,c13
c      read (5,'(a80)') time
c      read (5,'(3i5)') nr,nq,nm ! 雨量数,流量数,計算時間
c
c      do i=1,nq
c      r(i)=0.0 ! 雨量データ設定
c      end do
c
c      read (5,'(10f8.0)') (r(i),i=1,nr)
c      read (5,'(a80)') damy
c
c      rrb=0.0
c      nrb=0
c      do i=1,nq
c      if ( r(i).gt.0.0 ) then
c      rrb=rrb+r(i)
c      nrb=nrb+1
c      end if
c      end do
c      rb=rrb/nrb ! 平均雨量強度
c
c      read (5,'(10f8.0)') (qr(i),i=1,nq) ! 実測流量データ
c
c      fac=0.0 ! 緩和係数
c      p1=0.6
c      p2=0.4648
c      z1=1.0
c      z2=1.0
c-----
c

```

8. 地下水流出成分を含む貯留関数法（2段タンク型貯留関数モデル）の最適化手法

```

n1=int(1/t+0.5)
do i=1,nn
qr(i)=3.6*qr(i)/area ！ 流量→流出高
end do
c
c 地下水流出成分パラメータ計算
c00=(delta/tc)**2
c01=delta**2/tc
c
do m=1,200
c
c k11,k12 の計算
wk1=cc1*z1*area**(0.24)
wk2=cc2*z2*(wk1**2)*rb**(-0.2648)
c
c1=(wk1/wk2)*(p1/p2)
c2=(1./wk2)
p3=p1/p2-1
p4=1./p2
c
u1=0.0
u2=0.0
c31=0.0
u3=0.0
u4=0.0
c32=0.0
u21=0.0
u22=0.0
u23=0.0
u24=0.0
u25=0.0
u26=0.0
c
q1=qr(1)**p2 ！ 状態変量 y1 の初期値
c
q2=0.0
q3=0.0
q4=0.0
sume=0.0
sume1=0.0
sume2=0.0
bbb=(c3-1.)*qr(1) ！ 浸透供給量の初期値
c
do i=1,nn
c
tt=i
rr(i)=r(i)
c
do j=1,n1
c
if ( q1.lt.0 ) then
a1=0.0
a2=0.0
else
a1=-c1*p3*q1**(p3-1)*q2-c2*c3*p4*q1**(p4-1)
a2=-c1*q1**p3
end if
a3=a1+a2**2
a4=a1+a3

```

```

x=c2*c3*q1**p4*(p4-1)+c1*p3*q1**p3*q2+c2*rr(i)
c
call phigam ( t,a1,a2,a3,a4,
-             phi1,phi2,phi3,phi4,
-             gam1,gam2,gam3,gam4 )
c
c -- 表面・中間流出成分感度係数計算--
c  右辺の強制入力項
d1=-(1./wk2)*(p1/p2)*q1**p3*q2
d2=(wk1/(wk2**2.))*(p1/p2)*q1**p3*q2+
-   (1./wk2**2.)*q1**p4*c3-rr(i)/(wk2**2.)
d3=(-1./wk2)*q1**p4
c
c  y1,y2 の感度係数計算
u1=phi1*u1+phi2*u3+gam2*d1
u2=phi1*u2+phi2*u4+gam2*d2
cc31=phi1*c31+phi2*c32+gam2*d3
u3=phi3*u1+phi4*u3+gam4*d1
u4=phi3*u2+phi4*u4+gam4*d2
cc32=phi3*c31+phi4*c32+gam4*d3
c
c  y1,y2 の計算
q11=phi1*q1+phi2*q2+gam2*x
q12=phi3*q1+phi4*q2+gam4*x
c
c  q1 についての感度係数計算(q1,u1,u2,c31 は前のステップの値)
vv1=u1*((1./p2)*q1**(1./p2-1.))
vv2=u2*((1./p2)*q1**(1./p2-1.))
vv3=c31*((1./p2)*q1**(1./p2-1.))
c
c  地下水流出成分パラメータ計算
wk4=(c3-1.)/c00
wk3=c01*wk4
c
a21=-1.0/wk4
a22=-wk3/wk4
a23=a21+a22**2
a24=a21+a23
xx=bbb/wk4
c
c -- 地下水流出成分の感度係数計算--
c  右辺の強制入力項(vv1,vv2,vv3,q1,q3,bbb は前のステップの値)
d21=1.0/wk4*(c3-1.0)*vv1
d22=1.0/wk4*(c3-1.0)*vv2
d23=1.0/wk4*((c3-1.0)*vv3+q1**(1.0/p2))+
-   (c00/(c3-1.0)**2.0)*(q3-bbb)
c
c  y1,y2 の感度係数更新
u1=u1
u2=u2
c31=cc31
u3=u3
u4=u4
c32=cc32
c
c  y1,y2 の更新
q1=q11
q2=q12
c

```

8. 地下水流出成分を含む貯留関数法（2段タンク型貯留関数モデル）の最適化手法

```

        if ( q1.lt.0 ) q1=0.001
c
c      浸透供給量の更新
        bb(i,j)=(c3-1.)*q1**(1./p2)
c
c      call phigam ( t,a21,a22,a23,a24,
-                  phi1,phi2,phi3,phi4,
-                  gam1,gam2,gam3,gam4 )
c
c      y3,y4 の感度係数計算
        uu21=phi1*u21+phi2*u24+gam2*d21
        uu22=phi1*u22+phi2*u25+gam2*d22
        uu23=phi1*u23+phi2*u26+gam2*d23
        uu24=phi3*u21+phi4*u24+gam4*d21
        uu25=phi3*u22+phi4*u25+gam4*d22
        uu26=phi3*u23+phi4*u26+gam4*d23
        u21=uu21
        u22=uu22
        u23=uu23
        u24=uu24
        u25=uu25
        u26=uu26
c
c      y3,y4 の計算
        q21=phi1*q3+phi2*q4+gam2*xx
        q22=phi3*q3+phi4*q4+gam4*xx
        q3=q21
        q4=q22
c
        bbb=bb(i,j)
c
        end do
c
c      q1 についての感度係数計算(q1,u1,u2,c31 は現在のステップの値)
        v11=u1*((1./p2)*q1**(1./p2-1.))
        v12=u2*((1./p2)*q1**(1./p2-1.))
        v13=c31*((1./p2)*q1**(1./p2-1.))
c
c      q2 についての感度係数計算
        v21=u21
        v22=u22
        v23=u23
c
c      全流出量 q についての感度係数計算
        v1=(v11+v21)*cc1*area**(0.24)
        v2=(v12+v22)*cc2*(wk1**2.)*rb**(-0.2648)
        v3=v13+v23
c
        qq1(i)=q1**(1./p2) !表面・中間流出成分
        qq2(i)=q3          !地下水流出成分
        qq(i)=qq1(i)+qq2(i) !全流出量
        qs=sqrt(qr(i))
        e(i)=(qr(i)-qq(i))/qs ! 誤差項
        sume=sume+e(i)**2
c
c      感度係数と誤差項の入力
        pas(i,1)=v1/qs ! 感度係数 c11
        pas(i,2)=v2/qs ! 感度係数 c12
        pas(i,3)=v3/qs ! 感度係数 c13

```



```

pas(i,4)=e(i)    ! 誤差項
c
    end do
c
call momreg(9,4,200,nn,pas,dpa) ! 成分回帰分析
c
dz1=dpa(1)
dz2=dpa(2)
dc3=dpa(3)
c
g1=abs(dz1/z1)
g2=abs(dz2/z2)
g3=abs(dc3/c3)
c
if ( g1.lt.0.001.and.g2.lt.0.001.and.g3.lt.0.001 ) go to 999
c
! パラメータの更新
fac=(1+fac)*0.5
dz1=dz1*fac
dz2=dz2*fac
dc3=dc3*fac
damy1=cc1*z1
damy2=cc2*z2
damy3=sune/nn
write(6,'(i3,3f8.3,f8.3)') m,damy1,damy2,c3,damy3
z1=z1+dz1
z2=z2+dz2
c3=c3+dc3
c
if ( z1.lt.0.001 ) z1=z1-dz1
if ( z2.lt.0.001 ) z2=z2-dz2
if ( c3.lt.0.001 ) c3=c3-dc3
c
    end do
c
999 sune=sune/nn ! 目的関数
c
write(6,*)
write(6,'(''  計算時間数  流域面積  雨量強度'',8x,' 'δ'',8x,
-' 'Tc'')')
write(6,'(i12,f10.2,3f10.3)') nn,area,rb,delta,tc
write(6,'(''  収束回数'',7x,' 'c1'',7x,' 'c12'',7x,' 'c13'',7x,
-' 'k11'',7x,' 'k12'',7x,' 'k21'',7x,' 'k22'')')
write (6,'(i10,7f10.3)') m,damy1,damy2,c3,wk1,wk2,wk3,wk4
c
qmax=0.0
qrmax=0.0
sigqq2=0.0
sigr=0.0
sigqq=0.0
sotai=0.0
sigqr=0.0
c
do i=1,nn
qq(i)=qq(i)*area/3.6 ! 流出高→流量
qr(i)=qr(i)*area/3.6
qq1(i)=qq1(i)*area/3.6
qq2(i)=qq2(i)*area/3.6
if ( qq(i).lt.0 ) qq(i)=0

```

8. 地下水流成分を含む貯留関数法（２段タンク型貯留関数モデル）の最適化手法

```

      if ( qmax.lt.qq(i) ) qmax=qq(i)  ! 計算ピーク
      if ( qrmx.lt.qr(i) ) qrmx=qr(i)  ! 観測ピーク
      sigr=sigr+r(i)      ! 総雨量
      sigqr=sigqr+qr(i)   ! 総観測流量
      sigqq=sigqq+qq(i)   ! 総計算流量
      sigqq2=sigqq2+qq2(i) ! 総地下水流量
      sotai=sotai+abs(qr(i)-qq(i))/qr(i) ! ハイドログラフ相対誤差
    end do

c
    hiryu=qrmx/area      !比流量
    sotai=sotai/nn       ! ハイドログラフ相対誤差
    peak=abs(qrmx-qmax)/qrmx ! ピーク相対誤差
    sigqr=sigqr*3.6/area !観測総流出高
    sigqq=sigqq*3.6/area !計算総流出高

c
    write(6,('( ' 比流量 総雨量 観測総流出 計算総流出 ',
-1x, '観測ピーク 計算ピーク ',3x, 'Jpe ',3x, 'Jre ',1x,
-'目的関数'))')
    write(6, '(f8.2,f7.2,4f11.2,2f6.3,f9.3)') hiryu,sigr,sigqr,
-sigqq,qrmx,qmax,peak,sotai,sume
    write(6,*)
    write(6,('( ' 時間 ',4x, '雨量 ',2x, '実測流量 ',2x, '計算流量 ',
-,2x, '地下水流量'))')
    do i=1,nn
      write(6, '(i5,f8.2,2f10.2,f12.2)') i,rr(i),qr(i),qq(i),qq2(i)
    end do

c
    stop
  end

c
c
c
  subroutine phigam ( t,a1,a2,a3,a4,
-                    phi1,phi2,phi3,phi4,
-                    gam1,gam2,gam3,gam4 )

c
    phi1=1+(a1*t**2)/2+(a1*a2*t**3)/6+(a1*a3*t**4)/24
    phi2=t+(a2*t**2)/2+(a3*t**3)/6+(a2*a4*t**4)/24
    phi3=a1*phi2
    phi4=1+a2*t+(a3*t**2)/2+(a2*a4*t**3)/6
-      +((a1*a3+a2**2*a4)*t**4)/24

c
    gam1=t*(1+(a1*t**2)/6+(a1*a2*t**3)/24)
    gam2=t**2*(0.5+(a2*t)/6+(a3*t**2)/24)
    gam3=a1*gam2
    gam4=phi2

c
    return
  end

c
c
c
  subroutine sqcov(n1,n,m1,md,x,cov)
c**
  compute covariance matrix
  dimension x(m1,n1),cov(n1,n1)
  do 10 i=1,n
    do 10 j=1,i
      s=0.
      do 12 k=1,md
12      s=s+x(k,i)*x(k,j)
10      cov(i,j)=s

```

```

      return
    end

c
c
      subroutine momreg(n1,n,m1,md,x,dpa)
c** component regression method
c** compute the correction terms of parameters (dpa)
      dimension x(m1,n1),dpa(7),cov(9,9),g(200,9),y(200,9)
      dimension binv(9,9),coe(9),st(9)
      na=n-1
c** compute covariance matrix
      call sqcov(n1,na,m1,md,x,cov)
      do 50 i=1,na
50      st(i)=sqrt(cov(i,i))
      do 52 i=1,na
      s=st(i)
      do 52 j=1,i
      s1=st(j)
      cov(i,j)=cov(i,j)/(s*s1)
52      cov(j,i)=cov(i,j)
c** factorization of cov(i,j) by lower triangular
c** cholesky method (cov = l * u)
c** l = lower triangular u = upper triangular
c** compute the inverse of u(i,j)
c**
      call lowtri(n1,na,cov,binv)
      do 54 j=1,na
      s=st(j)
      do 54 i=1,md
54      y(i,j)=x(i,j)/s
      do 20 i=1,md
      do 20 j=1,na
      s=0.
      do 22 k=1,j
22      s=s+y(i,k)*binv(k,j)
20      g(i,j)=s
      do 24 i=1,na
      s=0.0
      do 26 j=1,md
26      s=s+g(j,i)*x(j,n)
24      coe(i)=s
      do 30 i=1,na
      s=0.
      do 29 j=i,na
29      s=s+binv(i,j)*coe(j)
30      dpa(i)=s/st(i)
      return
    end

c
c
      subroutine lowtri(n1,n,p,binv)
c** lower triangular cholesky factorization
c** p = u*b
c** p = symmetric matrix
c** u = lower triangular matrix
c** b = upper triangular matrix (b = ut)
c** binv = inverse matrix of b
c**      = upper triangular matrix
c**

```

```

dimension p(n1,n1),binv(n1,n1)
dimension u(9,9),b(9,9)
c** compute lower triangular u(i,j)
do 5 j=1,n-1
  u(j,j)=abs(p(j,j))
  u(j,j)=sqrt(u(j,j))
  a1=1./u(j,j)
  do 5 k=n,j+1,-1
    u(k,j)=a1*p(k,j)
    be=u(k,j)
  do 5 i=k,n
5    p(i,k)=p(i,k)-u(i,j)*be
    u(n,n)=abs(p(n,n))
    u(n,n)=sqrt(u(n,n))
c**
c** b = transpose of u
do 40 i=1,n
do 40 j=i,n
40  b(i,j)=u(j,i)
c**
c** compute inverse if b(i,j)
binv(1,1)=1./b(1,1)
do 50 j=2,n
  binv(j,j)=1./b(j,j)
  jml=j-1
  do 50 k=1,jml
    sum=0.0
    do 52 i=k,jml
52    sum = sum - binv(k,i)*b(i,j)
50    binv(k,j)=sum*binv(j,j)
  return
end

```

9. 地下水流出成分を含む貯留関数法(2段タンク型貯留関数モデル)へのカルマン・フィルター理論の適用

9.1 システム方程式の定式化

第8章で述べた地下水流出成分を含む貯留関数法(2段タンク型貯留関数モデル)を流出モデルとして採用する(図9.1)。それを再記すれば、次式で示される。

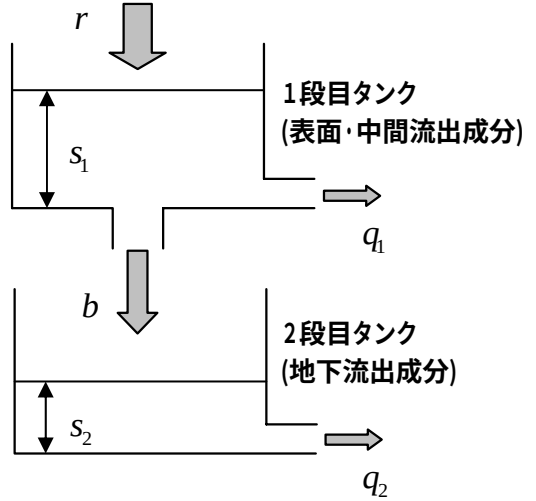
$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = k_{11}q_1^{p_1} + k_{12} \frac{dq_1^{p_2}}{dt} \\ \frac{ds_1}{dt} = r - q_1 - b \\ b = k_{13}q_1 \\ s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} = b - q_2 \\ q = q_1 + q_2 \end{array} \right. \quad (9.1)$$


図9.1 2段タンク型貯留関数モデル

ここで、 s_1 : 1 段目タンク貯留高(mm)、 s_2 : 2 段目タンク貯留高(mm)、 r : 観測雨量(mm/h)、 q : 全流出高(mm/h)、 q_1 : 表面・中間流出高(mm/h)、 q_2 : 地下流出高(mm/h)、 b : 1 段目タンクから 2 段目タンクへの浸透供給量(mm/h)、 $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$: 貯留係数、 k_{13} : 浸透係数、 p_1, p_2 : 貯留指数
また、 k_{11}, k_{12}, k_{13} と k_{21}, k_{22} は、次式で表現される。

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2\bar{r}^{-0.2648} \\ k_{13} = c_{13} - 1 \\ k_{21} = \frac{c_1}{c_0}k_{13} \\ k_{22} = \frac{1}{c_0}k_{13} \end{array} \right. \quad (9.2)$$

ここで、 A : 流域面積(km²)、 $\bar{r}$: 平均雨量強度(mm/h)、 c_{11}, c_{12}, c_{13} : 未知定数、 c_0, c_1 : 確定値
 c_0 と c_1 は次式で与えられていることが知られている¹⁰⁾。

$$c_0 = (\delta/T_c)^2, \quad c_1 = \delta^2/T_c \quad (9.3)$$

ここで、 T_c : 地下水流出成分の分離時定数、 δ : 減衰係数

表9.1 水系毎の2段タンク型貯留関数モデル定数統計量

水 系 名	洪水数	c_{11}		c_{12}		c_{13}		分離時定数(T_c)	
		平均(μ)	標準偏差(σ)	平均(μ)	標準偏差(σ)	平均(μ)	標準偏差(σ)	平均(μ)	標準偏差(σ)
天 塩 川	51	8.091	4.044	0.331	0.213	2.331	0.788	55.544	16.161
渚 滑 川	42	8.092	2.906	0.378	0.216	2.115	0.808	65.906	20.988
湧 別 川	32	7.463	1.951	0.384	0.181	2.139	0.465	75.847	19.933
常 呂 川	34	9.698	3.340	0.304	0.212	2.744	0.732	60.023	16.634
網 走 川	20	12.883	3.815	0.197	0.104	4.036	1.415	72.691	12.957
留 萌 川	39	8.666	2.099	0.337	0.257	1.787	0.558	76.704	35.651
石 狩 川	72	8.081	3.444	0.272	0.207	2.453	0.850	52.488	25.980
尻 別 川	69	9.225	2.782	0.242	0.140	2.751	0.840	62.933	15.473
後志利別川	65	5.906	1.689	0.403	0.263	1.866	0.528	55.645	18.012
鷗 川	34	7.215	1.847	0.385	0.218	2.561	1.220	45.347	11.546
沙 流 川	60	8.035	2.279	0.264	0.176	1.898	0.586	69.098	22.862
釧 路 川	42	14.692	4.870	0.165	0.102	4.434	1.375	62.591	19.044
十 勝 川	86	9.405	2.942	0.297	0.259	2.487	0.988	60.751	16.131
標 津 川	4	12.393	0.999	0.265	0.026	3.942	0.928	95.398	39.085
全 水 系	650	8.803	3.618	0.304	0.217	2.499	1.097	61.732	22.012

表9.2 全水系のモデル定数相関係数

	c_{11}	c_{12}	c_{13}
c_{11}	1.000	0.157	-0.393
c_{12}	0.157	1.000	-0.143
c_{13}	-0.393	-0.143	1.000

カルマン・フィルター理論を用いて実時間の洪水予測を行う場合、未知定数 c_{11} と c_{12} および c_{13} ($=k_{13}+1$)の初期値が必要となる。表9.1には、北海道内の一級河川13水系と指定河川・標津川における650ケースの洪水解析結果による3個のモデル定数 c_{11} 、 c_{12} 及び c_{13} ($=k_{13}+1$)の最適同定値の平均値(μ)と標準偏差(σ)が河川流域毎に示されている⁶⁾。また、式(9.3)に示される c_0 、 c_1 を求めるためには地下水流出成分の分離定数 T_c も必要となり、その値も表9.1に示されている。なお、 δ の値は2.1を用いている。表9.2には全650ケースに関してのモデル定数間の相関係数が示されている。その結果、相関係数も高いことから、係数はほぼ独立であると仮定できる。

式(9.1)を解くために、次の変数を「状態変量」に選定する。

$$x_1 = q_1^{p_2}, \quad x_2 = \frac{dx_1}{dt}, \quad x_3 = q_2, \quad x_4 = \frac{dx_3}{dt} \quad (9.4)$$

モデル定数 c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} および予測雨量 r は、洪水毎に変化することが予想される。したがって、 c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} および予測雨量 r も「状態変量」に加えてシステム方程式を作成する。

すなわち、状態変量をベクトル表示すると以下のように示される。

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

ここで、

$$X_1 = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T, \quad X_2 = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]^T, \quad X_3 = r \quad (9.6)$$

9.2 状態変量の伝達方程式

洪水予測では、状態変量の伝達方程式は l 時間先の流量、水位を予測することに対応しているので、**表4.2**に示す式(6)「状態変量の伝達方程式」について定式化を行う。

まず、式(9.1)を式(9.4)の状態変量で表すと次式が与えられる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, c_{11}, c_{12}, c_{13}, r) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, c_{11}, c_{12}, c_{13}, r) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \\ \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, c_{11}, c_{12}, c_{13}, r) = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, c_{11}, c_{12}, c_{13}, r) = -\frac{c_0}{k_{13}} x_3 - c_1 x_4 + \frac{c_0}{k_{13}} b \end{cases} \quad (9.7)$$

このとき、モデル定数は時間的に変動しないものとして、次のように考える。

$$\begin{cases} \frac{dc_{11}}{dt} = f_5 = 0 \\ \frac{dc_{12}}{dt} = f_6 = 0 \\ \frac{dc_{13}}{dt} = f_7 = 0 \\ \frac{dr}{dt} = f_8 = 0 \end{cases} \quad (9.8)$$

この方策はカルマン・フィルタ理論適用にあたって、しばしば用いられる。よって、状態変量に関する微分方程式は式(9.7)と式(9.8)より、式(9.9)で表現でき、システム方程式の原式として用いる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \\ x_4 \\ -\frac{c_0}{k_{13}} x_3 - c_1 x_4 + \frac{c_0}{k_{13}} b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

上式を行列表示すると、

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (9.10)$$

ここで、

$$F(X) = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8]^T \quad (9.11)$$

カルマン・フィルタ理論は、元来線形システムの状態変量推定として導かれているため、式(9.9)を線形化する必要がある。なお、供給浸透量 b は既知量として、式(9.9)の線形近似化の展開を行う。

そこで、式(9.10)の $F(x)$ を $X = X^*$ においてテーラー級数展開すると、次の線形近似式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (9.12)$$

ここで、

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0_1 & 0_2 & 0_3 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{47} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{28} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

$$0_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

式(9.14)の行列 A_1 と A_2 および A_3 の要素は次式で計算される。

$$\left\{ \begin{aligned} a_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-2} (x_2^*) - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2-1} \\ a_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} \\ a_{25} &= \frac{\partial f_2}{\partial c_{11}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = \left\{ -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) \right\} A^{0.24} \\ a_{26} &= \frac{\partial f_2}{\partial c_{12}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} \\ &= \frac{1}{k_{12}^2} \left\{ k_{11} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) + c_{13} (x_1^*)^{1/p_2} - r \right\} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ a_{27} &= \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{13}} \frac{\partial k_{13}}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}} (x_1^*)^{1/p_2} \\ a_{28} &= \frac{\partial f_2}{\partial r} = \frac{1}{k_{12}} \end{aligned} \right. \quad (9.16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{43} &= \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = -\frac{c_0}{k_{13}} \\ a_{44} &= \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -c_1 \\ a_{47} &= \frac{\partial f_4}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_4}{\partial k_{13}} \frac{\partial k_{13}}{\partial c_{13}} = \frac{c_0}{k_{13}^2} (x_3^* - b^*) \end{aligned} \right. \quad (9.17)$$

また、式(9.12)のベクトル $D(X^*)$ は次式で与えられる。

$$D(X^*) = F(X^*) - A(X^*)X^* \\ = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 \\ x_4 \\ f_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & a_{47} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ d_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned}
 d_2 &= f_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, c_{11}, c_{12}, c_{13}, r) - a_{21}x_1^* - a_{22}x_2^* - a_{25}c_{11} - a_{26}c_{12} - a_{27}c_{13} - a_{28}r \\
 &= \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}}
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

$$\begin{aligned}
 d_4 &= f_4(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, c_{11}, c_{12}, c_{13}, r) - a_{43}x_3^* - a_{44}x_4^* - a_{47}c_{13} \\
 &= \frac{c_0}{k_{13}^2} \{ (2k_{13} + 1)b^* - (k_{13} + 1)x_3^* \}
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

式(9.12)は線形常微分方程式であり、 $A(X^*)$ と $D(X^*)$ が定係数行列の場合、次の差分方程式に変換できる。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \tag{9.21}$$

式(9.21)を行列表示すると、次式が得られる。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_k \tag{9.22}$$

ここで、

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k \tag{9.23}$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 & 0 & \phi_{15} & \phi_{16} & \phi_{17} & \phi_{18} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 0 & 0 & \phi_{25} & \phi_{26} & \phi_{27} & \phi_{28} \\ 0 & 0 & \phi_{33} & \phi_{34} & 0 & 0 & \phi_{37} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{43} & \phi_{44} & 0 & 0 & \phi_{47} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ 0 & 0 & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

次に、行列 Φ_1, Φ_2, Φ_3 および計算に必要な Γ_1 の要素を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + a_{21}T\beta_1 \\ \phi_{12} = T\beta_2 \\ \phi_{21} = a_{21}\phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_{22}T + \frac{1}{2}a_1T^2 + \frac{1}{6}a_2T^3 + \frac{1}{24}(a_{21}a_1 + a_{22}a_2)T^4 \\ \phi_{33} = 1 + a_{43}T\beta_3 \\ \phi_{34} = T\beta_4 \\ \phi_{43} = a_{43}\phi_{34} \\ \phi_{44} = 1 + a_{44}T + \frac{1}{2}a_3T^2 + \frac{1}{6}a_4T^3 + \frac{1}{24}(a_{43}a_3 + a_{44}a_4)T^4 \end{cases} \quad (9.27)$$

$$\begin{cases} \phi_{15} = a_{25}T\beta_1 \\ \phi_{16} = a_{26}T\beta_1 \\ \phi_{17} = a_{27}T\beta_1 \\ \phi_{25} = a_{25}T\beta_2 \\ \phi_{26} = a_{26}T\beta_2 \\ \phi_{27} = a_{27}T\beta_2 \\ \phi_{37} = a_{47}T\beta_3 \\ \phi_{47} = a_{47}T\beta_4 \end{cases} \quad (9.28)$$

$$\begin{cases} \phi_{18} = a_{28}T\beta_1 \\ \phi_{28} = a_{28}T\beta_2 \end{cases} \quad (9.29)$$

$$\begin{cases} \gamma_{12} = T\beta_1 \\ \gamma_{22} = \phi_{12} \\ \gamma_{34} = T\beta_3 \\ \gamma_{44} = \phi_{34} \end{cases} \quad (9.30)$$

ここで、

$$\begin{cases} a_1 = a_{21} + a_{22}^2 \\ a_2 = 2a_{21}a_{22} + a_{22}^3 \\ a_3 = a_{43} + a_{44}^2 \\ a_4 = 2a_{43}a_{44} + a_{44}^3 \end{cases} \quad (9.31)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_{22}T^2 + \frac{1}{24}a_1T^3 \\ \beta_2 = 1 + \frac{1}{2}a_{22}T + \frac{1}{6}a_1T^2 + \frac{1}{24}a_2T^3 \\ \beta_3 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_{44}T^2 + \frac{1}{24}a_3T^3 \\ \beta_4 = 1 + \frac{1}{2}a_{44}T + \frac{1}{6}a_3T^2 + \frac{1}{24}a_4T^3 \end{cases} \quad (9.32)$$

また、式(9.21)を行列要素で表すと次式になる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 & 0 & \phi_{15} & \phi_{16} & \phi_{17} & \phi_{18} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 0 & 0 & \phi_{25} & \phi_{26} & \phi_{27} & \phi_{28} \\ 0 & 0 & \phi_{33} & \phi_{34} & 0 & 0 & \phi_{37} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{43} & \phi_{44} & 0 & 0 & \phi_{47} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \\ r \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_{12}d_2 \\ \gamma_{22}d_2 \\ \gamma_{34}d_4 \\ \gamma_{44}d_4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

式(9.33)の行列を展開すると、表4.2に示す式(6)「状態変量の伝達方程式」に対応する式(9.21)は次のように記述できる。

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = \phi_{11}x_{1,k} + \phi_{12}x_{2,k} + \phi_{15}c_{11,k} + \phi_{16}c_{12,k} + \phi_{17}c_{13,k} + \phi_{18}r_k + \gamma_{12}d_{2,k} \\ x_{2,k+1} = \phi_{21}x_{1,k} + \phi_{22}x_{2,k} + \phi_{25}c_{11,k} + \phi_{26}c_{12,k} + \phi_{27}c_{13,k} + \phi_{28}r_k + \gamma_{22}d_{2,k} \\ x_{3,k+1} = \phi_{33}x_{3,k} + \phi_{34}x_{4,k} + \phi_{37}c_{13,k} + \gamma_{34}d_{4,k} \\ x_{4,k+1} = \phi_{43}x_{3,k} + \phi_{44}x_{4,k} + \phi_{47}c_{13,k} + \gamma_{44}d_{4,k} \end{cases} \quad (9.34)$$

$$\begin{cases} c_{11,k+1} = c_{11,k} \\ c_{12,k+1} = c_{12,k} \\ c_{13,k+1} = c_{13,k} \\ r_{k+1} = r_k \end{cases} \quad (9.35)$$

すなわち、式(9.34)は基本式である式(9.7)の漸化式であり、モデルパラメータ c_{11} , c_{12} , c_{13} と r を状態変数に加えたときの状態変数 x_1, x_2, x_3, x_4 の伝達方程式となる。式(9.19)により右辺の d_2 に予測雨量を入れることで、状態変数 $x_{1,k+1}$ と $x_{2,k+1}$ の予測値を計算することが出来る。さらに、式(9.20)により右辺の d_4 に浸透供給量 b を入れることで、状態変数 $x_{3,k+1}$ と $x_{4,k+1}$ の予測値を求めることが出来る。また、モデルパラメータは式(9.35)により観測値間では時間変化していないことがわかる。

流量を予測する場合、状態変数 x_1 の予測値と流量予測値 Q_k との関係を示す。

式(9.1)と式(9.4)より流出高は次式で表現される。

$$q_k = x_{1,k}^{1/p_2} + x_{3,k} \quad (9.36)$$

ここで、 q_k : 全流出高(mm/h)、 $x_{1,k}, x_{3,k}$: 式(9.34)から計算される状態変数、 $p_2=0.4648$ (固定値)

したがって、流量と流出高の関係から状態変数 $x_{1,k}$ と $x_{3,k}$ を用いたときの流量予測式が次式で与えられる。

$$Q_k = \frac{A}{3.6} q_k = \frac{A}{3.6} (x_{1,k}^{1/p_2} + x_{3,k}) \quad (9.37)$$

ここで、 Q_k : 離散時刻 k における流量予測値、 $x_{1,k}, x_{3,k}$: 時刻 k における状態変数 x_1 と x_3 の値

次に、水位を予測する場合、状態変数 $x_{1,k}$ と $x_{3,k}$ の予測値と水位予測値 H_k との関係を示す。一般には流量観測資料に基づいて次の水位～流量曲線 ($H \sim Q$ 関係式) が予め設定されている。

$$Q_k = a(H_k + b)^2 \quad (9.38)$$

式(9.38)を水位に関して表現すると、以下のようなになる。

$$H_k = -b + \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{Q_k} \quad (9.39)$$

すなわち、

$$b_0 = -b, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (9.40)$$

$$H_k = b_0 + b_1 \sqrt{Q_k} \quad (9.41)$$

式(9.37)を式(9.41)に代入すれば、状態変数 $x_{1,k}$ と $x_{3,k}$ を用いたときの水位予測式が得られる。

$$H_k = b_0 + b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6} (x_{1,k}^{1/p_2} + x_{3,k})} \quad (9.42)$$

ここで、 H_k : 離散時刻 k における水位予測値、 $x_{1,k}, x_{3,k}$: 時刻 k における状態変数 x_1 と x_3 の値

9.3 状態変量の推定誤差共分散伝達方程式の定式化

洪水予測では、状態変量の推定誤差共分散伝達方程式は l 時間先の流量及び水位予測値の精度(分散)に対応しているので、表4.2に示される式(7)「推定誤差共分散伝達方程式」について定式化を行う。

そこで、まず次式を定義する。

$$\tilde{X}_k = X_k - \hat{X}_k \quad (9.43)$$

$\tilde{X}_k$ は、状態変量の真値 X_k と最良推定値 $\hat{X}_k$ の差、すなわち誤差($\sim$ は以後誤差を表わすものとする)になっているので、状態変量推定誤差と呼ぶ。

また、 $\tilde{X}_k$ は式(9.21)の $\Gamma_k D_k$ を確定変量とすると、次式で表される。

$$\tilde{X}_{k+1} = \Phi_k \tilde{X}_k \quad (9.44)$$

この $\tilde{X}_k$ の分散・共分散(P_k)を計算すると、 P_k は式(9.45)で表される。

$$\begin{aligned} P_k &= E(\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T) = E \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \tilde{X}_1^T & \tilde{X}_2^T & \tilde{X}_3^T \end{bmatrix}_k \right\} \\ &= \begin{bmatrix} E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_3^T)_k \\ E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_2^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_3^T)_k \\ E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_2^T)_k & E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_3^T)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} & P_{3,k} \\ P_{2,k}^T & U_{1,k} & 0 \\ P_{3,k}^T & 0 & U_{2,k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.45)$$

ここで、 $P_{1,k}$: X_1 に関する(4×4)の分散・共分散行列、 $P_{2,k}$: X_1 と X_2 に関する(4×3)の共分散行列、 $P_{3,k}$: X_1 と X_3 に関する(4×1)の共分散行列、 $U_{1,k}$: X_2 に関する(3×3)の分散・共分散行列、 $U_{2,k}$: X_3 に関する(1×1)の分散

式(9.44)を式(9.45)に代入すると、表4.2の式(7)に示される $\tilde{X}_{k+1}$ の分散・共分散行列 P_{k+1} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E(\tilde{X}_{k+1} \tilde{X}_{k+1}^T) \\ &= \Phi_k P_k \Phi_k^T \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} & P_{3,k} \\ P_{2,k}^T & U_{1,k} & 0 \\ P_{3,k}^T & 0 & U_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^T & 0 & 0 \\ \Phi_2^T & I & 0 \\ \Phi_3^T & 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.46)$$

また、 $P_{1,k}$ の行列を要素展開すると、式(9.47)となる。

$$P_{1,k} = \begin{bmatrix} \text{Var}(x_{1,k}) & \text{Cov}(x_{1,k}, x_{2,k}) & \text{Cov}(x_{1,k}, x_{3,k}) & \text{Cov}(x_{1,k}, x_{4,k}) \\ \text{Cov}(x_{2,k}, x_{1,k}) & \text{Var}(x_{2,k}) & \text{Cov}(x_{2,k}, x_{3,k}) & \text{Cov}(x_{2,k}, x_{4,k}) \\ \text{Cov}(x_{3,k}, x_{1,k}) & \text{Cov}(x_{3,k}, x_{2,k}) & \text{Var}(x_{3,k}) & \text{Cov}(x_{3,k}, x_{4,k}) \\ \text{Cov}(x_{4,k}, x_{1,k}) & \text{Cov}(x_{4,k}, x_{2,k}) & \text{Cov}(x_{4,k}, x_{3,k}) & \text{Var}(x_{4,k}) \end{bmatrix} \quad (9.47)$$

ここで、 $\text{Var}(x_{1,k})$: $x_{1,k}$ の分散、 $\text{Cov}(x_{1,k}, x_{2,k})$: $x_{1,k}$ と $x_{2,k}$ の共分散

流量を予測する場合、式(9.37)により計算される流量予測値の精度(分散)は、次式で求められる。

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q_k) &= \left(\frac{\partial Q_k}{\partial x_{1,k}} \right)^2 \text{Var}(x_{1,k}) + \left(\frac{\partial Q_k}{\partial x_{3,k}} \right)^2 \text{Var}(x_{3,k}) + 2 \frac{\partial Q_k}{\partial x_{1,k}} \frac{\partial Q_k}{\partial x_{3,k}} \text{Cov}(x_{1,k}, x_{3,k}) \\ &= \left(\frac{A}{3.6} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{p_2} x_{1,k}^{1/p_2-1} \right)^2 \text{Var}(x_{1,k}) + \text{Var}(x_{3,k}) + 2 \left(\frac{1}{p_2} x_{1,k}^{1/p_2-1} \right) \text{Cov}(x_{1,k}, x_{3,k}) \right\} \end{aligned} \quad (9.48)$$

式(9.48)中の $\text{Var}(x_{1,k})$, $\text{Var}(x_{3,k})$, $\text{Cov}(x_{1,k}, x_{3,k})$ は、カルマン・フィルターにおける推定誤差分散・共分散の伝達方程式から自動計算され、式(9.47)の要素より容易に求められる。

また、水位を予測する場合、式(9.42)により計算される水位予測値の精度(分散)は、式(9.41)を用いて次式で求められる。

$$\text{Var}(H_k) = \left(\frac{\partial H_k}{\partial Q_k} \right)^2 \text{Var}(Q_k) = \frac{b_1^2}{4} Q_k^{-1} \text{Var}(Q_k) \quad (9.49)$$

すなわち、 Q_k の値に式(9.37)を、また $\text{Var}(Q_k)$ に式(9.48)を用いる。

要約すると、 l 時間先の予測流量(Q_l)および予測水位(H_l)の推定誤差分散は、式(9.48)と式(9.49)を順次適用していけばよい。

式(9.46)のベクトル $\Phi_k P_k \Phi_k^T$ を展開すると下式になる。

$$\begin{aligned} P_{1,k+1} &= \Phi_1 P_{1,k} \Phi_1^T + \Phi_2 P_{2,k}^T \Phi_1^T + \Phi_3 P_{3,k}^T \Phi_1^T + \Phi_1 P_{2,k} \Phi_2^T \\ &\quad + \Phi_2 U_{1,k} \Phi_2^T + \Phi_1 P_{3,k} \Phi_3^T + \Phi_3 U_{2,k} \Phi_3^T \end{aligned} \quad (9.50)$$

$$P_{2,k+1} = \Phi_1 P_{2,k} + \Phi_2 U_{1,k} \quad (9.51)$$

$$P_{3,k+1} = \Phi_1 P_{3,k} + \Phi_3 U_{2,k} \quad (9.52)$$

$$U_{1,k+1} = U_{1,k} \quad (9.53)$$

$$U_{2,k+1} = U_{2,k} \quad (9.54)$$

式(9.50)の $P_{1,k+1}$ は、状態変量 x_1 と x_2 の推定誤差分散・共分散である。**第4章**ではモデル定数を状態変量に加えてシステム方程式の拡大を図った。さらに、この**第9章**では予測雨量も状態変量に加えた。その結果、予測雨量の誤差分散である $\Phi_3 U_{2,k} \Phi_3^T$ の影響が $P_{1,k+1}$ に反映されていることがわかる。

式(9.53)に示されるモデル定数ベクトル $X_2 = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]$ の誤差分散・共分散 $U_{1,k}$ は、新しい観測値が入手されるまでは変化しないことを意味している。その理由は、式(9.35)に示されるように一定値が伝達されているからである。また予測雨量の誤差分散 $U_{2,k}$ は状態変量 $X_3 = r$ の推定誤差分散であり式(9.56)によって与えられる¹¹⁾。

$U_{1,k}$ の値をあらかじめ設定しておく必要がある。モデル定数 c_{11} と c_{12} および c_{13} が互いに独立であると仮定すると、 $U_{1,k}$ は以下のように表すことができる。また、予測雨量の推定誤差分散は式(9.56)によって計算される。

$$U_{1,k} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{13}^2 \end{bmatrix} \quad (9.55)$$

$$U_{2,k} = \text{Var}(\hat{r}_{k+l}) = S_{k+l}^2 = a_s^2 l r_{k+l}^{2b_s} \quad (\text{式(6.4)参照}) \quad (9.56)$$

ここに、 a_s , b_s : 予測定数, l : リードタイム(h)

第6章で述べたように、八重岳レーダ(沖縄)と御在所レーダ(中部)による豪雨情報量の再整理によって、定数が以下のように決定されている。

$$a_s = 1.37, \quad b_s = 0.64 \quad (9.57)$$

式(9.57)の予測定数がどこの地点においても適用可能かどうかの疑問は残るが、本報告での予測降雨誤差分散算定式として、式(9.56)と式(9.57)を用いて解析を行うこととする。このとき、式(9.56)の計算にあたっては、式(6.3)の取り扱いと同様に、 $r_{k+l} = 0$ のとき、分散がゼロとなる不合理を避けるために、 $r_{k+l} = 0.1 \text{ mm/h}$ と小さな値を想定して計算を進める。

ここで、 σ_{11}^2 , σ_{12}^2 , σ_{13}^2 はそれぞれモデル定数、 c_{11} , c_{12} , c_{13} の分散の初期値である。この $U_{1,k}$ は、式(9.50)と式(9.51)において使用される。

予測雨量の誤差分散 $U_{2,k}$ は式(9.56)に示されるモデル式を用いる。このとき、予測雨量 $\hat{r}_l$ を式(9.19)と式(9.34)に代入し、 $U_{2,l}$ を式(9.50)～式(9.52)と式(9.54)で使用する。また、予測雨量の値が 0 のとき、分散がゼロとなって不合理となるため、 $\hat{r}_l$ に 0.1 mm/h の値を与える。

任意のリードタイムまでの水位を予測する手順を以下に示す。

- l 時間先の予測雨量 $\hat{r}_l$ を式(9.34)に代入し任意のリードタイムまでの状態変量 $x_{1,l}$ と $x_{3,l}$ を算出する。
- (a)で計算された $x_{1,l}$ と $x_{3,l}$ を用い式(9.42)によって水位予測値を計算する。

- (c) 同時に、予測雨量の誤差分散である $U_{2,l}$ (式(9.56)参照) を式(9.50)に代入し、状態変量の推定誤差分散・共分散を求める。
- (d) (c) で計算された状態変量 $x_{1,l}$ と $x_{3,l}$ の誤差分散・共分散である $Var(x_{1,k})$, $Var(x_{3,k})$ および $Cov(x_{1,k}, x_{3,k})$ を式(9.48)に代入し、式(9.49)から水位予測値の分散を算出する。

9.4 乗算的ノイズによるシステム誤差の定式化

式(9.46)にはシステム誤差分散・共分散行列 Q_k が含まれておらず、表4.2に示される式(7)「状態変量の推定誤差共分散伝達方程式」を満たすために、システム誤差分散・共分散行列 Q_k をどのように導入するかという問題が残る。

式(9.21)はカルマン・フィルタ理論における観測値間、 $t_k \leq t < t_{k+1}$ での状態変量の伝達方程式に相当しており、この間システム誤差を考慮しない。その代り、図9.2に示すように、 $t = t_{k+1}$ において瞬間的にシステムノイズが付加されると考える。すなわち、この時点でシステムノイズの誤差分散・共分散 Q_{k+1} を作用させることになる。このとき、ノイズの大きさは状態変量推定値に比例すると仮定する。この考えが京大グループによって提案された「乗算的ノイズ」の導入である。今、式(9.21)の解より得られる $t = t_{k+1}$ における状態変量を $x_1(t_{k+1}) \sim x_4(t_{k+1})$ とする。また、図9.2の(-)、(+)の記号はそれぞれ流量観測値情報入手直前と直後を意味する。したがって、乗算的ノイズを導入することにより、次の定式化を行なうことができる。

$$\begin{aligned} X_{1,k+1}(-) &= X_1(t_{k+1})(1+W_{k+1}) \\ &= X_1(t_{k+1}) + B_{k+1}W_{k+1} \end{aligned} \quad (9.58)$$

ここで、

$$\left\{ \begin{aligned} X_{1,k+1}(-) &= \begin{bmatrix} x_{1,k+1}(-) \\ x_{2,k+1}(-) \\ x_{3,k+1}(-) \\ x_{4,k+1}(-) \end{bmatrix} \\ B_{k+1} &= \begin{bmatrix} b_{1,k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{3,k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2(t_{k+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3(t_{k+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4(t_{k+1}) \end{bmatrix} \\ W_{k+1} &= \begin{bmatrix} w_{1,k+1} \\ w_{2,k+1} \\ w_{3,k+1} \\ w_{4,k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (9.59)$$

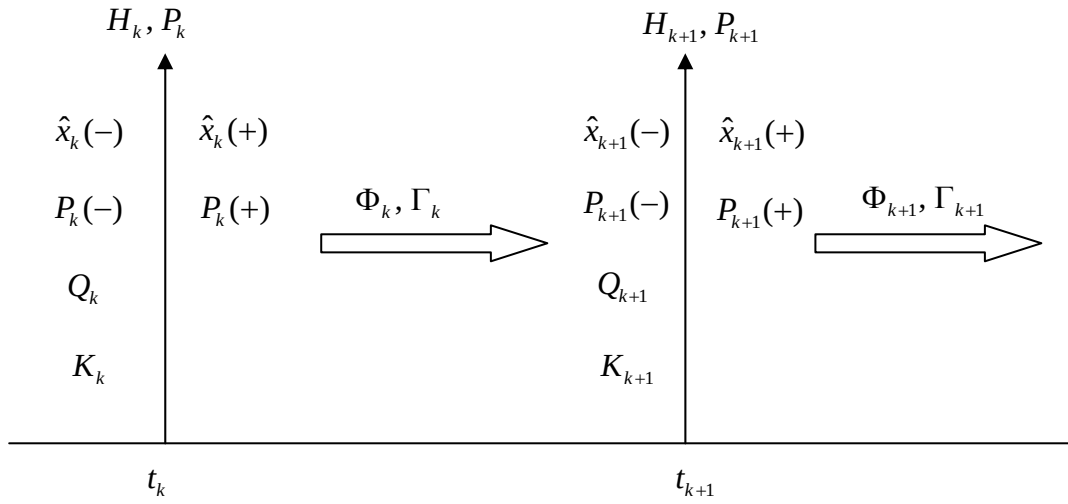


図9.2 状態変量・誤差共分散行列の伝達・更新概念図

式(9.58)と(9.59)にも示されるように、システム誤差は状態変量に比例している。システム誤差ベクトル W_{k+1} は次の統計的性質をもつものとする。

$$\begin{cases} E(W_{k+1}) = 0 \\ E(W_{k+1}W_{k+1}^T) = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9.60)$$

システム誤差として状態変量の $100\alpha_1\%$ ($\alpha_1 = 0.1 \sim 0.2$ が適当) の大きさを想定している。 W_{k+1} は式(9.60)の性質を有しているので、 $X_{1,k+1}(-)$ の推定値は式(9.58)から次式で与えられる。

$$\hat{X}_{1,k+1}(-) = E[X_{1,k+1}(-)] = \hat{X}_1(t_{k+1}) \quad (9.61)$$

すなわち、 $\hat{X}_{1,k+1}(-)$ は式(9.21)の伝達方程式を解いたときの $t = t_{k+1}$ における値に等しい。式(9.61)から式(9.58)を引くと、次式が得られる。

$$\{\hat{X}_{1,k+1}(-)\} - \{X_{1,k+1}(-)\} = \{\hat{X}_1(t_{k+1})\} - \{X_1(t_{k+1})\} - B_{k+1}W_{k+1} \quad (9.62)$$

すなわち、

$$\tilde{X}_{1,k+1}(-) = \tilde{X}_1(t_{k+1}) - B_{k+1}W_{k+1} \quad (9.63)$$

式(9.63)を用いることにより、推定誤差分散・共分散は次式で計算できる。

$$\begin{aligned}
 P_{1,k+1}(-) &= E \left[\tilde{X}_{1,k+1}(-) \tilde{X}_{1,k+1}^T(-) \right] \\
 &= P_{1,k+1} + B_{k+1} E \left(W_{k+1} W_{k+1}^T \right) B_{k+1}^T \\
 &= P_{1,k+1} + Q_{k+1}
 \end{aligned} \tag{9.64}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 Q_{k+1} &= B_{k+1} E \left(W_{k+1} W_{k+1}^T \right) B_{k+1}^T = B_{k+1} \left(\alpha_1^2 I \right) B_{k+1}^T \\
 &= \begin{bmatrix} \left\{ \alpha_1 \hat{x}_{1,k+1}(-) \right\}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left\{ \alpha_1 \hat{x}_{2,k+1}(-) \right\}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left\{ \alpha_1 \hat{x}_{3,k+1}(-) \right\}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left\{ \alpha_1 \hat{x}_{4,k+1}(-) \right\}^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{9.65}$$

式(9.64)の右辺第1項の $P_{1,k+1}$ は式(9.50)で計算される。式(9.65)においては、行列 B_{k+1} は状態変量推定値に依存して観測値入手直前まで変化するので、 α_1 が一定値であっても Q_{k+1} は時間的に変化していることになる。すなわち、システムノイズに非定常性が考慮されていることになる。しかも、計算が非常に容易であり、実際の運用にあたっても困難を生じない。

なお、 B_{k+1} の要素は式(9.61)に示されるように、観測値情報が入手される直前の $\hat{x}_{1,k+1}(-) \sim \hat{x}_{4,k+1}(-)$ を用いばよい。また、式(9.65)の Q_{k+1} は前述した通り(図9.2を参照)、観測値情報が入手される直前に作用させる。すなわち、予測計算期間中は式(9.50)～式(9.52)の伝達方程式を用い、 Q_{k+1} を作用させないことに留意すべきである。

9.5 観測方程式の定式化

カルマン・フィルター理論を適用するために、表4.2に示される式(2)「観測方程式」の定式化を行う。流出高を観測値とすると、式(9.37)で流量を流出高に変換した値と状態変量 x_1 と x_3 の間には式(9.4)の関係が成立するので、観測方程式を次のように定義する。

$$z_k = c_k (1 + v_k) \tag{9.66}$$

ここで、

$$c_k = x_{1,k}^{1/p_2} + x_{3,k} \tag{9.67}$$

z_k : サンプル時刻 k における流出高観測値、 v_k : 観測誤差

表4.2に示されるようにカルマン・フィルター理論は、元来、線形システム方程式と線形観測方程式に関して理論展開がなされている。このため、式(9.66)の非線形観測方程式は直接カルマン・フィルター理論に適用することができない。よって、式(9.66)の線形化を行う。

$$\begin{aligned}
 h(x_1, x_3) &= x_{1,k}^{1/p_2} + x_{3,k} \\
 &= h(x_1^*, x_3^*) + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right) (x_1 - x_1^*) + \left(\frac{\partial h}{\partial x_3} \right) (x_3 - x_3^*) \\
 &= H_k X_k + h_3
 \end{aligned} \tag{9.68}$$

ここで、

$$H_k = [H_1 \mid H_2], \quad H_1 = [h_1 \ 0 \ h_2 \ 0], \quad H_2 = [0 \ 0 \ 0] \tag{9.69}$$

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad X_1 = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T, \quad X_2 = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]^T \tag{9.70}$$

$$h_1 = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)_{x_1^*} = \frac{1}{p_2} (x_{1,k}^*)^{1/p_2-1} \tag{9.71}$$

$$h_2 = \left(\frac{\partial h}{\partial x_3} \right) = 1 \tag{9.72}$$

$$h_3 = h(x_1^*, x_3^*) - h_1 x_1^* - h_2 x_3^* \tag{9.73}$$

なお、上式に含まれている x_1^* の値として $\hat{x}_{1,k+1}(-)$ の値を用いればよい。

9.6 状態変量の更新方程式

観測値として流出高が得られた後、表4.2に示される式(9)「状態変量の更新方程式」は、次式で与えられる。

$$\hat{X}_k(+) = \hat{X}_k(-) + K_k \left[z_k - \left\{ [\hat{x}_{1,k}(-)]^{1/p_2} + \hat{x}_{3,k}(-) \right\} \right] \tag{9.74}$$

すなわち、 $z_k - [\hat{x}_{1,k}(-)]^{1/p_2} + \hat{x}_{3,k}(-)$ は流出高の観測値と貯留関数法による計算値との差を表わしており、 $\hat{X}_k(-)$ ベクトルを要素展開すると次式のようなになる。

$$\hat{X}_k(-) = \begin{bmatrix} \hat{X}_1(-) \\ \hat{X}_2(-) \end{bmatrix}_k \tag{9.75}$$

$$\left[\hat{X}_1(-) \right]_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(-) \\ \hat{x}_2(-) \\ \hat{x}_3(-) \\ \hat{x}_4(-) \end{bmatrix}_k \tag{9.76}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_2(-) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11}(-) \\ \hat{c}_{12}(-) \\ \hat{c}_{13}(-) \end{bmatrix}_k \quad (9.77)$$

式(9.74)を状態変量の要素を用いて表すと、「**状態変量の更新方程式**」は次のように表現できる。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(-) \end{bmatrix}_k + K_{1,k} \left[z_k - \left\{ \left[\hat{x}_{1,k}(-) \right]^{1/p_2} + \hat{x}_{3,k}(-) \right\} \right] \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_2(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_2(-) \end{bmatrix}_k + K_{2,k} \left[z_k - \left\{ \left[\hat{x}_{1,k}(-) \right]^{1/p_2} + \hat{x}_{3,k}(-) \right\} \right] \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_3(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_3(-) \end{bmatrix}_k + K_{3,k} \left[z_k - \left\{ \left[\hat{x}_{1,k}(-) \right]^{1/p_2} + \hat{x}_{3,k}(-) \right\} \right] \\ \begin{bmatrix} \hat{x}_4(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_4(-) \end{bmatrix}_k + K_{4,k} \left[z_k - \left\{ \left[\hat{x}_{1,k}(-) \right]^{1/p_2} + \hat{x}_{3,k}(-) \right\} \right] \end{cases} \quad (9.78)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{c}_{11}(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11}(-) \end{bmatrix}_k + K_{5,k} \left[z_k - \left\{ \left[\hat{x}_{1,k}(-) \right]^{1/p_2} + \hat{x}_{3,k}(-) \right\} \right] \\ \begin{bmatrix} \hat{c}_{12}(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{c}_{12}(-) \end{bmatrix}_k + K_{6,k} \left[z_k - \left\{ \left[\hat{x}_{1,k}(-) \right]^{1/p_2} + \hat{x}_{3,k}(-) \right\} \right] \\ \begin{bmatrix} \hat{c}_{13}(+) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{c}_{13}(-) \end{bmatrix}_k + K_{7,k} \left[z_k - \left\{ \left[\hat{x}_{1,k}(-) \right]^{1/p_2} + \hat{x}_{3,k}(-) \right\} \right] \end{cases} \quad (9.79)$$

式(9.78)と式(9.79)の $K_{i,k}$ ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) は、カルマン・ゲイン K_k の要素である。式(9.79)によれば、モデル定数 c_{11} 、 c_{12} および c_{13} は新しい観測値が入手されたのち更新されることになる。ここで注意すべき点は、予測雨量は別途レーダー雨量計などを用いた予測雨量モデルにより与えられるものであり、式(9.74)によって更新される性質のものではないということである。

9.7 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化

カルマン・フィルターを実行するには、表4.2に示される**式(4)「観測誤差分散」**が必要となる。 R_k は式(9.66)より次式で与えられる。

$$\begin{cases} R_k = E \left[(c_k v_k)^2 \right] = c_k^2 E \left[v_k^2 \right] = c_k^2 \alpha_2^2 \\ \alpha_2^2 = E \left[v_k^2 \right] \quad (\alpha_2 = 0.1 \sim 0.2) \end{cases} \quad (9.80)$$

すなわち、 α_2 については c_k (最新流出高推定値) の 10% ないし 20% の誤差を仮定するものとする。このとき、式(9.67)で定義される c_k に含まれる x_1 と x_3 の値として $\hat{x}_{1,k}(-)$ と $\hat{x}_{3,k}(-)$ を用いればよい。

9.8 カルマン・ゲインの算定

表4.2に示される**式(8)「カルマン・ゲイン」** K_k は、以下の手順で計算する。まず、分散・共分散行

列 $P_k(-)$ は式(9.45)に示すように以下で定義する。なお、予測雨量 r は別途与えられるので $U_{2,k}$ は $P_k(-)$ に含める必要がない。

$$P_k(-) = \left[\begin{array}{c|c} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ \hline P_{2,k}^T(-) & U_{1,k} \end{array} \right] \quad (9.81)$$

K_k には逆行列が含まれているが、観測方程式が一次元(スカラー量)式である場合には、この項はその逆数をとればよい。カルマン・ゲインに含まれる行列演算を式(9.69)の定係数ベクトル H_1 と式(9.45)の小行列を用いて行くと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} P_k(-)H_k^T &= \left[\begin{array}{c|c} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ \hline P_{2,k}^T(-) & U_{1,k}(-) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} H_1^T \\ 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{array} \right] \end{aligned} \quad (9.82)$$

式(9.69)に示されるように、ベクトル H_1 の要素は h_1 と h_2 および 0 である。式(9.82)の演算は行列 $P_{1,k}(-)$ と $P_{2,k}^T(-)$ のうち、第 1 列目の要素に h_1 を、第 3 列目の要素に h_2 を乗じた値となる。

表 4.2 に示される **式(8)** の右辺第 2 項を再記すれば、次式のようなになる。

$$\begin{aligned} H_k P_k(-)H_k^T + R_k &= \left[H_1 \mid 0 \right] \left[\begin{array}{c} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{array} \right] + R_k \\ &= H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k \end{aligned} \quad (9.83)$$

したがって、

$$\begin{aligned} S &= H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k \\ &= \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11}(-) & p_{12}(-) & p_{13}(-) & p_{14}(-) \\ p_{21}(-) & p_{22}(-) & p_{23}(-) & p_{24}(-) \\ p_{31}(-) & p_{32}(-) & p_{33}(-) & p_{34}(-) \\ p_{41}(-) & p_{42}(-) & p_{43}(-) & p_{44}(-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \\ h_2 \\ 0 \end{bmatrix} + R_k \\ &= h_1^2 p_{11}(-) + h_2^2 p_{33}(-) + 2h_1 h_2 p_{13}(-) + R_k \end{aligned} \quad (9.84)$$

カルマン・ゲイン K_k は、式(9.82)をスカラー量である式(9.84)で割ればよいので、次式で容易に計算される。

$$K_k = \left[\begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{array} \right] S^{-1} \quad (9.85)$$

9.9 状態変量の推定誤差共分散更新方程式

表4.2に示される式(10)「推定誤差共分散の更新方程式」は次のように変形される。

$$\begin{aligned}
 I - K_k H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1,k} \\ K_{2,k} \\ K_{3,k} \\ K_{4,k} \\ K_{5,k} \\ K_{6,k} \\ K_{7,k} \end{bmatrix} [h_1 \ 0 \ h_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 K_{1,k} & 0 & h_2 K_{1,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{2,k} & 0 & h_2 K_{2,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{3,k} & 0 & h_2 K_{3,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{4,k} & 0 & h_2 K_{4,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline h_1 K_{5,k} & 0 & h_2 K_{5,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{6,k} & 0 & h_2 K_{6,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{7,k} & 0 & h_2 K_{7,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.86) \\
 &= \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ \hline M_2 & I \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 - h_1 K_{1,k} & 0 & -h_2 K_{1,k} & 0 \\ -h_1 K_{2,k} & 1 & -h_2 K_{2,k} & 0 \\ -h_1 K_{3,k} & 0 & 1 - h_2 K_{3,k} & 0 \\ -h_1 K_{4,k} & 0 & -h_2 K_{4,k} & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -h_1 K_{5,k} & 0 & -h_2 K_{5,k} & 0 \\ -h_1 K_{6,k} & 0 & -h_2 K_{6,k} & 0 \\ -h_1 K_{7,k} & 0 & -h_2 K_{7,k} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.87)$$

上式に示される行列 M_1 と M_2 を定義すれば、誤差分散・共分散行列は次式で更新される。

$$\begin{aligned}
 P_k(+) &= \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ \hline M_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ \hline P_{2,k}^T(-) & U_{1,k}(-) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} M_1 P_{1,k}(-) & M_1 P_{2,k}(-) \\ \hline M_2 P_{1,k}(-) + P_{2,k}^T(-) & M_2 P_{2,k}(-) + U_{1,k}(-) \end{bmatrix} \quad (9.88)
 \end{aligned}$$

すなわち、 $P_k(+)$ の小行列は次式で計算される。

$$\begin{cases} P_{1,k}(+) = M_1 P_{1,k}(-) \\ P_{2,k}(+) = M_1 P_{2,k}(-) = P_{1,k}^T(-) M_2^T + P_{2,k}(-) \\ U_{1,k}(+) = M_2 P_{2,k}(-) + U_{1,k}(-) \end{cases} \quad (9.89)$$

ここで、 $P_{1,k}(+)$: X_1 に関する (4×4) の分散・共分散行列、 $P_{2,k}(+)$: X_1 と X_2 に関する (4×3) の共分散行列、 $U_{1,k}(+)$: X_2 に関する (3×3) の分散・共分散行列

式(9.89)によれば、新しい観測値が入手される毎に、状態変数ベクトル X_1 と X_2 の分散・共分散が更新される。同様に、モデル定数 c_{11} 、 c_{12} および c_{13} の分散・共分散行列も更新されることに着目すべきである。

9.10 単一流域を対象とした洪水予測モデルの適用例

平成 13 年 9 月洪水において石狩川納内地点(流域面積 3558.0km²)を対象に、2 段タンク型貯留関数法に予測雨量の誤差を考慮しカルマン・フィルタ理論を適用した予測モデルを用いて洪水予測を行う。

(1) 初期条件の設定

予測計算を行う際の状態変数及びその推定誤差分散・共分散の伝達方程式(表 4.2 式(6)及び式(7))を解くために初期値を設定しなくてはならない。そこで状態変数及びその推定誤差分散・共分散は次のように設定する。

表 9.3 状態変数の初期条件

x_1	x_2	x_3	x_4	c_{11}	c_{12}	c_{13}
$q_B^{p_2}$	0	0	0	8.081	0.272	2.453

x_1 に含まれる q_B は初期流出高であり、貯留指数 p_1 と p_2 はそれぞれ、0.6 と 0.4648 を与える。 x_2 と x_4 は dx_1/dt と dx_3/dt であるので、初期値は 0 を与える。また c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} と T_c の値は、表 9.1 の石狩川水系における平均値を用いた。

表 9.4 状態変数の誤差分散・共分散の初期条件

x_1 の誤差分散	x_2 の誤差分散	x_3 の誤差分散	x_4 の誤差分散	σ_{11}^2	σ_{12}^2	σ_{13}^2
$(0.1x_1)^2$	$(0.1x_1)^2$	$(0.1k_{13}q_B)^2$	$(0.1k_{13}q_B)^2$	$(0.2c_{11})^2$	$(0.2c_{12})^2$	$(0.2c_{13})^2$

式(9.55)の $U_{1,k}$ は X_2 の分散・共分散行列であり、その要素 σ_{11}^2 、 σ_{12}^2 、 σ_{13}^2 は、モデル定数の分散の初期値である。今回は経験的に初期値をそれぞれ c_{11} 、 c_{12} 、 c_{13} の 2 割を設定した。

表 9.3 に示すように、地下水流出成分の計算における状態変数 x_3 と x_4 の初期条件はゼロに設定した。しかしながら、 x_3 と x_4 の誤差分散は時間的に逐次伝達されるので、初期条件をゼロとするのは不合理である。浸透供給量の初期値は、 $b = k_{13}q_B$ (q_B : 初期流出高) で与えられる。したがって、 x_3 と x_4 の誤差分散初期値はその大きさから言っても、 $(0.1k_{13}q_B)^2$ 程度が適当であろうと考える。同様に x_2 の誤差分散を $(0.1x_1)^2$ に設定した。

(2) 計算条件の設定

表9.5 計算条件

減衰係数 δ	2.1
分離時定数 T_c	52.488
平均降雨強度 $\bar{r}$	2.138mm/h
計算時間間隔 nl	12
観測誤差分散 R_k	$\left\{0.1(x_{1,k}^{1/p_2} + x_{3,k})\right\}^2$
システム誤差分散 $Q_{1,k} \sim Q_{4,k}$	$(0.1x_{1,k})^2 \sim (0.1x_{4,k})^2$

観測誤差分散 R_k は、式(9.67)と式(9.80)より $\left\{0.1(x_{1,k}^{1/p_2} + x_{3,k})\right\}^2$ を与え、システム誤差分散 $Q_{1,k} \sim Q_{4,k}$ は、式(9.65)よりそれぞれ $(0.1x_{1,k})^2 \sim (0.1x_{4,k})^2$ を与える。また、平均降雨強度 $\bar{r}$ は既往洪水の平均値とし、1時間あたりの計算時間分割数 nl は12と設定した。

実際の洪水予測を想定し、対象洪水より一年前の水位～流量曲線を使用する（図9.3参照）。表9.6に示される、 a と b は式(9.38)の係数である。また、 b_0 と b_1 は式(9.40)より算出した。

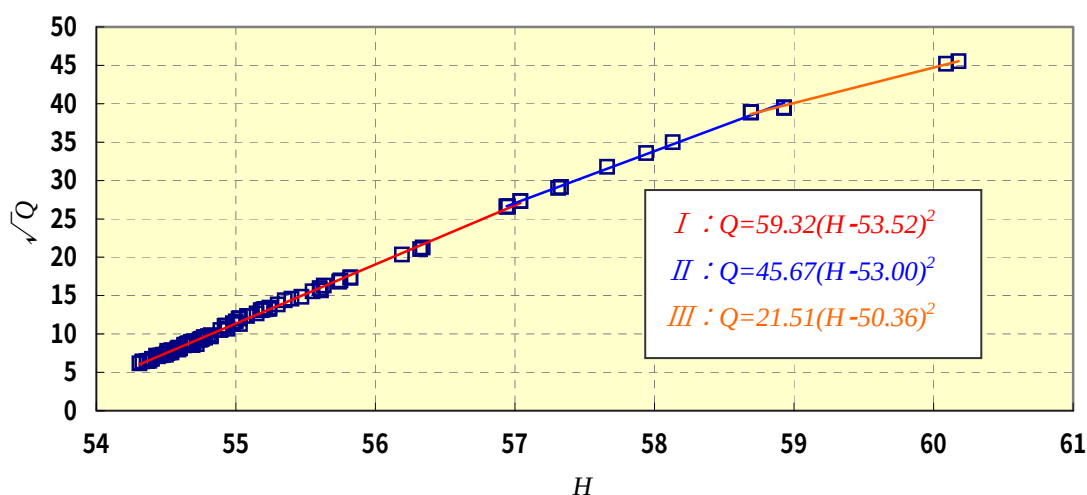


図9.3 水位～流量曲線図 納内地点 (平成12年)

表9.6 水位～流量曲線

曲線分類	I	II	III
適用期間	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24	01/01 01～12/31 24
適用水位(m)	54.32～57.24	57.25～58.78	58.79～59.02
a	59.32	45.67	21.51
b	-53.52	-53.00	-50.36
b_0	53.52	53.00	50.36
b_1	0.1298	0.1480	0.2156

表9.7に、予測計算に必要な実測雨量と実績水位を示す。また、流量および流出高は図9.3に示す水位～流量曲線を用いて算出した。

表9.7に示すように、ピーク水位は65時間目に起こっており、その値は60.09mである。

表9.7 洪水データ一覧表

地点名 : 納内地点

洪水期間 : 平成13年9月9日1:00~15日24:00

時間	雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)	時間	雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)
1	0.00	55.05	0.14	138.86	43	2.82	56.49	0.53	523.26
2	0.00	55.03	0.14	135.26	44	3.99	56.61	0.57	566.39
3	0.00	55.01	0.13	131.70	45	1.63	56.78	0.64	630.43
4	0.00	55.01	0.13	131.70	46	2.20	56.95	0.71	697.89
5	0.00	55.00	0.13	129.93	47	3.63	57.16	0.80	785.97
6	0.00	54.98	0.13	126.45	48	6.28	57.44	0.91	900.32
7	0.29	54.97	0.13	124.72	49	3.93	57.74	1.04	1026.10
8	0.46	54.96	0.12	123.01	50	4.19	57.92	1.12	1105.51
9	2.42	54.95	0.12	121.30	51	3.59	58.10	1.20	1187.88
10	2.38	54.95	0.12	121.30	52	2.91	58.27	1.28	1268.39
11	3.00	54.93	0.12	117.93	53	4.37	58.45	1.37	1356.51
12	4.74	54.93	0.12	117.93	54	5.01	58.57	1.43	1416.91
13	1.36	54.93	0.12	117.93	55	5.99	58.70	1.50	1483.82
14	0.14	54.92	0.12	116.27	56	7.45	58.82	1.56	1539.50
15	1.70	54.93	0.12	117.93	57	4.73	58.96	1.61	1590.88
16	3.56	55.06	0.14	140.68	58	3.66	59.09	1.66	1639.34
17	4.90	55.43	0.22	216.41	59	3.73	59.22	1.71	1688.53
18	5.58	56.05	0.38	379.70	60	4.25	59.42	1.79	1765.62
19	3.67	56.78	0.64	630.43	61	5.23	59.61	1.86	1840.45
20	1.66	57.44	0.91	900.32	62	4.24	59.81	1.94	1920.90
21	0.24	57.68	1.01	1000.28	63	4.28	59.98	2.01	1990.63
22	0.03	57.79	1.06	1047.86	64	0.96	60.07	2.05	2028.05
23	0.00	57.89	1.10	1092.07	65	0.65	60.09	2.06	2036.41
24	0.00	57.96	1.14	1123.55	66	1.01	60.04	2.04	2015.54
25	0.00	57.98	1.15	1132.63	67	0.99	59.95	2.00	1978.23
26	0.00	57.89	1.10	1092.07	68	1.80	59.83	1.95	1929.04
27	0.05	57.72	1.03	1017.46	69	1.40	59.73	1.91	1888.51
28	0.31	57.44	0.91	900.32	70	1.57	59.58	1.85	1828.53
29	0.03	57.11	0.77	764.52	71	1.19	59.40	1.78	1757.83
30	0.00	57.04	0.74	735.00	72	0.99	59.19	1.70	1677.11
31	0.00	57.01	0.73	722.52	73	0.38	58.95	1.61	1587.18
32	0.00	56.97	0.71	706.06	74	0.13	58.73	1.52	1499.48
33	0.03	56.94	0.70	693.83	75	0.47	58.55	1.42	1406.75
34	0.18	56.91	0.69	681.71	76	0.36	58.39	1.34	1326.81
35	1.29	56.84	0.66	653.85	77	0.21	58.26	1.28	1263.58
36	0.87	56.70	0.61	599.87	78	0.22	58.13	1.22	1201.89
37	0.49	56.54	0.55	541.02	79	0.73	58.01	1.16	1146.32
38	1.40	56.40	0.50	492.02	80	0.47	57.89	1.10	1092.07
39	2.90	56.31	0.47	461.75	81	0.03	57.78	1.06	1043.49
40	5.21	56.27	0.45	448.61	82	0.29	57.68	1.01	1000.28
41	4.44	56.25	0.45	442.11	83	0.16	57.57	0.97	953.81
42	4.07	56.31	0.47	461.75	84	0.29	57.48	0.93	916.61

表9.7 洪水データ一覧表(つづき)

時間	雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)	時間	雨量 (mm/h)	実績水位 (m)	流出高 (mm/h)	流量 (m ³ /s)
85	0.31	57.38	0.89	876.15	127	0.00	55.81	0.31	311.08
86	0.35	57.30	0.85	844.44	128	0.00	55.80	0.31	308.37
87	0.23	57.22	0.82	812.09	129	0.00	55.78	0.31	302.98
88	0.20	57.15	0.79	781.65	130	0.00	55.78	0.31	302.98
89	0.17	57.08	0.76	751.80	131	0.00	55.76	0.30	297.64
90	0.11	56.95	0.71	697.89	132	0.00	55.74	0.30	292.35
91	0.00	56.87	0.67	665.72	133	0.00	55.73	0.29	289.72
92	0.00	56.82	0.65	645.99	134	0.00	55.71	0.29	284.50
93	0.03	56.76	0.63	622.72	135	0.00	55.70	0.29	281.91
94	0.14	56.71	0.61	603.65	136	0.00	55.69	0.28	279.33
95	0.08	56.67	0.60	588.60	137	0.00	55.67	0.28	274.21
96	0.04	56.62	0.58	570.06	138	0.00	55.66	0.27	271.66
97	0.00	56.58	0.56	555.45	139	0.00	55.66	0.27	271.66
98	0.00	56.54	0.55	541.02	140	0.00	55.65	0.27	269.13
99	0.00	56.49	0.53	523.26	141	0.00	55.64	0.27	266.61
100	0.00	56.45	0.52	509.26	142	0.00	55.63	0.27	264.10
101	0.02	56.41	0.50	495.45	143	0.00	55.62	0.26	261.60
102	0.06	56.39	0.49	488.61	144	0.00	55.60	0.26	256.64
103	0.05	56.35	0.48	475.09	145	0.00	55.58	0.25	251.73
104	0.00	56.31	0.47	461.75	146	0.00	55.56	0.25	246.87
105	0.00	56.28	0.46	451.88	147	0.00	55.55	0.25	244.45
106	0.00	56.26	0.45	445.35	148	0.00	55.55	0.25	244.45
107	0.00	56.23	0.44	435.65	149	0.00	55.53	0.24	239.66
108	0.00	56.20	0.43	426.06	150	0.00	55.52	0.24	237.28
109	0.00	56.17	0.42	416.57	151	0.00	55.51	0.24	234.91
110	0.00	56.15	0.42	410.31	152	0.00	55.50	0.24	232.56
111	0.00	56.13	0.41	404.09	153	0.00	55.49	0.23	230.22
112	0.04	56.10	0.40	394.86	154	0.00	55.48	0.23	227.88
113	0.04	56.08	0.39	388.76	155	0.00	55.48	0.23	227.88
114	0.00	56.05	0.38	379.70	156	0.00	55.47	0.23	225.56
115	0.00	56.03	0.38	373.72	157	0.00	55.46	0.23	223.26
116	0.00	56.01	0.37	367.79	158	0.00	55.45	0.22	220.96
117	0.00	55.99	0.37	361.91	159	0.00	55.44	0.22	218.68
118	0.00	55.96	0.36	353.17	160	0.00	55.42	0.22	214.14
119	0.00	55.94	0.35	347.40	161	0.00	55.42	0.22	214.14
120	0.00	55.93	0.35	344.54	162	0.00	55.42	0.22	214.14
121	0.00	55.91	0.34	338.84	163	0.00	55.41	0.21	211.90
122	0.04	55.90	0.34	336.01	164	0.00	55.39	0.21	207.44
123	0.00	55.88	0.33	330.39	165	0.00	55.39	0.21	207.44
124	0.00	55.86	0.33	324.81	166	0.00	55.38	0.21	205.22
125	0.00	55.84	0.32	319.28	167	0.00	55.38	0.21	205.22
126	0.00	55.83	0.32	316.54	168	0.00	55.37	0.21	203.02

(3) 洪水予測シミュレーション

前述した初期条件、計算条件をもとに納内地点において、表9.7に示す雨量と実績水位から算出した1時間～3時間先予測までの予測シミュレーションを行った。その際に、実際の予測計算を考慮し予測雨量算出時のみ過去3時間の移動平均雨量を用いた。その結果を図9.4に示す。逐次更新されるパラメータ (c_{11} , c_{12} , c_{13}) の値は初期値を100%として1時間ごとの変化率で図9.5に示すとおりモデル定数の時間変動率は後半から安定している。 c_{13} の変化率がもっとも大きい、20%以内に収まっている。

1時間～3時間先予測までの予測水位と標準偏差およびパラメータの更新値を表9.9に示す。

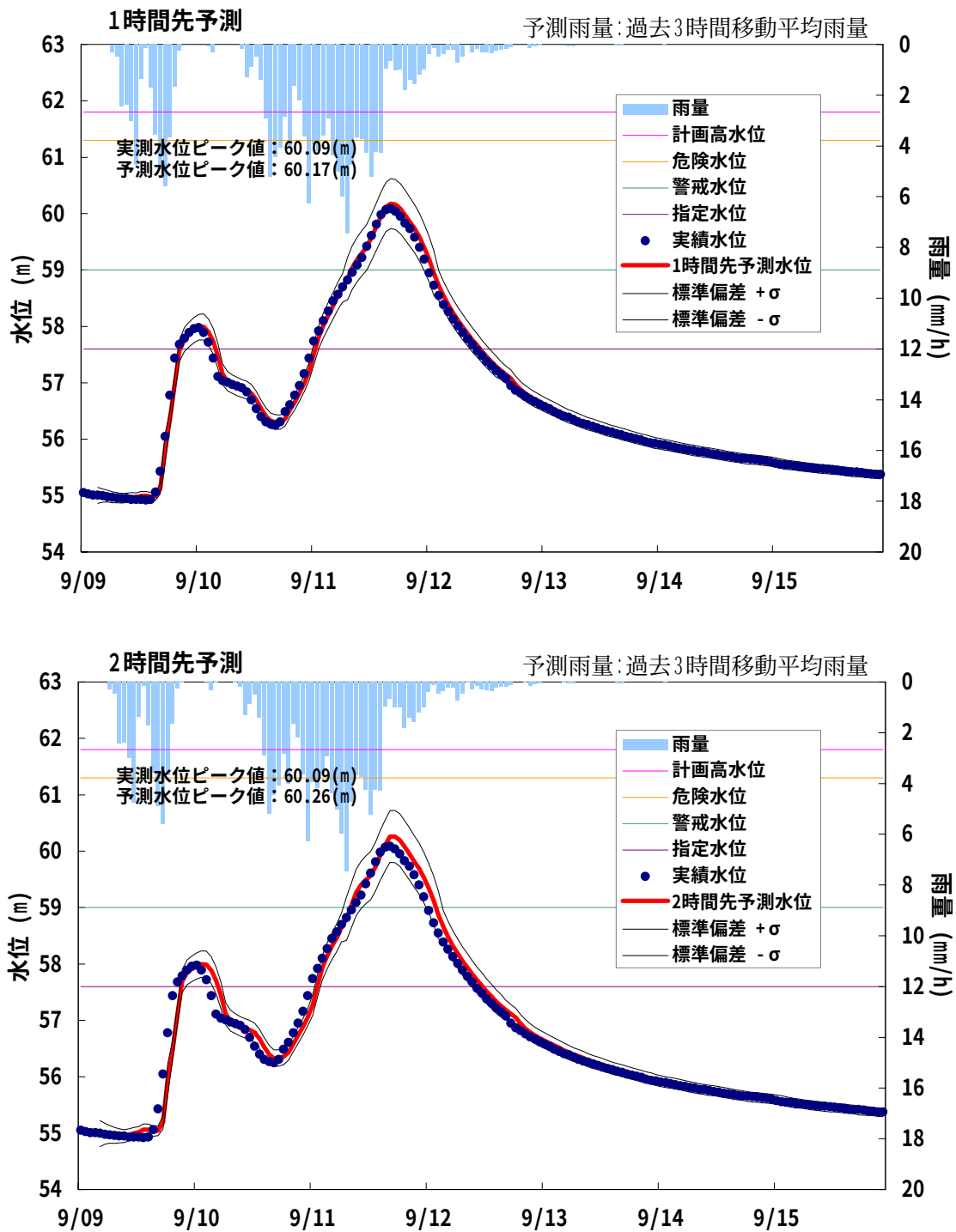


図9.4 洪水予測シミュレーション図 納内地点 (平成13年洪水)

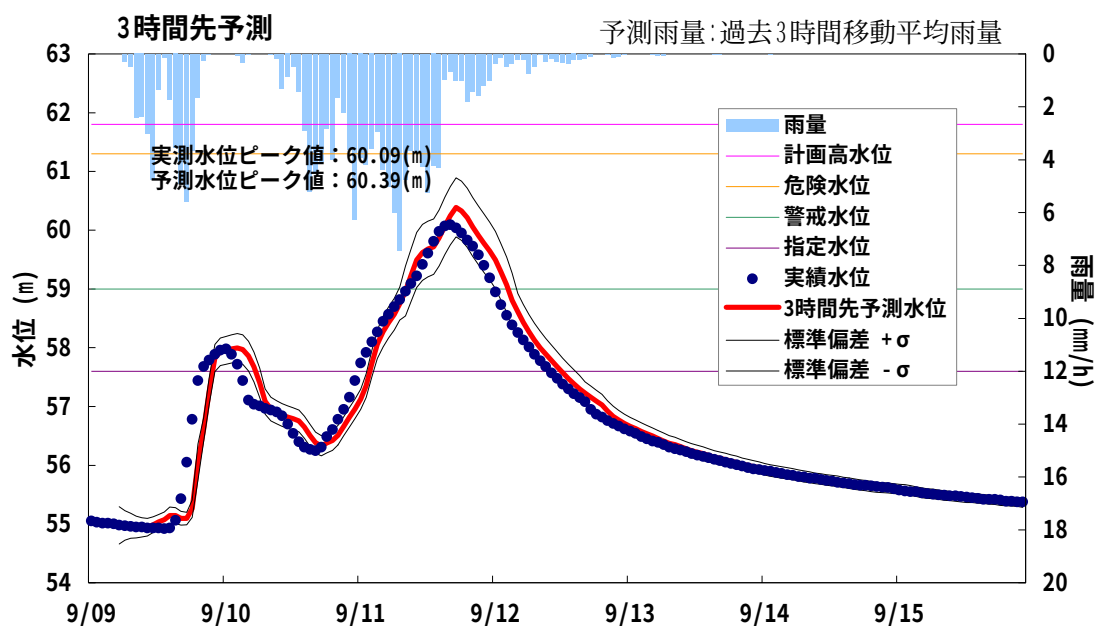


図9.4 洪水予測シミュレーション図 納内地点 (平成13年洪水)

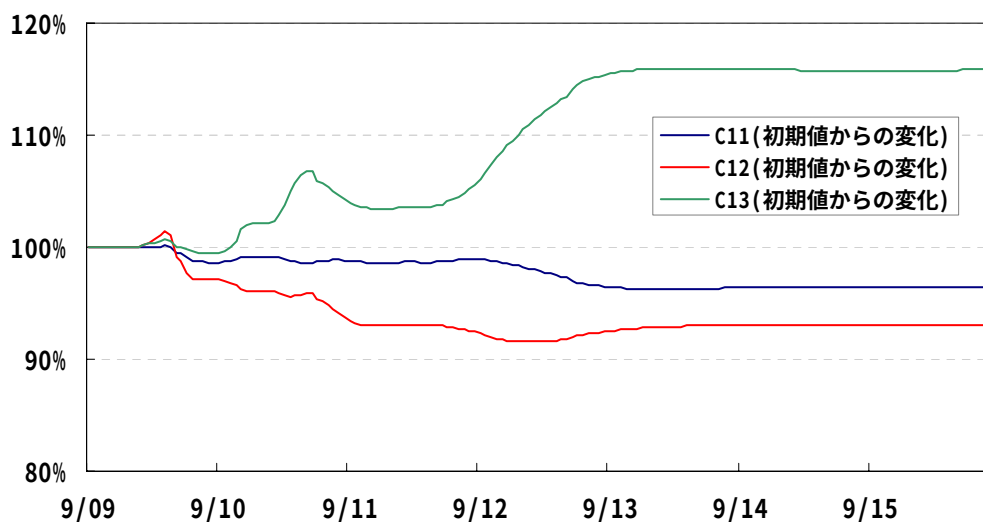


図9.5 パラメータ更新値の変化率

洪水の再現性を評価する方法として、予測水位 H_{ci} (m) と実測水位 H_{oi} (m) の平均2乗誤差の平方根 (RMSE: Root Mean Squares Error) を用いた。表9.8に計算結果を示す。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_{ci} - H_{oi})^2} \quad (9.90)$$

表9.8 2段タンク型貯留関数法を用いた予測水位の比較

	1時間先予測	2時間先予測	3時間先予測
実測ピーク水位	60.09m	60.09m	60.09m
予測ピーク水位	60.18m	60.26m	60.39m
予測水位+標準偏差	60.62m	60.72m	60.89m
RMSE	0.10m	0.19m	0.28m

表9.9 洪水予測シミュレーション結果一覧表

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
1	55.05	55.05	55.05	0.28	0.42	0.56	8.081	0.272	2.453
2	55.03	55.02	55.01	0.17	0.30	0.42	8.081	0.272	2.453
3	55.00	54.99	54.98	0.14	0.23	0.32	8.081	0.272	2.453
4	55.00	54.99	54.98	0.12	0.18	0.25	8.081	0.272	2.453
5	54.99	54.98	54.97	0.10	0.16	0.21	8.081	0.272	2.453
6	54.97	54.96	54.95	0.10	0.14	0.19	8.081	0.272	2.453
7	54.96	54.95	54.94	0.09	0.13	0.16	8.081	0.272	2.453
8	54.95	54.95	54.95	0.08	0.11	0.15	8.081	0.272	2.453
9	54.96	54.97	54.99	0.08	0.11	0.13	8.081	0.272	2.454
10	54.97	55.00	55.03	0.08	0.10	0.13	8.080	0.272	2.454
11	54.97	55.02	55.07	0.08	0.10	0.13	8.079	0.273	2.457
12	54.99	55.06	55.14	0.08	0.10	0.15	8.079	0.273	2.460
13	55.00	55.06	55.14	0.08	0.10	0.14	8.081	0.274	2.463
14	54.98	55.04	55.10	0.08	0.09	0.12	8.085	0.275	2.468
15	54.99	55.04	55.09	0.07	0.09	0.11	8.090	0.276	2.471
16	55.12	55.19	55.26	0.09	0.12	0.15	8.082	0.275	2.466
17	55.84	55.94	56.05	0.26	0.28	0.31	8.044	0.270	2.452
18	56.34	56.47	56.61	0.15	0.17	0.20	8.037	0.269	2.453
19	56.98	57.12	57.26	0.15	0.17	0.23	8.009	0.266	2.449
20	57.57	57.70	57.83	0.19	0.20	0.23	7.981	0.264	2.443
21	57.77	57.85	57.93	0.21	0.22	0.23	7.975	0.264	2.442
22	57.86	57.91	57.95	0.22	0.23	0.24	7.973	0.264	2.441
23	57.94	57.97	57.98	0.23	0.23	0.24	7.971	0.264	2.440
24	57.99	58.00	57.99	0.23	0.23	0.25	7.970	0.264	2.439
25	57.99	57.99	57.97	0.23	0.24	0.25	7.970	0.264	2.439
26	57.90	57.89	57.86	0.23	0.24	0.25	7.975	0.264	2.443
27	57.74	57.71	57.68	0.23	0.24	0.25	7.983	0.264	2.452
28	57.47	57.44	57.41	0.22	0.23	0.25	7.994	0.263	2.467
29	57.15	57.12	57.09	0.19	0.20	0.21	8.008	0.262	2.492
30	57.03	56.99	56.96	0.17	0.18	0.20	8.011	0.261	2.503
31	56.98	56.94	56.90	0.16	0.18	0.19	8.012	0.261	2.505
32	56.93	56.90	56.86	0.16	0.17	0.19	8.012	0.261	2.506
33	56.90	56.86	56.82	0.16	0.17	0.19	8.012	0.261	2.505
34	56.87	56.83	56.79	0.16	0.17	0.19	8.012	0.261	2.504
35	56.82	56.78	56.76	0.16	0.17	0.19	8.011	0.261	2.508
36	56.70	56.67	56.65	0.15	0.17	0.19	8.005	0.261	2.523
37	56.55	56.53	56.51	0.15	0.17	0.19	7.996	0.260	2.547
38	56.41	56.40	56.38	0.14	0.16	0.18	7.985	0.260	2.574
39	56.33	56.33	56.33	0.14	0.15	0.17	7.975	0.260	2.595
40	56.31	56.34	56.38	0.13	0.14	0.17	7.968	0.260	2.609
41	56.30	56.36	56.42	0.13	0.14	0.17	7.962	0.261	2.620
42	56.36	56.43	56.51	0.13	0.14	0.17	7.962	0.261	2.619

表9.9 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
43	56.52	56.59	56.67	0.13	0.14	0.16	7.974	0.259	2.600
44	56.66	56.74	56.82	0.13	0.14	0.17	7.980	0.259	2.592
45	56.82	56.89	56.96	0.14	0.15	0.17	7.985	0.258	2.582
46	56.99	57.06	57.12	0.15	0.15	0.17	7.988	0.257	2.574
47	57.20	57.27	57.35	0.16	0.18	0.20	7.988	0.256	2.565
48	57.50	57.62	57.73	0.19	0.20	0.23	7.985	0.255	2.556
49	57.81	57.93	58.06	0.20	0.21	0.24	7.980	0.254	2.549
50	58.02	58.14	58.27	0.22	0.23	0.26	7.977	0.254	2.546
51	58.20	58.31	58.43	0.23	0.24	0.26	7.973	0.253	2.542
52	58.36	58.47	58.57	0.24	0.25	0.27	7.970	0.253	2.539
53	58.54	58.65	58.75	0.24	0.25	0.28	7.965	0.253	2.536
54	58.68	58.80	58.96	0.25	0.38	0.42	7.964	0.253	2.535
55	58.85	59.04	59.23	0.38	0.40	0.44	7.964	0.253	2.534
56	59.04	59.27	59.49	0.39	0.41	0.47	7.965	0.253	2.536
57	59.19	59.40	59.62	0.39	0.42	0.48	7.968	0.253	2.538
58	59.30	59.49	59.68	0.40	0.42	0.47	7.972	0.253	2.540
59	59.41	59.57	59.72	0.41	0.43	0.47	7.975	0.253	2.543
60	59.58	59.73	59.87	0.41	0.43	0.48	7.974	0.253	2.542
61	59.77	59.93	60.07	0.42	0.44	0.49	7.973	0.253	2.541
62	59.96	60.11	60.25	0.43	0.45	0.50	7.972	0.253	2.540
63	60.12	60.26	60.39	0.44	0.46	0.51	7.971	0.253	2.539
64	60.18	60.26	60.33	0.44	0.46	0.50	7.972	0.253	2.540
65	60.16	60.20	60.21	0.44	0.47	0.50	7.974	0.253	2.543
66	60.09	60.08	60.06	0.44	0.47	0.50	7.978	0.253	2.547
67	59.98	59.95	59.91	0.44	0.46	0.50	7.982	0.253	2.552
68	59.85	59.82	59.78	0.43	0.46	0.50	7.986	0.253	2.558
69	59.73	59.69	59.65	0.43	0.45	0.49	7.988	0.252	2.563
70	59.58	59.54	59.49	0.42	0.45	0.49	7.990	0.252	2.570
71	59.40	59.35	59.29	0.41	0.44	0.48	7.992	0.252	2.579
72	59.19	59.13	59.07	0.41	0.43	0.47	7.993	0.252	2.589
73	58.94	58.88	58.81	0.40	0.42	0.46	7.992	0.251	2.602
74	58.72	58.67	58.61	0.26	0.28	0.31	7.989	0.251	2.617
75	58.54	58.49	58.43	0.26	0.28	0.30	7.984	0.250	2.633
76	58.38	58.32	58.27	0.25	0.27	0.30	7.978	0.250	2.649
77	58.24	58.18	58.13	0.24	0.26	0.29	7.972	0.250	2.662
78	58.11	58.05	58.00	0.23	0.25	0.28	7.964	0.249	2.675
79	57.99	57.94	57.89	0.22	0.25	0.27	7.956	0.249	2.686
80	57.87	57.83	57.78	0.22	0.24	0.26	7.947	0.249	2.698
81	57.76	57.72	57.67	0.21	0.23	0.26	7.938	0.249	2.710
82	57.66	57.62	57.58	0.21	0.23	0.25	7.929	0.249	2.720
83	57.56	57.51	57.47	0.20	0.22	0.24	7.918	0.249	2.731
84	57.46	57.42	57.39	0.20	0.21	0.24	7.908	0.249	2.741

表9.9 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
85	57.37	57.33	57.30	0.19	0.21	0.23	7.897	0.249	2.751
86	57.29	57.25	57.23	0.19	0.20	0.19	7.887	0.249	2.759
87	57.21	57.18	57.16	0.16	0.17	0.19	7.877	0.249	2.768
88	57.14	57.12	57.09	0.16	0.17	0.18	7.868	0.250	2.775
89	57.08	57.05	57.03	0.15	0.16	0.18	7.858	0.250	2.783
90	56.97	56.95	56.92	0.15	0.16	0.18	7.840	0.250	2.797
91	56.88	56.86	56.83	0.15	0.16	0.17	7.826	0.251	2.808
92	56.82	56.79	56.77	0.14	0.15	0.16	7.818	0.251	2.814
93	56.76	56.73	56.71	0.14	0.15	0.16	7.811	0.251	2.820
94	56.71	56.68	56.66	0.13	0.14	0.15	7.805	0.251	2.824
95	56.66	56.64	56.62	0.13	0.14	0.15	7.801	0.251	2.827
96	56.62	56.60	56.58	0.13	0.14	0.15	7.797	0.252	2.830
97	56.57	56.56	56.54	0.13	0.13	0.14	7.793	0.252	2.833
98	56.53	56.52	56.50	0.12	0.13	0.14	7.791	0.252	2.835
99	56.49	56.47	56.45	0.12	0.13	0.14	7.788	0.252	2.837
100	56.45	56.43	56.41	0.12	0.12	0.13	7.785	0.252	2.839
101	56.41	56.39	56.38	0.12	0.12	0.13	7.783	0.252	2.841
102	56.38	56.37	56.35	0.11	0.12	0.13	7.782	0.252	2.841
103	56.35	56.33	56.32	0.11	0.12	0.12	7.782	0.252	2.842
104	56.31	56.29	56.28	0.11	0.12	0.12	7.781	0.253	2.843
105	56.28	56.26	56.25	0.11	0.11	0.12	7.780	0.253	2.844
106	56.25	56.24	56.22	0.11	0.11	0.12	7.780	0.253	2.844
107	56.22	56.21	56.20	0.11	0.11	0.11	7.780	0.253	2.844
108	56.20	56.18	56.17	0.11	0.11	0.11	7.780	0.253	2.845
109	56.17	56.15	56.14	0.11	0.11	0.11	7.781	0.253	2.845
110	56.14	56.13	56.12	0.10	0.11	0.11	7.781	0.253	2.845
111	56.12	56.11	56.10	0.10	0.11	0.11	7.781	0.253	2.845
112	56.10	56.08	56.07	0.10	0.10	0.11	7.782	0.253	2.845
113	56.07	56.06	56.05	0.10	0.10	0.11	7.782	0.253	2.844
114	56.05	56.03	56.02	0.10	0.10	0.10	7.783	0.253	2.844
115	56.02	56.01	56.00	0.10	0.10	0.10	7.784	0.253	2.844
116	56.00	55.99	55.98	0.10	0.10	0.10	7.784	0.253	2.844
117	55.98	55.97	55.96	0.10	0.10	0.10	7.785	0.253	2.844
118	55.96	55.95	55.93	0.10	0.10	0.10	7.786	0.253	2.843
119	55.93	55.92	55.91	0.10	0.10	0.10	7.787	0.253	2.843
120	55.92	55.91	55.90	0.09	0.10	0.10	7.787	0.253	2.843
121	55.90	55.89	55.88	0.09	0.10	0.10	7.788	0.253	2.843
122	55.89	55.88	55.87	0.09	0.09	0.10	7.788	0.253	2.842
123	55.87	55.86	55.85	0.09	0.09	0.09	7.788	0.253	2.842
124	55.85	55.84	55.83	0.09	0.09	0.09	7.789	0.253	2.842
125	55.83	55.82	55.81	0.09	0.09	0.09	7.789	0.253	2.842
126	55.82	55.81	55.80	0.09	0.09	0.09	7.790	0.253	2.841

表9.9 洪水予測シミュレーション結果一覧表(つづき)

時間	予測水位(m)			標準偏差 σ (m)			パラメータ		
	1-hour	2-hour	3-hour	1-hour	2-hour	3-hour	c_{11}	c_{12}	c_{13}
127	55.80	55.79	55.78	0.09	0.09	0.09	7.790	0.253	2.841
128	55.79	55.78	55.77	0.09	0.09	0.09	7.790	0.253	2.841
129	55.77	55.76	55.75	0.09	0.09	0.09	7.791	0.253	2.841
130	55.77	55.75	55.74	0.09	0.09	0.09	7.790	0.253	2.841
131	55.75	55.74	55.73	0.09	0.09	0.09	7.790	0.253	2.841
132	55.73	55.72	55.71	0.09	0.09	0.09	7.791	0.253	2.841
133	55.72	55.71	55.70	0.09	0.09	0.09	7.791	0.253	2.840
134	55.70	55.69	55.68	0.09	0.09	0.09	7.792	0.253	2.840
135	55.69	55.68	55.67	0.09	0.09	0.09	7.792	0.253	2.840
136	55.68	55.67	55.66	0.09	0.09	0.09	7.792	0.253	2.840
137	55.66	55.65	55.64	0.08	0.09	0.09	7.792	0.253	2.840
138	55.65	55.64	55.63	0.08	0.08	0.09	7.792	0.253	2.840
139	55.64	55.63	55.62	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.840
140	55.64	55.63	55.61	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.840
141	55.63	55.62	55.61	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.840
142	55.62	55.61	55.60	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.841
143	55.61	55.60	55.59	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.841
144	55.59	55.58	55.57	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.840
145	55.57	55.56	55.55	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.840
146	55.55	55.54	55.53	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.839
147	55.54	55.53	55.52	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.839
148	55.54	55.52	55.51	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.840
149	55.52	55.51	55.50	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.839
150	55.51	55.50	55.49	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.839
151	55.50	55.49	55.48	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.839
152	55.49	55.48	55.47	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.839
153	55.48	55.47	55.46	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.839
154	55.47	55.46	55.45	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.840
155	55.47	55.45	55.44	0.08	0.08	0.08	7.792	0.253	2.840
156	55.46	55.45	55.44	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.840
157	55.45	55.44	55.43	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.840
158	55.44	55.43	55.42	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.840
159	55.43	55.42	55.41	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.841
160	55.41	55.40	55.39	0.08	0.08	0.08	7.791	0.253	2.840
161	55.41	55.40	55.39	0.07	0.08	0.08	7.791	0.253	2.840
162	55.40	55.39	55.38	0.07	0.07	0.08	7.791	0.253	2.841
163	55.40	55.39	55.38	0.07	0.07	0.08	7.791	0.253	2.841
164	55.38	55.37	55.36	0.07	0.07	0.08	7.791	0.253	2.841
165	55.38	55.37	55.36	0.07	0.07	0.07	7.791	0.253	2.841
166	55.37	55.36	55.35	0.07	0.07	0.07	7.791	0.253	2.841
167	55.37	55.36	55.35	0.07	0.07	0.07	7.791	0.253	2.842
168	55.36	55.35	55.34	0.07	0.07	0.07	7.791	0.253	2.842

Fortran プログラム

2 段タンク型貯留関数法にカルマン・フィルター理論を適用して予測雨量の誤差を考慮し、3 時間先までの水位予測値($\text{dis}(i,j)$)と標準偏差($\text{sig}(i,j)$)およびモデルパラメータ更新値($x_{\text{prn}}(i)$)を計算する Fortran プログラムと入力変数名を以下に示す。また、プログラム中にはコメント文を加えたので、変数名と計算内容が容易に理解できるものとする。

(1) 主プログラムの機能

洪水予測を行うに際して、降雨量と水位の観測値が 1 時間ごとに得られるものとして、各地点での 3 時間先までの水位予測値(dis)と標準偏差(sig)およびモデルパラメータ更新値(x_{prn})を計算する。このとき、新しい流量観測値に基づいて、1 時間ごとに状態変量と誤差共分散が更新される。予測を行った後の状態変量と誤差共分散の更新・伝達は、予測の出発点にもどる。このプログラム例では、将来の降雨量予測を行っておらず、過去 3 時間の移動平均雨量を用いている点に注意すべきである。

なお、実測雨量を用いる場合は、Main Program 内の $\text{iflg}=0$ とし、過去 3 時間の移動平均雨量を用いる場合は $\text{iflg}=1$ とすることでそれぞれの予測結果が得られる。

(2) サブプログラムの機能

(a) Subroutine no2kal

式(9.34)の状態変量の伝達方程式により、 X_k を計算する。同時に、式(9.50)と式(9.51)および式(9.52)の推定誤差分散・共分散伝達方程式により、 $P_{1,k}$ と $P_{2,k}$ および $P_{3,k}$ を計算する。

(b) Subroutine no2upd

1 時間ごとに観測値が入手されるとして、式(9.78)と式(9.79)により状態変量とパラメータの更新値を計算する。このとき、同時に式(9.89)により状態変量とパラメータの推定誤差分散・共分散 ($P_{1,k}, P_{2,k}, U_{1,k}$) を更新する。

(c) Subroutine input

状態変量 X_k の初期値及びその誤差分散・共分散の初期値 $P_{1,k}$ と $P_{2,k}$ および $P_{3,k}$ を設定する。パラメータ c_{11}, c_{12}, c_{13} の初期値とその誤差分散・共分散 $U_{1,k}$ と予測雨量の誤差分散 $U_{2,k}$ を指定する。また、システム誤差分散・共分散 Q_k と観測誤差分散 R_k を入力する。

(d) Subroutine mul31,mul21

式(9.50)と式(9.51)に含まれる行列演算、 ABC^T と AB を出力する。

(e) Subroutine hqcurv

水位～流量曲線により、水位または流量を変換する。

(f) Subroutine hqcheck

適用下限水位と現在の値をチェックし、曲線分類ナンバーを出力する。

(3) 主な入力変数の内容

(a) Input Data

pa_c1, pa_c2, pa_c3	それぞれ、パラメータ c_{11} , c_{12} , c_{13} の初期値
rah	平均雨量強度(既往洪水平均値)
del	地下流出成分の減衰係数($\delta=2.1$ に仮定)
tc	地下水流出成分の分離時定数
suikei	水系名
kasen	河川名
chiten	地点名
title	洪水名
area	流域面積
hwl	計画高水位
xwl	危険水位
dwl	警戒水位
swl	指定水位
iy, im, id, ih	開始年、月、日、時
nr, nq	降雨データ数、水位データ数
r(i)	雨量データ
hrea(i)	水位データ
ax(i), bx(i), hx(i)	$H \sim Q$ 式における a , b , 適用下限水位
iflg	0:実測雨量 1:過去3時間移動平均雨量(data ファイルにて選択)

(b) Main Program

n	更新する状態変数数($n=4$)
np	c_{11} , c_{12} , c_{13} に関する配列数($np=3$)
np2	r に関する配列数($np2=1$)
iyoso	リードタイム(3時間先予測まで可能)
wpl	モデル定数 p_1 ($wpl=0.6$)
zp2	モデル定数 p_2 ($zp2=0.4678$)
nl	計算時間間隔(1時間)の分割数($nl=12$)
varq	式(9.48)の流量予測誤差分散
varh	式(9.49)の水位予測誤差分散
sig(i, j)	標準偏差
x(i)	状態変量 $x_1 \sim x_4$ ($i=1 \sim 4$)
p1(i, j)	X_1 に関する(4×4)の分散・共分散
p2(i, j)	X_1 と X_2 に関する(4×3)の分散・共分散
p33(i, j)	X_1 と X_3 に関する(4×1)の分散・共分散
z	式(9.66)の現在時刻の観測流出高

(c) Subroutine no2kal

$x(i)$	状態変量 $x_1 \sim x_4$ ($i=1\sim 4$)、 c_{11}, c_{12}, c_{13} ($i=5\sim 7$)
$a_{21}\sim a_{47}$	行列 A_1, A_2, A_3 の要素である式(9.16)と式(9.17)の値
$f(i)$	行列 Φ の要素である式(9.27)と式(9.28)および式(9.29)の値
$g(i)$	行列 Γ の要素である式(9.30)の値
d_2	式(9.19)の d_2
d_4	式(9.20)の d_4

(d) Subroutine no2upd

c_k	式(9.67)の c_k
r_q	観測誤差分散 R_k
s	表4.2に示される式(8)「カルマン・ゲイン」の右辺第2項
$q(i, j)$	システム誤差分散・共分散 Q_k
$u(i, j)$	パラメータの誤差分散・共分散 $U_{1,k}$

(e) Subroutine input

α_{ph1}	システム誤差として x_1 と x_2 に乗ずる定数
α_{ph2}	初期値の誤差分散に乗ずる定数
α_{ph3}	モデルパラメータの誤差分散に乗ずる定数
α_{ph4}	観測誤差として c_k に乗ずる定数
a_{kei}	式(9.56)予測雨量の誤差分散の a_s の値
b_{kei}	式(9.56)予測雨量の誤差分散の b_s の値
b	1 段目タンクから 2 段目タンクへの浸透供給量

(4) データ入力

8.081 0.272 2.453 2.138 2.100 52.488
 石狩川
 石狩川
 納内
 平成13年9月11日洪水
 3558.00 61.80 61.30 59.00 57.60
 2001 9 9 1
 168 168
 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.29 0.46 2.42 2.38
 3.00 4.74 1.36 0.14 1.70 3.56 4.90 5.58 3.67 1.66
 0.24 0.03 0.00 0.00 0.00 0.00 0.05 0.31 0.03 0.00
 0.00 0.00 0.03 0.18 1.29 0.87 0.49 1.40 2.90 5.21
 4.44 4.07 2.82 3.99 1.63 2.20 3.63 6.28 3.93 4.19
 3.59 2.91 4.37 5.01 5.99 7.45 4.73 3.66 3.73 4.25
 5.23 4.24 4.28 0.96 0.65 1.01 0.99 1.80 1.40 1.57
 1.19 0.99 0.38 0.13 0.47 0.36 0.21 0.22 0.73 0.47
 0.03 0.29 0.16 0.29 0.31 0.35 0.23 0.20 0.17 0.11
 0.00 0.00 0.03 0.14 0.08 0.04 0.00 0.00 0.00 0.00
 0.02 0.06 0.05 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
 0.00 0.04 0.04 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
 0.00 0.04 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00
 55.05 55.03 55.01 55.01 55.00 54.98 54.97 54.96 54.95 54.95
 54.93 54.93 54.93 54.92 54.93 55.06 55.43 56.05 56.78 57.44
 57.68 57.79 57.89 57.96 57.98 57.89 57.72 57.44 57.11 57.04
 57.01 56.97 56.94 56.91 56.84 56.70 56.54 56.40 56.31 56.27
 56.25 56.31 56.49 56.61 56.78 56.95 57.16 57.44 57.74 57.92
 58.10 58.27 58.45 58.57 58.70 58.82 58.96 59.09 59.22 59.42
 59.61 59.81 59.98 60.07 60.09 60.04 59.95 59.83 59.73 59.58
 59.40 59.19 58.95 58.73 58.55 58.39 58.26 58.13 58.01 57.89
 57.78 57.68 57.57 57.48 57.38 57.30 57.22 57.15 57.08 56.95
 56.87 56.82 56.76 56.71 56.67 56.62 56.58 56.54 56.49 56.45
 56.41 56.39 56.35 56.31 56.28 56.26 56.23 56.20 56.17 56.15
 56.13 56.10 56.08 56.05 56.03 56.01 55.99 55.96 55.94 55.93
 55.91 55.90 55.88 55.86 55.84 55.83 55.81 55.80 55.78 55.78
 55.76 55.74 55.73 55.71 55.70 55.69 55.67 55.66 55.66 55.65
 55.64 55.63 55.62 55.60 55.58 55.56 55.55 55.55 55.53 55.52
 55.51 55.50 55.49 55.48 55.48 55.47 55.46 55.45 55.44 55.42
 55.42 55.42 55.41 55.39 55.39 55.38 55.38 55.37
 3 H12年のH-Q式
 59.32 -53.52 54.32
 45.67 -53.00 57.25
 21.51 -50.36 58.79
 1 0=実測雨量予測 1=過去3時間移動平均雨量予測

(5) 計算出力

地 点 名 : 納内
 開 始 時 間 : 2001年 9月 9日 1時
 流 域 面 積 : 3558.00
 分割数(n1) : 12
 予測雨量(iflg): 1=過去3時間移動平均雨量

<---貯留指数---><---パラメータ初期値---><---初期条件--->

p1 p2 c11 c12 c13 Tc δ
 0.6000 0.4648 8.081 0.272 2.453 52.488 2.1

			<----- 予測値 ----->			<----- 標準偏差 ----->			<----- モデル定数 ----->		
N0	雨量	実測値	1時間後	2時間後	3時間後	1時間後	2時間後	3時間後	c11	c12	c13
1	0.00	55.05	55.050	55.049	55.047	0.2752	0.4164	0.5630	8.0810	0.2720	2.4530
2	0.00	55.03	55.028	55.021	55.014	0.1735	0.2997	0.4198	8.0810	0.2720	2.4530
3	0.00	55.01	55.003	54.990	54.978	0.1415	0.2307	0.3172	8.0810	0.2720	2.4532
4	0.00	55.01	54.998	54.987	54.977	0.1181	0.1845	0.2502	8.0810	0.2720	2.4531
5	0.00	55.00	54.989	54.979	54.969	0.1049	0.1573	0.2105	8.0810	0.2720	2.4530
6	0.00	54.98	54.970	54.959	54.948	0.0968	0.1401	0.1852	8.0809	0.2720	2.4533
7	0.29	54.97	54.961	54.952	54.944	0.0896	0.1255	0.1637	8.0809	0.2720	2.4533
8	0.46	54.96	54.954	54.948	54.945	0.0847	0.1148	0.1477	8.0808	0.2720	2.4534
9	2.42	54.95	54.959	54.971	54.987	0.0808	0.1054	0.1347	8.0805	0.2720	2.4538
10	2.38	54.95	54.972	54.999	55.032	0.0779	0.0995	0.1296	8.0801	0.2721	2.4544
11	3.00	54.93	54.971	55.016	55.070	0.0774	0.0976	0.1321	8.0793	0.2725	2.4568
12	4.74	54.93	54.994	55.063	55.143	0.0762	0.1012	0.1463	8.0793	0.2731	2.4596
13	1.36	54.93	54.996	55.064	55.141	0.0754	0.0960	0.1363	8.0811	0.2741	2.4631
14	0.14	54.92	54.981	55.036	55.097	0.0750	0.0901	0.1195	8.0853	0.2751	2.4677
15	1.70	54.93	54.988	55.040	55.092	0.0731	0.0864	0.1079	8.0898	0.2758	2.4712
16	3.56	55.06	55.118	55.189	55.262	0.0925	0.1173	0.1487	8.0822	0.2748	2.4664
17	4.90	55.43	55.840	55.943	56.053	0.2609	0.2816	0.3076	8.0440	0.2696	2.4518
18	5.58	56.05	56.344	56.474	56.614	0.1492	0.1672	0.2026	8.0367	0.2685	2.4533
19	3.67	56.78	56.983	57.116	57.258	0.1523	0.1664	0.2276	8.0089	0.2659	2.4489
20	1.66	57.44	57.569	57.698	57.825	0.1912	0.2017	0.2289	7.9812	0.2643	2.4433
21	0.24	57.68	57.765	57.854	57.933	0.2120	0.2185	0.2337	7.9748	0.2641	2.4415
22	0.03	57.79	57.858	57.914	57.954	0.2206	0.2261	0.2364	7.9730	0.2641	2.4409
23	0.00	57.89	57.935	57.965	57.979	0.2250	0.2307	0.2406	7.9710	0.2641	2.4400
24	0.00	57.96	57.986	57.998	57.994	0.2286	0.2349	0.2460	7.9696	0.2641	2.4393
25	0.00	57.98	57.993	57.989	57.971	0.2310	0.2381	0.2505	7.9699	0.2641	2.4394
26	0.00	57.89	57.904	57.887	57.859	0.2315	0.2398	0.2537	7.9748	0.2639	2.4434
27	0.05	57.72	57.737	57.710	57.675	0.2281	0.2377	0.2532	7.9828	0.2635	2.4516
28	0.31	57.44	57.473	57.442	57.405	0.2217	0.2331	0.2502	7.9944	0.2627	2.4673
29	0.03	57.11	57.150	57.119	57.085	0.1859	0.1979	0.2149	8.0075	0.2616	2.4922
30	0.00	57.04	57.028	56.994	56.958	0.1715	0.1839	0.2017	8.0113	0.2612	2.5030
31	0.00	57.01	56.978	56.941	56.902	0.1645	0.1768	0.1948	8.0117	0.2611	2.5048
32	0.00	56.97	56.934	56.895	56.855	0.1616	0.1740	0.1922	8.0117	0.2611	2.5057
33	0.03	56.94	56.900	56.860	56.820	0.1591	0.1715	0.1898	8.0118	0.2611	2.5051
34	0.18	56.91	56.870	56.830	56.791	0.1571	0.1695	0.1877	8.0120	0.2612	2.5040
35	1.29	56.84	56.815	56.784	56.755	0.1557	0.1683	0.1867	8.0108	0.2611	2.5079
36	0.87	56.70	56.697	56.672	56.650	0.1543	0.1679	0.1874	8.0053	0.2607	2.5229
37	0.49	56.54	56.548	56.526	56.507	0.1506	0.1653	0.1857	7.9958	0.2604	2.5467
38	1.40	56.40	56.413	56.396	56.384	0.1446	0.1596	0.1800	7.9846	0.2601	2.5736
39	2.90	56.31	56.328	56.328	56.333	0.1372	0.1512	0.1719	7.9748	0.2602	2.5953
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
168	0.00	55.37	55.358	55.348	55.338	0.0726	0.0731	0.0737	7.7911	0.2531	2.8422

(6) プログラムリスト

```

program kalman2tr3
c-----
c      地下水流出成分を含む2段タンク型貯留関数法+カルマンフィルター
c      による洪水予測計算
c      予測雨量を状態変量にプラス
c
c      iflg=0 実測雨量を用いる
c      iflg=1 過去3時間移動平均雨量を用いる
c
c      kalman2tr3 < data > out
c
c      s1 = k11*q1**p1 + k12*d(q1**p2)/dt
c      ds1/dt = r - q1 - b
c      b = k13 * q1
c
c      s2 = k21*q2 + k22*dq2/dt
c      ds2/dt = b - q2
c      q = q1 + q2
c
c      k11 = c11 * A**0.24
c      k12 = c12 * k11**2 * rr**(-0.2648)
c      k13 = c13 - 1
c      k21 = c1 * k13/c0
c      k22 = k13/c0
c      p1 = 0.6 (固定)
c      p2 = 0.4648 (固定)
c-----
c
c      character suikei*80, kasen*80, chiten*80, title*80, rname(2)*22
c
c      dimension x(8), x_prn(8)
c      dimension p1(5,5), p2(5,5), q(5,5), u(5,5), u2(5,5)
c      dimension xex(5), plex(5,5), p2ex(5,5)
c      dimension p33(5,5), p3ex(5,5)
c      dimension qq(200), re(200), reav(200), dis(24,200)
c      dimension r(200), qq0(200), hrea(200)
c      dimension xpr(24), sig(24,200)
c      dimension mdays(12)
c
c      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
c      common /st2/ h,h2,h3,h4
c      common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4,akei,bkei
c      common /hqcv/ ax(5),bx(5),hx(5),qx(5)
c      common /tank2/ c0,c1,wk3
c
c      data mdays /31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31/
c
c      n=4          ! 更新する状態変量 x1,x2,x3,x4
c      np=3         ! c11,c12,c13 に関する配列
c      np2=1        ! r に関する配列
c      iyoso=3      ! 予測時間幅
c      wp1=0.6      ! モデル定数 p1
c      zp2=0.4648   ! モデル定数 p2
c      wp2=1.0/zp2
c
c      n1=12        ! 計算時間間隔 (1時間の分割数)
c      xn1=n1
c      h=1.0/xn1
c      h2=h**2
c      h3=h2*h

```

```

      h4=h3*h
C
C
C*****
C データ読み込み開始
C   c11,c12,c13,平均雨量強度,減衰係数,分離時定数 Tc
C   read(5,'(6f8.0)') pa_c1,pa_c2,pa_c3,rah,del,tc
C
C   水系名
C   read(5,'(a80)') suikei
C
C   河川名
C   read(5,'(a80)') kasen
C
C   地点名
C   read(5,'(a80)') chiten
C
C   洪水名
C   read(5,'(a80)') title
C
C   流域面積、HWL、危険水位、警戒水位、指定水位
C   read(5,'(5f8.0)') area,hwl,xwl,dwl,swl
C
C   開始年、月、日、時
C   read(5,'(4i5)') iy,im,id,ih
C
C   降雨、水位データ数
C   read(5,'(2i5)') nr,nq
C
C   雨量
C   read(5,'(10f8.0)') (r(i),i=1,nr)
C
C   水位
C   read(5,'(10f8.0)') (hrea(i),i=1,nq)
C   read(5,'(i5)') nhq           ! H-Q式数
C   do j = 1, nhq
C     read(5,'(3f8.0)') ax(j),bx(j),hx(j) ! a, b, Hkagen
C     qx(j)=ax(j)*(hx(j)-bx(j))**2
C   end do
C   do j = nhq, 5
C     ax(j)=ax(nhq)
C     bx(j)=bx(nhq)
C     hx(j)=hx(nhq)
C     qx(j)=qx(nhq)
C   end do
C   流量算定
C   call hqcurv( 1, 1, nq, hrea, qq0 )
C
C   <実測雨量:0 or 過去3時間移動平均雨量:1>予測フラグ
C   rname(0)='実測雨量'
C   rname(1)='過去3時間移動平均雨量'
C   read(5,'(i5)') iflg
C
C   データ読み込み終了
C*****
C
C   wc1=pa_c1
C   wc2=pa_c2
C   wc3=pa_c3
C   c0 =(del/tc)**2.0
C   c1 =(del**2.0)/tc
C

```



```

C
C*****
C ヘッダ部分出力開始
      write(6,('地点名      : ',a80)) chiten
      write(6,('開始時間    : ',i4,'年',i2,'月',
+           i2,'日',i2,'時')) iy, im, id, ih
      write(6,('流域面積    : ',f8.2)) area
      write(6,('分割数(nl)   : ',i2)) nl
      write(6,('予測雨量(iflg): ',i2,a22)) iflg, rname(iflg)
      write(6,806)
806  format('/<---貯留指数--->',
+         '<---パラメータ初期値--->',
+         '<---初期条件--->')
      write(6,('6x, 'p1'',6x, 'p2'',5x, 'c11''
+           ,5x, 'c12'',5x, 'c13'',6x, 'Tc'',6x, 'δ '''))
      write(6,('2f8.4,4f8.3,f8.1')) wp1,zp2,wc1,wc2,wc3,tc,del
      write(6,807)
807  format(/19x,'<----- 予測値 ----->',
+         ' <----- 標準偏差 ----->',
+         ' <----- モデル定数 ----->')
      write(6,808)
808  format(' NO ',x,'雨量 実測値',3x,
&         '1 時間後',1x,'2 時間後',1x,'3 時間後',1x,2x,
&         '1 時間後',2x,'2 時間後',2x,'3 時間後',2x,
&         '      c11      c12      c13')
C ヘッダ部分出力終了
C*****
C
C
C
      do i=1,nr
        re(i)=r(i)
        if(i.ge.3) reav(i)=(r(i)+r(i-1)+r(i-2))/3 !過去3時間移動平均雨量
        if(i.eq.2) reav(i)=(r(i)+r(i-1))/2
        if(i.eq.1) reav(i)= r(i)
      end do
C
      do i=1,nq
        qq(i)=3.6*qq0(i)/area ! qq(i) : 観測流出高
      end do
C
      ih=ih-1
      if(mod(iy,4).eq.0) mdays(2)=29
      if(iy.gt.1988) then
        iy=iy-1988
      else
        iy=iy-1925
      end if
C
C
C 初期値の設定
      call input(x,p1,p2,p33,q,u,u2,qq(1))
C
C*****
C 計算開始
C*****
      do 3000 ll=2,nq+1 ! ll は現在時刻のループ
C
      do i = 1, n+np
        x_prn(i) = x(i)
      end do
C

```

```

C
      wk1 = x(5) * area**0.24
      zk2 = x(6) * wk1**2.0 * rah**(-0.2648)
      wk2 = 1.0 / zk2
      wk3 = x(7) - 1.0

C
C
C*****
C      予測計算開始
C*****
C
C      状態変量 X1(x1,x2,x3,x4)の保存
      do i=1,n
        xex(i)=x(i)
      end do

C
C      X1 に関する (4*4)の分散・共分散の保存
      do i=1,n
        do j=1,n
          p1ex(i,j)=p1(i,j)
        end do
      end do

C
C      X2 に関する (4*3)の分散・共分散の保存
      do i=1,n
        do j=1,np
          p2ex(i,j)=p2(i,j)
        end do
      end do

C
C      X3 に関する (4*1)の分散・共分散の保存
      do i=1,n
        do j=1,np2
          p3ex(i,j)=p33(i,j)
        end do
      end do

C
C      ..... iyoso-hour ahead prediction .....
C
      do lt=1,iyoso
        rain=0.0
        if(iflg.eq.0 .and. ll+lt.le.nr) rain=re(ll+lt-1) !実測雨量
        if(iflg.eq.1 .and. ll+lt.le.nr) rain=reav(ll-1) !3 時間移動平均雨量

C
C      状態変量、誤差分散・共分散の伝達
        rain0 = rain
        if( rain .lt. 0.1 ) rain0=0.1
        u2(1,1) = akei**2.0 * lt * rain0**(2.0*bkei)
        do k=1,nl
          call no2kal(x,p1,p2,p33,u,u2)
        end do

C
C      予測流量算出
        xpr(lt)=area/3.6*(x(1)**wp2+x(3))

C
C      予測誤差分散算出
        call hqcurv( 2, 1, 1, hpr, xpr(lt) )
        dis(lt,ll)=hpr
        call hqcheck(hpr,no_hq)
        b11 = 1.0 / (ax(no_hq))**0.5
        varq = (area/3.6)**2.0*( (x(1)**(wp2-1.0)*wp2)**2.0*p1(1,1)
+          + p1(3,3) + 2.0*x(1)**(wp2-1.0)*wp2*p1(1,3) )

```

```

      varh = b11**2.0/4.0
+      *(area/3.6*(x(1)**wp2 + x(3)))*(-1.0) * varq
C
C      標準偏差算出
      sig(lt,ll) = varh**0.5
C
C
      end do
C*****
C      予測計算終了
C*****
C
C
      z0=hrea(ll-1)
      ih=ih+1
      if(ih.gt.24) then
        ih=1
        id=id+1
        if(id.gt.mdays(im)) then
          id=1
          im=im+1
          if(im.gt.12) then
            im=1
            iy=iy+1
          end if
        end if
      end if
      end if

C
C
C*****
C      計算結果出力
C*****
      write(6,809) ll-1,r(ll-1),z0,
&      (dis(i,ll),i=1,3),
&      (sig(i,ll),i=1,3),
&      (x_prn(i),i=n+1,n+np)
809   format(i3,f6.2,f8.2,2x,3f8.3,x,3f9.4,2x,3f8.4)
C
C      状態変量 X1(x1,x2,x3,x4)を元に戻す
      do i=1,n
        x(i)=xex(i)
      end do
C
C      X1 に関する(4*4)の分散・共分散を元に戻す
      do i=1,n
        do j=1,n
          p1(i,j)=plex(i,j)
        end do
      end do
C
C      X2 に関する(4*3)の分散・共分散を元に戻す
      do i=1,n
        do j=1,np
          p2(i,j)=p2ex(i,j)
        end do
      end do
C
C      X3 に関する(4*1)の分散・共分散を元に戻す
      do i=1,n
        do j=1,np2
          p33(i,j)=p3ex(i,j)
        end do

```

```

        end do
C
        rain=0.0
        if(l1+1 .le. nr) rain = re(l1)
C
C 状態変量、誤差分散・共分散の伝達
        u2(1,1) = 0.0
        do k=1,n1
            call no2kal(x,p1,p2,p33,u,u2)
        end do
C
C P1 に乗算的ノイズを設定
        do i=1,n
            q(i,i)=(x(i)*alph1)**2
            p1(i,i)=p1(i,i)+q(i,i)
        end do
C
        z=qq(l1) ! 現在時刻の観測流出高
C
C カルマンフィルタによる状態変量、誤差分散・共分散の更新
        call no2upd(x,p1,p2,u,z)
        if(x(1).lt.0.0) x(1) =0.0
        if(x(3).lt.0.0) x(3) =0.0
C
        3000 continue
C*****
C 計算終了
C*****
C
        stop
        end
C
C
        subroutine no2kal(x,p1,p2,p33,u,u2)
C -----
C      s = k11*q**p1 + k12*d(q**p2)/dt
C
C      extrapolation equation of kalman filter
C      linearization of nonlinear vector equation
C      x(k+1) = phi*x(k) + gamma*d(k)
C -----
        dimension x(8),y(5),f(32),g(32),z(10)
        dimension p1(5,5),p2(5,5),p3(5,5),p4(5,5),p5(5,5)
        dimension phi1(5,5),phi2(5,5),phi3(5,5)
        dimension u(5,5),u2(5,5)
        dimension p33(5,5)
C
        common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
        common /st2/ h,h2,h3,h4
        common /tank2/ c0,c1,wk3
C
        np=3 ! c11,c12,c13 に関する配列
        np2=1 ! r に関する配列
C
C.. 方程式の拡張部分を配列に割り当てる
        z(1) = x(5) ! 状態変量 c11
        z(2) = x(6) ! 状態変量 c12
        z(3) = x(7) ! 状態変量 c13
        z(4) = rain ! 状態変量 r
        b = wk3*x(1)**wp2
C
        cc1=0.0

```

```

cc2=0.0
cc3=0.0
c
y1=x(1)
y2=x(2)
y3=x(3)
y4=x(4)
c
c.. 計算上の変数への割り当て
    if(y1.gt.0.0) then
        cc1=y1**(wp1*wp2-1.0) ! x1^(p1/p2-1)
        cc2=y1**(wp1*wp2-2.0) ! x1^(p1/p2-2)
        cc3=y1**(wp2-1.0)      ! x1^( 1/p2-1)
    end if
    e1 = wk1*wk2*wp1*wp2 ! (k11/k12)*(p1/p2)
    e2 = wp1*wp2         ! p1/p2
c
c.. a21~a28,a43~a45 の計算
    a21 = -e1*(e2-1.0)*cc2*y2 - z(3)*wk2*wp2*cc3
    a22 = -e1*cc1
    a25 = (-wk2*e2*cc1*y2) * area**0.24
    a26 = wk2**2 * ( wk1*e2*cc1*y2 + z(3)*y1**wp2 - z(4) )
    +      * zk2/z(2)
    a27 = -wk2*y1**wp2
    a28 = wk2
    a43 = -c0/wk3
    a44 = -c1
    a47 = c0/(wk3**2.0)*(y3-b)
c
c.. d2,d4 の計算
    d2 = e1*(e2-1.0)*cc1*y2 +
    +      z(3)*wk2*(wp2-1.0)*y1**wp2 + z(4)*wk2
    d4 = c0/(wk3**2.0)*((2.0*wk3+1.0)*b - (wk3+1.0)*y3)
c
c.. 計算上の変数への割り当て
    a1 = a21 + a22**2.0
    a2 = 2.0*a21*a22 + a22**3.0
    a3 = a43 + a44**2.0
    a4 = 2.0*a43*a44 + a44**3.0
    bt1 = h/2.0 + a22*h2/6.0 + a1*h3/24.0
    bt2 = 1.0 + a22*h/2.0 + a1*h2/6.0 + a2*h3/24.0
    bt3 = h/2.0 + a44*h2/6.0 + a3*h3/24.0
    bt4 = 1.0 + a44*h/2.0 + a3*h2/6.0 + a4*h3/24.0
c
c.. Φ、Γ の要素の計算
    do if0 = 1,32 !要素ゼロを設定
        f(if0) = 0.0
        g(if0) = 0.0
    end do
    f(1) = 1.0 + a21*h*bt1 ! φ11
    f(2) = h*bt2 ! φ12
    f(5) = a21*f(2) ! φ21
    f(6) = 1.0+a22*h+a1*h2/2.0 ! φ22
    +      +a2*h3/6.0+(a21*a1+a22*a2)*h4/24.0
    f(11) = 1.0 + a43*h*bt3 ! φ33
    f(12) = h*bt4 ! φ34
    f(15) = a43*f(12) ! φ43
    f(16) = 1.0+a44*h+a3*h2/2.0 ! φ44
    +      +a4*h3/6.0+(a3*a43+a4*a44)*h4/24.0
c
    f(17) = a25*h*bt1 ! φ15
    f(18) = a26*h*bt1 ! φ16

```

```

f(19) = a27*h*bt1          !  $\phi_{17}$ 
f(20) = a25*h*bt2          !  $\phi_{25}$ 
f(21) = a26*h*bt2          !  $\phi_{26}$ 
f(22) = a27*h*bt2          !  $\phi_{27}$ 
f(25) = a47*h*bt3          !  $\phi_{37}$ 
f(28) = a47*h*bt4          !  $\phi_{47}$ 
c
f(29) = a28*h*bt1          !  $\phi_{18}$ 
f(30) = a28*h*bt2          !  $\phi_{28}$ 
c
g(1)  = h*bt1              !  $\gamma_{12}$ 
g(2)  = f(2)                !  $\gamma_{22}$ 
g(3)  = h*bt3              !  $\gamma_{34}$ 
g(4)  = f(12)              !  $\gamma_{44}$ 

c
c  $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$ 、 $\Phi_3$  の配列への割り当て ( i:行、j:列 )
c ..... phil(i,j) and phi2(i,j) matrices .....
k=0
do i=1,n
  do j=1,n
    k=k+1
    phil(i,j)=f(k)          !  $\Phi_1 \dots (4 \times 4)$  行列
  end do
end do
c
k=16
do i=1,n
  do j=1,np
    k=k+1
    phi2(i,j)=f(k)          !  $\Phi_2 \dots (4 \times 3)$  行列
  end do
end do
c
k=28
do i=1,n
  do j=1,np2
    k=k+1
    phi3(i,j)=f(k)          !  $\Phi_3 \dots (4 \times 1)$  行列
  end do
end do
c
c 状態変量の伝達方程式 (状態変量 x1~x4 の更新)
c ..... extrapolation of state variables .....
do i=1,n
  y(i)=0.0
  do j=1,n
    y(i)=y(i)+phil(i,j)*x(j) !  $\phi_1$  の項
  end do
  do j=1,np
    y(i)=y(i)+phi2(i,j)*z(j) !  $\phi_2$  の項
  end do
  do j=1,np2
    y(i)=y(i)+phi3(i,j)*z(4) !  $\phi_3$  の項
  end do
  if(i.le.2) then
    y(i)=y(i)+g(i)*d2        !  $\gamma$  の項
  else
    y(i)=y(i)+g(i)*d4        !  $\gamma$  の項
  end if
end do
c

```

```

do i=1,n
  x(i)=y(i)      ! 状態変量の更新
end do

c
c エラー処理(x3=q2 が負の場合ゼロとする)
c   if(x(1).lt.0.0) x(1) =0.0
c   if(x(3).lt.0.0) x(3) =0.0

c
c 誤差分散・共分散行列の伝達方程式
c  .... extrapolation equation .....
c
c p1(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
c 行列演算： $\Phi^1 P^1 \Phi^{1T}(p_3)$  の計算
c   call mul31(4,4,4,4,phi1,p1,phi1,p3)
c
c 行列演算： $\Phi^1 P^2 \Phi^{2T}(p_4)$  の計算
c   call mul31(4,4,4,3,phi1,p2,phi2,p4)
c
c 行列演算： $\Phi^1 P^1 \Phi^{1T}(p_3) + \Phi^1 P^2 \Phi^{2T}(p_4)$ 
c   do i=1,n
c     do j=i,n
c       p3(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)
c     end do
c   end do

c
c 行列演算： $\Phi^2 P^2 \Phi^{2T} \Phi^{1T}(p_4T)$  を加える
c   do i=1,n
c     do j=i,n
c       p3(i,j)=p3(i,j)+p4(j,i)
c     end do
c   end do

c
c 行列演算： $\Phi^1 P^3 \Phi^{3T}(p_4)$  の計算
c   call mul31(4,4,4,1,phi1,p33,phi3,p4)
c
c 行列演算： $\Phi^1 P^3 \Phi^{3T}(p_4)$  を加える
c   do i=1,n
c     do j=i,n
c       p3(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)
c     end do
c   end do

c
c 行列演算： $\Phi^3 P^3 \Phi^{3T} \Phi^{1T}(p_4T)$  を加える
c   do i=1,n
c     do j=i,n
c       p3(i,j)=p3(i,j)+p4(j,i)
c     end do
c   end do

c
c 行列演算： $\Phi^2 U^1 \Phi^{2T}(p_4)$  の計算
c   call mul31(4,4,3,3,phi2,u,phi2,p4)
c
c 行列演算： $\Phi^3 U^2 \Phi^{3T}(p_5)$  の計算
c   call mul31(4,4,1,1,phi3,u2,phi3,p5)
c
c 行列演算： $P^1$ (更新値)(4*4)行列の計算
c   do i=1,n
c     do j=i,n
c       p1(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)+p5(i,j)
c       if(i.ne.j) p1(j,i)=p1(i,j)
c     end do
c   end do

```

```

        end do
    end do

c
c  p2(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
c  行列演算:  $\Phi^1 P^2$  の計算
c  call mul21(4,3,4,phi1,p2,p3)
c
c  行列演算:  $\Phi^2 U^1$  の計算
c  call mul21(4,3,3,phi2,u,p4)
c
c  行列演算:  $P^2$ (更新値)(4*3)行列の計算
c  do i=1,n
c      do j=1,np
c          p2(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)
c      end do
c  end do

c
c  p3(i,j) : extrapolation of covariance matrix
c
c  行列演算:  $\Phi^1 P^3$  の計算
c  call mul21(4,1,4,phi1,p33,p3)
c
c  行列演算:  $\Phi^3 U^2$  の計算
c  call mul21(4,1,1,phi3,u2,p4)
c
c  行列演算:  $P^3$ (更新値)(4*1)行列の計算
c  do i=1,n
c      do j=1,np2
c          p33(i,j)=p3(i,j)+p4(i,j)
c      end do
c  end do

c
c  return
c  end

c
c
c  subroutine no2upd(x,p1,p2,u,z)
c  -----
c      update equation of kalman filter
c  -----
c
c  dimension x(8),p1(5,5),p2(5,5),u(5,5)
c  dimension xm1(5),xm2(5),xkal(10)
c  dimension p3(5,5),zm1(5,5),zm2(5,5)
c
c  common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
c  common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4,akei,bkei
c
c  np=3 ! c11,c12,c13 に関する配列
c
c  err = z - (x(1)**wp2 + x(3))
c
c  ck = x(1)**wp2 + x(3)
c
c  観測誤差分散
c  rq=(ck*alph4)**2.0
c
c  hh1 = wp2 * x(1)**(wp2-1.0) ! h1
c  hh3 = 1.0 ! h3
c
c  カルマンゲインの右辺第2項(HPH+R)
c  s = hh1**2.0*p1(1,1) +

```



```

+   hh3**2.0*p1(3,3) + 2.0*hh1*hh3*p1(1,3) + rq
c
c   カルマンゲイン K1~K4 の計算 (状態変数 x1~x4 に対するもの)
  do i=1,n
    xml(i) = p1(i,1)*hh1 + p1(i,3)*hh3
    xkal(i) = xml(i) / s
  end do
c
c   カルマンゲイン K5~K7 の計算 (c11,c12,c13 に対するもの)
  do i=1,np
    xm2(i) = p2(1,i)*hh1 + p2(3,i)*hh3
    xkal(i+4) = xm2(i) / s
  end do
c
c   状態変数 x1~x4,c11,c12,c13 の更新
  do i=1,n+np
    x(i) = x(i) + xkal(i) * err
  end do
c
c   マトリックスM1 の計算
  do i=1,n
    do j=1,n
      zm1(i,j) = 0.0
      if(i.eq.j) zm1(i,j) = 1.0
      if(j.eq.1) zm1(i,j) = zm1(i,j) - hh1*xkal(i)
      if(j.eq.3) zm1(i,j) = zm1(i,j) - hh3*xkal(i)
    end do
  end do
c
c   マトリックスM2 の計算
  do i=1,np
    do j=1,n
      zm2(i,j) = 0.0
      if(j.eq.1) zm2(i,j) = zm2(i,j) - hh1*xkal(i+n)
      if(j.eq.3) zm2(i,j) = zm2(i,j) - hh3*xkal(i+n)
    end do
  end do
c
c   X1 に関する(4*4)の誤差分散・共分散 P1 の更新
  call mul21(4,4,4,zm1,p1,p3)
  do i=1,n
    do j=i,n
      p1(i,j) = p3(i,j)
      if( i. ne. j ) p1(j,i) = p1(i,j)
    end do
  end do
c
c   パラメータの誤差分散・共分散 U1 の更新
  call mul21(3,3,4,zm2,p2,p3)
  do i=1,np
    do j=1,np
      u(i,j) = p3(i,j) + u(i,j)
    end do
  end do
c
c   X2 に関する(4*3)の誤差分散・共分散 P2 の更新
  call mul21(4,3,4,zm1,p2,p3)
  do i=1,n
    do j=1,np
      p2(i,j) = p3(i,j)
    end do
  end do

```

```

c      return
c      end
c
c      subroutine mul31(np,n2,n3,n4,a,b,c,d)
c      -----
c      multiplication of matrices a, b, and ct
c      -----
c      dimension a(5,5),b(5,5),c(5,5),d(5,5)
c
c      do 10 i=1,np
c      do 10 j=1,n2
c      d(i,j)=0.0
c      do 12 k=1,n3
c      do 12 l=1,n4
12  d(i,j)=d(i,j)+a(i,k)*b(k,l)*c(j,l)
10  continue
c      return
c      end
c
c
c      subroutine mul21(np,n2,n3,a,b,c)
c      -----
c      multiplication of matrices a and b
c      -----
c      dimension a(5,5),b(5,5),c(5,5)
c      do 10 i=1,np
c      do 10 j=1,n2
c      c(i,j)=0.0
c      do 12 k=1,n3
12  c(i,j)=c(i,j)+a(i,k)*b(k,j)
10  continue
c      return
c      end
c
c
c      subroutine input(x,p1,p2,p33,q,u,u2,qinit)
c      -----
c      input data for implementing kalman filter
c      初期値の設定
c      -----
c      dimension x(8),p1(5,5),p2(5,5)
c      dimension p33(5,5)
c      dimension q(5,5),u(5,5)
c      dimension u2(5,5)
c
c      common /st1/ wk1,wk2,zk2,wc1,wc2,wc3,wp1,wp2,zp2,rain,n,area
c      common /st2/ h,h2,h3,h4
c      common /st3/ alph1,alph2,alph3,alph4,akei,bkei
c
c      alph1 = 0.10    ! システム誤差として x1 と x2 に乗ずる定数
c      alph2 = 0.10    ! 初期値の誤差分散に乗ずる定数
c      alph3 = 0.20    ! モデルパラメータの誤差分散に乗ずる定数
c      alph4 = 0.10    ! 観測誤差として ck に乗ずる定数
c      akei  = 1.37     ! 予測雨量の誤差分散  $a^{**2} * L * r^{**2} b$  の a の値
c      bkei  = 0.64     ! 予測雨量の誤差分散  $a^{**2} * L * r^{**2} b$  の b の値
c
c      np=3            ! c11,c12,c13 に関する配列
c      np2=1           ! r に関する配列
c

```

```

do i=1,n
  x(i)=0.0
end do

c
x(1)=qinit**zp2    ! 状態変量 x1 の初期値
x(2)=0.0           ! 状態変量 x2 の初期値
x(3)=0.0           ! 状態変量 x3 の初期値
x(4)=0.0           ! 状態変量 x4 の初期値
x(5)=wc1           ! 状態変量 x5 の初期値
x(6)=wc2           ! 状態変量 x6 の初期値
x(7)=wc3           ! 状態変量 x7 の初期値

c
do i=1,n
  do j=1,n
    p1(i,j) = 0.0    ! X1 に関する(4*4)の分散・共分散
  end do
end do
b=(x(7)-1.0)*qinit
p1(1,1) = (alph2*x(1))**2.0 ! X1(x1)に関する(4*4)の分散
p1(2,2) = (alph2*x(1))**2.0 ! X1(x2)                "
p1(3,3) = (alph2*b)**2.0    ! X1(x3)                "
p1(4,4) = (alph2*b)**2.0    ! X1(x4)                "

c
do i=1,n
  do j=1,np
    p2(i,j) = 0.0    ! X2 に関する(4*3)の分散・共分散
  end do
end do

c
do i=1,n
  do j=1,np2
    p33(i,j) = 0.0    ! X3 に関する(4*1)の分散・共分散
  end do
end do

c
do i=1,n
  do j=1,n
    q(i,j) = 0.0      ! システム誤差 分散・共分散
  end do
end do

c
do i=1,np
  do j=1,np
    u(i,j) = 0.0      ! U 1 パラメータ誤差 分散・共分散
  end do
end do

c
u(1,1)=(wc1*alph3)**2
u(2,2)=(wc2*alph3)**2
u(3,3)=(wc3*alph3)**2

c
do i=1,np2
  do j=1,np2
    u2(i,j) = 0.0     ! U 2 のパラメータ誤差 分散・共分散
  end do
end do

c
return
end

c
c
subroutine hqcurv(itype,ist,ied,h,q)

```

```

dimension h(1),q(1)
common/hqcv/ ax(5),bx(5),hx(5),qx(5)
go to (1,2),itype
c
1 do 10 j=ist,ied
  if(h(j).ge.0.0) then
    k=1
    if(h(j).ge.hx(2)) k=2
    if(h(j).ge.hx(3)) k=3
    if(h(j).ge.hx(4)) k=4
    if(h(j).ge.hx(5)) k=5
    q(j)=ax(k)*(h(j)+bx(k))**2.0
  else
    q(j)=-999
  endif
10 continue
  return
c
2 do 20 j=ist,ied
  if(q(j).ge.0.0) then
    k=1
    if(q(j).ge.qx(2)) k=2
    if(q(j).ge.qx(3)) k=3
    if(q(j).ge.qx(4)) k=4
    if(q(j).ge.qx(5)) k=5
    h(j)=(q(j)/ax(k))**0.5-bx(k)
  else
    h(j)=-999
  endif
20 continue
  return
end
c
c
subroutine hqcheck(hdata,no_hq)
common/hqcv/ ax(5),bx(5),hx(5),qx(5)
c
  no_hq=1
  if(hdata.ge.hx(2)) no_hq=2
  if(hdata.ge.hx(3)) no_hq=3
  if(hdata.ge.hx(4)) no_hq=4
  if(hdata.ge.hx(5)) no_hq=5
c
  return
end

```

10. まとめ

厳しい財政状況の中、治水対策としてのハード施設整備に多大な投資が望めないことから、今後はこれまで蓄積されてきたノウハウを最大限に活用したソフト対策（精度の高い洪水予警報システム）の比重が大きくなる。すなわち、21世紀は河川管理の時代になると予想される。

ITの進歩、「水防法」の改正及び「水情報国土」政策に対応した洪水予測システムの改良・開発が遅かれ早かれ検討するように要求されることになる。また、情報の量・質が充実するなかで、それらを扱うソフト（モデル）も概念の明確化・精緻さが求められていくものと考えられる。しかも、多くの情報を包括的に網羅し、信頼性のある予測精度を提供していくことは、情報開示および説明責任とも深く関連する課題でもある。

現有の「北海道開発局における洪水予測システム」は平成7年3月発行のものであり、最近の新しい流出モデルを取り入れた洪水予測システムを再構築する時期にある。「序」において述べたように、実時間洪水流出予測(real-time prediction)精度に及ばず影響要因は、(a) 洪水流出モデル選択とそれに付随して起こるシステム誤差の問題、(b) モデル定数の不確定性の問題、(c) 流量ないし水位を観測方程式とする場合の観測誤差の問題、(d) 予測雨量をどのように入手するかの方法と予測雨量の推定誤差分散をどう見積もるかの問題に大きく分類される。本報告での洪水予測システム再構築にあたっては、各章において上記(a)～(d)の課題をどのように実時間洪水流出予測手法に反映させてきたかをできるだけ詳しく述べてきた。とくに、河川技術者が各章で展開されてきた洪水予測モデルの理論を容易に理解でき、しかも実用的にも利用できるように計算例および Fortran プログラムを掲載した。

比較的長い予測時間(lead time)における洪水逐次予測では、流出モデルの構造式がハイドログラフの予測精度と本質的に関連してくる。したがって、貯留関数型流出モデルとカルマン・フィルター理論を組み合わせることで精度の高い逐次予測を行おうとすれば、洪水ハイドログラフ全体の形状特性を的確に再現できる貯留関数構造式の決定が不可欠となる。本報告では「損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)」と「地下水流出成分を含む貯留関数法(2段タンク型貯留関数モデル)」の2つの洪水流出モデルを採用して、カルマン・フィルター理論を組み合わせた新しい洪水予測システムを構築した。以下に各章の結論を要約して述べる。

第1章の「はじめに」では、本研究の背景、採用流出モデルの概要及び洪水予測にカルマン・フィルター理論を適用する際の留意点について述べている。

第2章の「貯留関数型洪水流出モデルの進歩」では、我が国において、1960年代から貯留関数法が洪水流出解析として広範に用いられてきた理由、従来の貯留関数法の問題点及び kinematic wave 法と等価なモデルに集中化されている新しい貯留関数法の特徴とモデル定数の物理的意味を明確にしている。また、提案貯留関数法は洪水時に見られる貯留量と流量の関係の2価性が、直接非線形貯留方程式で表現されているので、遅れ時間を必要としない特徴をもつ。

第3章では流出モデルとして、「損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)」の導入を図った。従来の貯留関数法は流出解析の前処理において、基底・直接流出成分の分離、流出率及び有効雨量の算定を必要とした。この作業は実務上煩雑で、主観的な方法に頼らざるを得ないのが難点である。しかも、一般に流出率を洪水期間中、リアルタイムに求めることは非常に困難である。したがって、洪水逐次予測(operational forecast)という観点から、損失機構を取り入れ、観測雨量と観測流量を直接洪水予測に取り込むことにより、データの前処理が軽減され、主観的要素を排除したシステムが構築された。その結果、貯留関数法自身に損失定数を含むことができるので、損失定数の最適

化が可能となり、実用上の適用範囲も拡大した。

第3章で採用する貯留関数法は3個のモデル定数を持つ。2つの貯留係数は流域面積および流域平均雨量の関数で表される。その関数に含まれる未知定数は対象流域面積の規模に依存せず、一定値をとるものと仮定する。その最適化結果が**表3.1**に示されているので、解析流域においてカルマン・フィルターを実行するときの初期値として活用できる。

非線形貯留関数モデルを解く場合に、計算時間間隔の問題がある。計算時間間隔を小さくすると数値計算上の精度は向上する反面、計算時間が増大してくる。非線形微分方程式の数値解法には、計算時間が短く、精度が高いルンゲ・クッター・ギル(Runge-Kutta-Gill)法がよく用いられている。本報告での非線形微分方程式の解法には、テーラー級数展開による線形化近似解法を採用している。ルンゲ・クッター・ギル法と線形化近似解法の精度を比較した結果、線形化近似解法の計算時間間隔を10分(すなわち、1時間を6分割)としても解の精度は極端に劣化していないことを確認した。カルマン・フィルターは、元来線形システム方程式と線形観測方程式に基づいて理論展開がなされている。したがって、本報告で扱われる非線形方程式は、すべて線形化近似を行い、線形カルマン・フィルター理論を直接適用できるように拡張カルマン・フィルター(Extended Kalman Filter)を用いて、洪水逐次予測計算を行っている。

第4章では**第3章**で述べた「損失項を含む貯留関数法」に「カルマン・フィルター理論」をどのように適用するかの方法論を概説している。また、カルマン・フィルター理論が何故洪水逐次予測に適しているかの理由についても詳述している。カルマン・フィルター理論の適用にあたっては、どの変数を「状態変量」に選定するかが重要となる。次に、「システム方程式」と「観測方程式」の定式化作業が完了すれば、あとは一連のカルマン・フィルター理論公式を機械的に適用していくことにより、逐次流量ないし水位の予測値とその推定誤差分散が算出されるので、この予測理論は主観的判断を極力排除できる手法とも言えよう。また、テレメータ等により新しい観測値が入手されるたびに予測値と誤差分散が自動更新されるのも、実時間洪水流出予測上有効な方法と考えられる。

カルマン・フィルター理論を実際に運用するにあたっての大きな課題は、「システム誤差分散・共分散」及び「観測誤差分散」をどのように設定するかにある。カルマン・フィルター理論の性質上、テレメータなどによる新しい水文情報が時々刻々入手されるたびに、「状態変量」も自動更新される。したがって、最新の状態変量の推定値に比例する誤差を「乗算的ノイズ」として定義し、それらを「システム誤差分散・共分散」及び「観測誤差分散」に導入すれば、実際の運用にあたって支障が生じないことが確認されている。

ダム流域は面積も比較的小さく、河道の遅れ効果を無視できるので、単一流域とみなしてダム流入量の予測を行うことが実用的であると考えられる。しかしながら、大流域になると、降雨の地域分布及び洪水到達時間の違いなどの理由により、河道の遅れ効果が無視できなくなる。

第5章では、比較的大きな河川流域における実時間洪水流出予測問題を取り上げ、「河道効果による降雨遅れのモデル化」について述べている。石狩川流域における本川基準点(たとえば、石狩大橋地点)では、従来から同じ時定数(遅れ時間)を持つ2段タンク型貯留関数法と同等であるナッシュモデル(Nash model)を用いて、河道の遅れ効果を表現している。具体的な計算手順は、(a) 予測地点上流域をいくつかの小流域に分割し、各分割流域の降雨遅れ時間を固定して、各分割流域の遅れ降雨波形をナッシュモデルにより計算する。(b) 遅れ降雨波形を順次合成して基準点でのハイレートグラフを作成し、「損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)」への降雨入力として、カルマン・フィルター理論を適用して洪水逐次予測を行う。ナッシュモデルは線形微分方程式であり、その解法は

前述した線形化近似解法と同等であるので、数値計算も容易である。

ナッシュモデルにおける各分割流域の降雨遅れ時間に関する定数は、既往洪水例を解析した結果、現在は固定されている。しかしながら、この定数も洪水規模によって大きく変動することが予想されるので、今後は、洪水毎に遅れ時間定数の最適化を探索する手法を開発する必要がある。

現在要求されている洪水予測システムは、高速大容量のデータ通信技術をフル活用して、河川流域における河川情報を多面的角度から捉え、ユーザーが画面表示された情報を正確に解釈して、洪水予警報の情報を関係機関に迅速に伝達できる体系化を図ることにある。現有の「北海道開発局における洪水予測システム」では、一般化貯留関数法にカルマン・フィルター予測理論を組み合わせたオンライン同定による実時間洪水流出予測システムが実運用されている。しかしながら、新しいシステムの構築にあたっては、予測雨量の不確定性を考慮して、流量あるいは水位の予測精度を定量的に評価できる洪水逐次予測手法の開発が不可欠である。そこで、**第6章**では「予測雨量の誤差を考慮した洪水予測モデルの開発」を詳述した。「序」において述べたように、流出モデル定数は洪水毎に変化することはしばしば経験することであり、洪水予測計算を行う上でも既往洪水解析で得られている平均的な定数を使わざるを得ない(たとえば、**表3.1**)。カルマン・フィルターの特徴として、モデル定数のオンライン同定(**図4.4**や**図6.4**を参照)が可能である。したがって、**第6章**では、モデル定数と降雨量を状態変数に加えて、システム方程式の拡大を図り、モデル定数の不確定性(誤差分散)及び予測雨量の誤差分散を取り入れた実用的洪水逐次予測システムを提案し、その有効性を検証してきた。

「序」及び**6.1節**でも議論したように、実時間洪水流出予測における最大のネックは、予測雨量とその予測精度である。レーダ雨量情報を用いた降雨予測も精度面から言えば、現段階では1時間が限度と言われており、降雨予測モデルの開発が急務であるが、まだ時間がかかりそうである。また、予測雨量の推定誤差分散を求める算定式もいくつか提案されており、本報告でもその算定式を採用している。しかしながら、その誤差算定式が北海道でも適用可能であるかの検討が急務である。平成13年と平成15年台風10号の洪水時の実測・予測雨量データを解析して、早急に降雨予測精度の検討を行っておく必要がある。

一般には、流量観測基準点での水位～流量($H\sim Q$)曲線は、適用期間と適用水位を定めて、使用曲線を分類している。この場合、分類曲線を決定するための観測資料数は、高水流量時ほど少なくなる。このため、高水流量時での $H\sim Q$ 曲線の誤差は大きく、ピーク近傍での流量や水位の推定精度は相当低くなっていることを覚悟しなければならない。**第7章**では、観測方程式として水位を採用して、「水位～流量曲線($H\sim Q$ 関係式)を用いた洪水予測手法」を試行してみた。

洪水生起時には、時間的制約もあって、 $H\sim Q$ 曲線を見直すことはほとんど不可能であり、前年度に設定している $H\sim Q$ 曲線を使用せざるを得ない。しかしながら、北海道における洪水は、夏期以降に多く発生している。また、融雪出水は毎年確実に起こることであり、融雪時の「高水流観」による資料収集は貴重な情報源と位置づけられる。

そこで、**7.1節**では、前年度に収集された流量観測資料と今年度の融雪時流量資料を再整理し、 $H\sim Q$ 曲線を一本化したときの誤差評価について詳しく述べている。**表7.2**の中に示されている $H\sim Q$ 曲線の回帰係数 b_0 と b_1 の分散・共分散の値は $10^{-6}\sim 10^{-4}$ とその変動特性が非常に小さいことがわかる。また、回帰係数 b_0 と b_1 を「状態変数」に加えて、回帰係数のオンライン更新を行った結果は、**図7.2**の下段に示されているが、初期値からの変化量は1%以下であることから、回帰係数 b_0 と b_1 を状態変数に加えても予測精度が大幅に向上されないことが明らかとなった。

水位を観測方程式とする場合、当然のことながら、対象河川流域の下流部と上流部では水位のオー

ダーが極端に異なる。このため、7.7 節で述べたように観測所毎に観測誤差分散が大きく異なり、その誤差をどのくらいに設定したらよいかに苦勞する場合が多い。流出モデルによる計算出力は流出高とすることが多いので、場所によるオーダーの違いがない。したがって、対象地点における水位～流量曲線から変換して得られる流出高を観測方程式とすることを推奨したい。

第3章で述べた「損失項を含む貯留関数法（1 段タンク型貯留関数モデル）」は「表面・中間流出成分」の解析に主眼をおいた手法と言える。この流出モデルを数多くの既往洪水に適用した結果を総合すると、ピーク流量が過少に計算される例が多い傾向にあった。そこで、第8章では「表面・中間流出成分」に「地下水流出成分」を加えた「地下水流出成分を含む貯留関数法（2 段タンク型貯留関数モデル）の最適化手法」について述べている。一般的に流出モデルが複雑になるにつれて、同定すべきモデル定数の数も増加する。本章での採用モデルは5 個の定数をもっているが、そのうち、2 個の定数は確定値として与えられる。したがって、第3章のモデルと同様に最適すべき定数は3 個のみとなる。第8章において述べた最適化の特徴は、1 段目タンクの「表面・中間流出成分」を表現する3 個のモデル定数の「地下水流出成分（2 段目タンク）」に及ぼす影響（感度係数と言われる）をも考慮して、全流出量に関するモデル定数の最適化を試み、ハイドログラフ全体の再現性を向上させるところにある。

第9章では第8章で述べた「地下水流出成分を含む貯留関数法」に「カルマン・フィルター理論」を組み合わせ、洪水逐次予測を行う手法について論述している。本章での方法論は第6章で展開した理論に準拠して、流出に関する4 個の変数の他に3 個のモデル定数及び予測雨量を「状態変量」に加えて、「システム方程式」の拡大を図り、モデル定数の誤差分散や予測雨量の誤差分散を導入して、予測水位の精度を定量的に算出している。また、モデル定数のオンライン同定も同時に行っている(図9.5を参照)。

第9章の「地下水流出成分を含む貯留関数法」を用いて、カルマン・フィルターを実行する場合には、解析対象流域におけるモデル定数の初期値が必要となるが、表9.1に示される値が参考となろう。

本報告では第5章を除いて、単一流域を対象とした実時間洪水流出予測問題を中心に理論を展開してきた。今後は、単位流域における流出解析と河道における洪水追跡を含む複合流域における実時間洪水流出予測に適用可能な手法開発への拡張が必要となる。これまでの研究成果によれば、複合流域における分割流域での流出解析と河道洪水追跡を併せた流出量の計算は上流から下流へと順次効率よく行うことができ、實際上大きな課題がないことも確認されている。しかしながら、複合流域における洪水逐次予測の成否は、分割流域と河道を含む大容量からなる「状態変量」に関する推定誤差分散・共分散行列の要素を上流から下流に向けて、いかに効率よく伝達させるかに依存する。

カルマン・フィルター理論をできるだけ易しく理解してもらうためと、この予測理論が洪水逐次予測(operational forecast)に適している一手法であることを広く知ってもらう目的で、過去に北海道開発土木研究所の月報や土木学会の講演会などで発表された論文を整理して補巻に収録した。

参考文献

- 1) 北海道開発局建設部河川管理課監修：北海道開発局の洪水予測システム，432p.，1995.
- 2) 藤田睦博：斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究，土木学会論文報告集，第 314 号，pp.75-86，1981.
- 3) 永井明博・角屋 睦・杉山博信・鈴木克英：貯留関数法の総合化，京大防災研年報 第 25 号，B-2，pp.207-220，1982.
- 4) 宝 馨・高棹 琢馬・椎葉 充晴：洪水流出の確率予測における実際的手法，第 28 回水理講演会論文集，土木学会，pp.415-422，1984.
- 5) (財)北海道河川防災研究センター・研究所編集・発行：一般化貯留関数法による流域流出解析・河道洪水追跡実用計算法，152p.，2001.
- 6) (財)北海道河川防災研究センター・研究所編集・発行：単一流域を対象とした貯留関数法の精度比較，189p.，2002.
- 7) 馬場仁志・星 清・藤田睦博：蒸発散および浸透を組み合わせた二段型貯留関数型流出モデルの開発，水文・水資源学会誌，Vol.14，No.5，pp.364-375，2001.
- 8) 園山裕士・星 清・橋本識秀：2 段タンク型貯留関数法の精度評価，河川技術に関する論文集，土木学会，第 8 巻，pp.425-430，2002.
- 9) 園山裕士・星 清：2 段タンク型貯留関数モデルの同定手法の改良，北海道開発土木研究所月報，No.589，pp.7-18，2002.
- 10) 日野幹雄・長谷部正彦：水文流出解析，森北出版，254p.，1985.
- 11) Etoh,T., Kamibayashi,Y., Nakanishi,M. and Yoshida,M.: A study on prediction error in rainfall forecasting and its application to on-line operation of detention storage, Proc. of International Conference on Water Resources & Environment Research : Towards the 21st Century, Vol. I, pp.531-538, 1996.
- 12) 木村俊晃：貯留関数法の最近の進歩，第 22 回水理講演会論文集，土木学会，pp.191-196，1978.
- 13) Prasad, R.: A nonlinear hydrologic system response model, J. of Hydraulic Division, Proc. of ASCE, Vol.93, HY-4, pp.202-221, 1967.
- 14) 立川康人・市川 温・椎葉 充晴：貯留関数法のモデルパラメータの不確定性を考慮した実用的な実時間流出予測手法，水文・水資源学会誌，Vol.10，No.6，pp.617-626，1997.
- 15) 星 清・山岡 勲：雨水流出法と貯留関数法との相互関係，第 26 回水理講演会論文集，土木学会，pp.273-278，1982.

- 16) 星 清・村上泰啓：小流域における総合貯留関数法の開発，第 31 回水理講演会論文集，土木学会，pp.107-112，1987.
- 17) 星 清：流出予測法の実例，第 24 回水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会，A-3，pp.1-20，1988.
- 18) 河村 明：貯留関数法を用いたカルマンフィルターによる洪水流出の実時間予測(例題 1-11)，pp.1-24，第 1 編 水文編，CD-ROM 水理公式集例題プログラム集，平成 13 年版，土木学会，2002.
- 19) 中津川誠・星 清：水位～流量関係から推定される流量の精度について(1)、北海道開発局開発土木研究所月報，No.443，pp.2-8，1990.
- 20) 中津川誠・星 清：水位～流量関係から推定される流量の精度について(2)、北海道開発局開発土木研究所月報，No.444，pp.2-9，1990.
- 21) 木下良作：河川流量と流れの構造 — ADCP による観測報告 —，独立行政法人北海道開発土木研究所講演会，講演集，56p.，2002 年 12 月.
- 22) 馬場仁志・星 清・橋本識秀：損失機構を組み合わせた貯留関数モデルの総合化，水工学論文集，第 43 巻，土木学会，pp.1085-1090，1999.
- 23) 佐藤力信・嵯峨 浩・馬場仁志・星 清：損失機構を含む貯留関数法を応用したタンクモデルの提案，土木学会北海道支部論文報告集，第 55 号(B)，pp.32-35，1999.
- 24) 椎葉 充晴・高棹琢馬・中北英一：移流モデルによる短時間降雨予測手法の検討，第 28 回水理講演会論文集，第 28 巻，pp.423-428，1984.
- 25) 上林好之：レーダ雨量情報を利用した洪水流出予測に関する研究，学位論文，早稲田大学，215p.，1990.
- 26) 吉野文雄：レーダ水文学，森北出版，175p.，2002.
- 27) 中北英一：レーダー技術の現状と今後，雨水技術資料，Vol.38，pp.25-31，2000.
- 28) 立川康人・椎葉 充晴：共分散行列の平方根分解をもとにした正規確率場および対数正規確率場の発生法，土木学会論文集，No.656/II-52，pp.39-46，2000.
- 29) 立川康人・小松良光・寶 馨：移流モデルによる予測降雨場の誤差構造のモデル化と降雨場の発生，，京大防災研年報 第 45 号 B，pp.101-111，2002.
- 30) 高棹琢馬・椎葉 充晴・寶 馨：集中化流出モデルの構成と流出予測手法，京都大学防災研究所年報，第 25 号 B-2，pp.221-243，1982.
- 31) 高棹琢馬・椎葉 充晴・寶 馨：貯留モデルによる実時間流出予測に関する基礎的研究，京都大学防災研究所年報，第 25 号 B-2，pp.245-267，1982.
- 32) 橋本識秀・兪 朝夫・星 清：洪水流出予測における実際的課題とその解決法，水工学論文集，第 36 巻，土木学会，pp.567-572，1992.

「実時間洪水予測システム理論」 解説書

補 巻

1. カルマン・フィルターの基本概念
2. 洪水予測における貯留関数法の位置づけ
3. 洪水予測におけるカルマン・フィルターの位置づけ
4. 一般化貯留関数法による洪水予測法
5. 種々の不確定性を考慮した洪水流出予測法

(財) 北海道河川防災研究センター・研究所
平成16年5月

1. カルマン・フィルターの基本概念

原資料

星 清：カルマン・フィルターの話
北海道開発局土木試験所月報
No. 409, pp. 26-30, 1987

1. はじめに

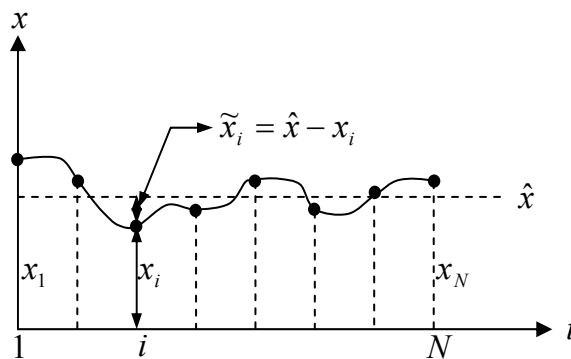
以前、土木試験所月報に「洪水予測システムの基礎的検討」と題した解説をのせたことがある^{1,2)}。その中で、カルマン・フィルター理論を洪水予測システムにどのように組込んでいったらよいかを比較的簡単な例題をとりあげて、その理論構成をできるだけ平易に述べたつもりであった。しかしながら、現場からの声を総合すると、数式があまりに多く、カルマン・フィルター理論がどうして洪水予測に適しているかがよくわからないという批評も多々あった。そこで、本報告では現場からの声を反映させる意味で、カルマン・フィルター理論の再解説を行うことにする。ここに、カルマン・フィルター理論の骨子を理解してもらうために、簡単な例題をとりあげて説明を加える。

カルマン・フィルター理論がどうして洪水予測に適しているかをまず知ってもらう意味で、カルマン・フィルター理論の特徴を要約して以下に示す。

- (a) 人間の経験的直感による予測に近いことを計算機で自動的に行える。すなわち、洪水予測にあまり熟練を要しない。
- (b) 時々刻々の水文テレメータ情報を予測に組込むことができる。すなわち、オンライン予測に適している。
- (c) 予測値の誤差分散（予測精度）が自動的に算定される。すなわち、予測値の信頼区間を知ることができる。
- (d) 過去の長い水文量情報を必要としない。すなわち、計算機のデータ容量が少なくてもよい。

2. 下準備

カルマン・フィルター理論は 1960 年にカルマン (Kalman) によって発表された論文に由来する。原論文は確かに難解であり、フィルター理論を理解するためには相当の確率過程論の習熟が必要である。このため、カルマン・フィルター理論を平易に誘導しようとする試みがいくつかなされている^{3,4)}。本報告での説明においても、数式を最小限にとどめるよう努力するが、平均値と分散は最小必要事項である。したがって、復習の意味もかねて、平均値と分散の定義を説明しておこう。



図－1 水文量時系列の離散化

たとえば、図-1に示されるような、ある水文量（降雨量とか流量）時系列を考えてみる。今、ある一定時間間隔（時間とか日）で水文量時系列をサンプリングした水文データが $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ で与えられるとする。すなわち、 N は標本数である。さて、水文量標本値 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ の平均値 ($\hat{x}$) と分散 (σ^2) を計算して下さいといえ、誰しも次式を使うであろう。

$$\text{平均値} \quad \hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

$$\text{分散} \quad \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x} - x_i)^2 \quad (2)$$

(2)式の分散を計算する際、 N の代わりに $(N-1)$ を使った方がよいという人もいるかもしれないが、説明の便宜上、(2)式で分散を定義しておく。(1)、(2)式であれば、誰でも知っている式であり、あまり問題になることはない。しかしながら、統計学の本やカルマン・フィルター理論展開には(1)、(2)式はあまりでてこない。実際、シグマ記号 (Σ) をいちいち書くのは面倒である。この面倒さをさけるために、ある統計学者が $E(\cdot)$ という期待値演算子を考案している。 $E(\cdot)$ という記号がでてきてもなにも驚くことはない。 $E(\cdot)$ は要するに平均値を計算する操作記号と覚えておけば間違いない。たとえば、 $E(x) = \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) / N$ であるし、 $E(x^2) = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right) / N$ を意味しているにすぎない。したがって、期待値演算子 $E(\cdot)$ を用いて、(1)、(2)式を書換えると次式が得られることは容易にわかる。

$$\text{平均値} \quad \hat{x} = E(x) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{分散} \quad \sigma^2 &= E\{[x - E(x)]^2\} \\ &= E\{[x - \hat{x}]^2\} = E\{[\hat{x} - x]^2\} \end{aligned} \quad (4)$$

期待値演算子を用いると、(1)、(2)式の平均値と分散の表現式が非常に簡単になることがわかる。

標本値 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ の平均値が(1)ないし(3)式で計算されれば、 x_i が $\hat{x}$ からどのくらい離れているかが次に問題となる。すなわち、誤差 $\tilde{x}_i$ は次式で与えられる。

$$\tilde{x}_i = \hat{x} - x_i \quad (x_i - \hat{x} \text{ でもよい}) \quad (5)$$

(5)式を用いて、(2)と(4)式を書換えると、分散は次式で表現できよう。

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{x}_i)^2 \quad (6)$$

あるいは、

$$\sigma^2 = E[(\tilde{x})^2] \quad (7)$$

ここで、分散の意味を少し考えてみよう。(6)式からもわかるように、分散は誤差 2 乗と平均値である。したがって、 x_i と $\hat{x}$ のへだたりが小さければ分散 σ^2 は小さくなるし、反対に x_i と $\hat{x}$ のへだたりが大きくなれば σ^2 は大きくなる。すなわち、分散は平均値からの離れ度合を示す尺度であるといえよう。後に説明するように、 $\hat{x}$ はカルマン・フィルターによる流量予測値に相当する。もし仮に、 $\hat{x}$ が流量予測値であるとすれば、 $\hat{x}$ の推定精度が高いか低いかということが洪水予測では重要な問題となる。カルマン・フィルター理論においては、この推定精度が(7)式の分散によって自動的に算出されている。すなわち、分散が小さいということは推定精度が高いことになり、反対に分散が大きいということは推定精度が低いことになる。

次に、カルマン・フィルター理論においては、不偏推定値という言葉がよくでてくる。結論から先にいえば、不偏推定値とは誤差の平均値がゼロになっていることをいう。それでは、(5)式で定義されている誤差 $\tilde{x}_i$ の平均値がゼロになっているかを確認してみる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x} - x_i) = \frac{1}{N} \left(N\hat{x} - \sum_{i=1}^N x_i \right) \\ &= \hat{x} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \hat{x} - \hat{x} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

すなわち、誤差 $\tilde{x}_i$ の平均値はゼロになっている。同様に、期待値演算子 $E(\cdot)$ を使っても証明できる。

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}) &= E[\hat{x} - x] = E(\hat{x}) - E(x) \\ &= \hat{x} - \hat{x} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式で $E(\hat{x}) = \hat{x}$ となっている理由は、図-1 に示されるように、平均値 $\hat{x}$ は一定値（確定値）であり、その平均値は確定値そのものであるからである。

3. カルマン・フィルターの基本概念

以上の下準備をもとに、カルマン・フィルター理論の骨子を理解してもらうために、単純な適用例をとりあげる。今、洪水予測問題に焦点をしばって、われわれが流量を知る手段としてどんな方法があるかをまず考えてみよう。

(Ⅰ) なんらかの数学的モデル（たとえば、貯留関数法）を使う方法

(Ⅱ) 水位観測から水位～流量曲線を用いて流量に変換する方法

実は、カルマン・フィルター理論は上記 2 方法による情報に基づいて流量推定値の最適値を得ようとするものである。換言すれば、上記 2 つの方法によっても、われわれは流

量の“真値”を知ることとはできず、必ず誤差を伴う。われわれは“真値”にできるだけ近い推定値を得ようとしているのである。カルマン・フィルター理論においては、(I)をシステム方程式、(II)を観測方程式と呼んでいる。

(I)の方法によるシステム方程式は、次のように定式化される。

$$z_1 = x + v_1 \quad (10)$$

ここで、 z_1 ：数学的モデルによる流量の推定値、 x ：流量の“真値”（われわれはわからない）、 v_1 ：モデル化による誤差

洪水流出解析に用いられている流出モデルは相当数にのぼる。したがって、採用流出モデルによって流量推定値 z_1 も異なり、それに伴ってモデル誤差 v_1 も変化することがわかる。カルマン・フィルター理論においては、 v_1 の値を知る必要はない代わりにその平均値と分散を規定しなければならない。すなわち、

$$E(v_1) = 0 \quad (11)$$

$$\sigma_1^2 = E(v_1^2) \quad (12)$$

(11)式は不偏推定値であるための条件であり、(12)式はモデル誤差の分散である。（ v_1 の平均値がゼロであることに注意する）。

(II)の方法による観測方程式は、次のように定式化される。

$$z_2 = x + v_2 \quad (13)$$

ここで、 z_2 ：水位～流量曲線の変換から得られる流量推定値、 x ：(10)式と同様に流量の“真値”、 v_2 ：流量観測精度に依存する観測誤差

水位～流量曲線作成にあたっては、低水・高水の広範囲にわたって流量観測がなされていることが望ましい。最近、洪水観測体制が整備されつつあるが、出水時の流量観測には種々の困難が伴う。もし仮に、水位～流量曲線が低水時の流量観測資料のみによって作成されている場合には、洪水ピーク近傍での流量推定精度は相当に低いことを覚悟しなければならない。したがって、洪水ピーク近傍における水位～流量曲線による流量推定値 z_2 とそれに伴う観測誤差 v_2 が大きくなることは容易に想像できよう。(10)式のモデル誤差 v_1 と同様に、観測誤差 v_2 についてもその平均値と分散を次のように規定する。

$$E(v_2) = 0 \quad (14)$$

$$\sigma_2^2 = E(v_2^2) \quad (15)$$

(14)式は不偏推定値であるための条件であり、(15)式は観測誤差 v_2 の分散を与える式で

ある (v_2 の平均値は(14)式に示されるように、ゼロであることに注意)。

(10)、(13)式に示されるカルマン・フィルター理論におけるシステム方程式と観測方程式ができたので、いよいよ流量の最良推定値 $\hat{x}$ をどのように算定したらよいかという議論に進むことにする。この $\hat{x}$ を得るもっと簡単な方法として、誰しも(10)式と(13)式の重みつき平均値を考えるであろう。すなわち、

$$\hat{x} = k_1 z_1 + k_2 z_2 \quad (16)$$

ここで、 k_1 と k_2 は重み係数でこれらを決定してやる必要がある。

次に、流量の“真値” x とその推定値 $\hat{x}$ の誤差 $\tilde{x}$ を考えると、

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \quad (17)$$

前述したように、 $\hat{x}$ が不偏推定値であるためには、 $\tilde{x}$ の平均値がゼロでなければならない。すなわち、次式が成立しなければならない。

$$E(\tilde{x}) = 0 \quad (18)$$

(18)式に(16)、(17)式を代入すると、

$$E(\tilde{x}) = E[(k_1 z_1 + k_2 z_2) - x] = 0 \quad (19)$$

さらに、(10)式の z_1 と(13)式の z_2 を(19)式に代入すると、

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}) &= E\{k_1(x + v_1) + k_2(x + v_2) - x\} \\ &= E\{(k_1 + k_2 - 1)x + k_1 v_1 + k_2 v_2\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$= (k_1 + k_2 - 1)E(x) + k_1 E(v_1) + k_2 E(v_2) = 0 \quad (21)$$

(21)式の右辺における各項の性質をよく考えてみよう。

x は流量の“真値”で、ただ 1 つしか存在しないので確定値であり、 $E(x) = x$ である。また、(11)、(14)式から、 $E(v_1) = E(v_2) = 0$ となる。したがって、(21)式が必ずゼロになるためには、次式が成立しなければならないことがわかる。

$$k_1 + k_2 - 1 = 0 \quad \text{あるいは、} \quad k_1 = 1 - k_2 \quad (22)$$

(22)式の関係式を(20)式に代入すると、誤差項 $\tilde{x}$ は次式で与えられることがわかる。

$$\tilde{x} = (1 - k_2)v_1 + k_2v_2 \quad (23)$$

(7)式の分散定義式から、 $\tilde{x}$ の分散を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(\tilde{x})^2] = E\{(1 - k_2)v_1 + k_2v_2\}^2 \\ &= E\{(1 - k_2)^2v_1^2 + 2(1 - k_2)k_2v_1v_2 + k_2^2v_2^2\} \\ &= (1 - k_2)^2E(v_1^2) + 2(1 - k_2)k_2E(v_1v_2) + k_2^2E(v_2^2) \end{aligned} \quad (24)$$

(24)式の右辺において、(12)、(15)式から $E(v_1^2) = \sigma_1^2$ と $E(v_2^2) = \sigma_2^2$ が成立する。 $E(v_1v_2)$ は(10)式のモデル化による誤差 v_1 と(13)式の観測誤差 v_2 の共分散である。 v_1 と v_2 が互いに独立であると仮定すれば、 $E(v_1v_2) = 0$ となる。この独立な条件を考慮すると、(24)式は次のようになる。

$$\sigma^2 = E[(\tilde{x})^2] = (1 - k_2)^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 \quad (25)$$

(17)式にもどって、 $\tilde{x}$ は流量の“真値” x とその推定値 $\hat{x}$ の差になっており、(25)式の σ^2 は推定値の誤差分散を意味する。前述したように、誤差分散は $\hat{x}$ の推定精度に関連する。すなわち、われわれの最大の関心事は流量の推定値 $\hat{x}$ の精度をあげることにある。したがって、精度向上には(25)式の分散をできるだけ小さくしてやればよい。先に、(16)式の重み係数 k_1 と k_2 ((22)式より $k_1 = 1 - k_2$ が成立する)を決定しなければならないと述べた。この k_2 の決定に、(25)式の分散を最小にすることを考えればよいことになる。すなわち、次式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial k_2} = -2(1 - k_2)\sigma_1^2 + 2k_2\sigma_2^2 = 0 \quad (26)$$

(26)式を k_2 について解くと、

$$k_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}} \quad (27)$$

(27)式を(22)式に代入して k_1 を求めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 1 - k_2 \\
 &= \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}
 \end{aligned} \tag{28}$$

(27)式を(25)式に代入して、流量推定値 $\hat{x}$ の誤差分散を計算すると次式が得られる。

$$\sigma^2 = E[(\hat{x})^2] = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} \tag{29}$$

(29)式は非常に重要な性質をもっている。それらを要約して、以下に示す。

- (a) σ^2 は流量推定値 $\hat{x}$ の精度（分散）である。したがって、 $\hat{x}$ が計算されたとしても、 σ^2 があまりに大きすぎると、推定値 $\hat{x}$ の信頼度は非常に低いことになる。実際問題を想定すれば、推定値 $\hat{x}$ は信頼おけない値ということになる。
- (b) 流量推定精度 σ^2 は、モデル誤差分散 σ_1^2 と観測誤差分散 σ_2^2 の大きさに依存する。 σ_1^2 と σ_2^2 がともに大きくなると σ^2 も大きくなる。すなわち、流量推定精度は低下してくる。反対に、モデル誤差と観測誤差がともに小さい（ σ_1^2 と σ_2^2 が小さい）ときには σ^2 も小さくなり、推定精度があがる。
- (c) (b)の事実を念頭におくと、流量予測計算にあたっては、モデル誤差が小さくなるような流出モデルを選ばなければならない。また、観測誤差を小さくするためには、洪水時の流量観測をできるだけ多く行って、水位～流量曲線の精度向上に努力する必要がある。

(22)式から得られる $k_1 = 1 - k_2$ を(16)式に代入すると、流量推定値 $\hat{x}$ は次のようにも書換えることができる。

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= (1 - k_2)z_1 + k_2 z_2 \\
 &= z_1 + k_2(z_2 - z_1)
 \end{aligned} \tag{30}$$

(30)式もカルマン・フィルターを理解するうえで重要な式である。その特徴を以下に列挙してみる。

- (a) (30)式の右辺第1項の z_1 はなにを意味しているかを考えてみよう。(10)式にもどって、 z_1 はなんらかの流出モデルを用いたときの流量推定値である。したがって、降雨量がわかれば（あるいは降雨予測値でもよい）、流出計算によって推定できる量である。

- (b) 次に(30)式の右辺第2項の $(z_2 - z_1)$ はなにを意味しているかを考えよう。(13)式に示されるように、 z_2 は流量観測値（もちろん、水位～流量曲線から補間して得られるが）であり、 z_1 は流出モデルによる推定値である。したがって、 $(z_2 - z_1)$ は観測値と推定値（予測値）との誤差であり、 k_2 は $(z_2 - z_1)$ の誤差に応じた重みづけ係数であると判断できよう。
- (c) 実際に流量予測をしなければならない人の立場で、(30)式の意味を考えると興味深い。 z_1 と z_2 の差が小さければ、実務者は流出モデル計算による z_1 を信用して、その値を流量予測値 $\hat{x}$ とみなすであろう。反対に、 z_1 と z_2 の差が大きければ、実務者は $(z_2 - z_1)$ の大きさに応じて重みづけを行い、 z_1 を補正して流量予測値 $\hat{x}$ を算定しようとする意識が働くはずである。したがって、(30)式は人間の直観に近いことができる構造式となっている。先に、カルマン・フィルター理論が人間の経験的直観による予測に近いことを計算機で自動的に行えると述べたのは(30)式の性質による。

(30)式の重み係数 k_2 はカルマン・フィルター理論では重要な要素であり、しばしばカルマン利得（カルマン・ゲイン）と呼ばれている。それでは、このカルマン・ゲイン k_2 がどのような性質をもっているかを(27)式から調べてみることにする。

- (a) σ_2^2 / σ_1^2 が大きくなる（すなわち、観測誤差が大きく、モデル誤差が小さい）とき、 k_2 は小さくなる。したがって、(30)式の右辺第2項の $k_2(z_2 - z_1)$ の影響は非常に小さくなり、流量予測値 $\hat{x}$ はほとんど第1項のモデルによる推定値 z_1 で決まってしまうことになる。
- (b) σ_2^2 / σ_1^2 が小さくなる（すなわち、観測誤差が小さくて、モデル誤差が大きい）とき、 k_2 は大きくなる。したがって、(30)式の右辺第2項の $k_2(z_2 - z_1)$ は第1項の z_1 と同じくらい重要な影響をもつことになり、流量予測値 $\hat{x}$ に及ぼす補正効果が大きくなる。

以上、カルマン・ゲインの性質は人間が経験的直観に頼って予測値を補正する方法によく一致していることがわかっていただけたと考える。

4. おわりに

現在、カルマン・フィルターは多くの分野の問題に適用されている。洪水予測における適用もその一例である。しかしながら、カルマン・フィルター理論がよくわからないという声もしばしば聞く。その第一の理由は、カルマン・フィルター理論では行列表示を含め、多くの数式がでてくるためと考えられる。とくに、数学から遠のいている実務者にとって、カルマン・フィルター理論式を1つ1つ追いながら理解していくことは非常に苦痛であろう。このため、「木を見て森を見ず」の格言どおり、カルマン・フィルター理論が一体どういう意味をもつかを理解できないまま、匙を投げてしまう懸念が大きい。

極言すれば、カルマン・フィルター理論の真の意味を理解するためには、誰でもわかっている平均値と分散の概念で十分である。ただし、カルマン・フィルター理論では、平均値と分散を $E(\cdot)$ という期待値演算子で表現することが多いので、下準備において平均値と分散を $E(\cdot)$ で表現する方法についても解説を加えた。したがって、本報告を読むにあたっては、他の統計学の本などがなくても、内容が十分に理解できるよう配慮したつもりである。

カルマン・フィルター理論を実際問題に適用するときには、ここで述べた方法より複雑になる。しかしながら、本報告の主目的はカルマン・フィルター理論の基本的性質を理解するところにあるので、設定した問題も非常に単純化している。また、数式は最小限に留め、その数式の意味するところを詳しく述べてきた。構成式としてのシステム方程式と観測方程式、およびカルマン・ゲインの意味を理解することがとくに重要である。

カルマン・フィルター理論を実際に適用するとき、問題がないのかといえば、必ずしもそうではない。とくに(12)式のモデル誤差分散 σ_1^2 と(15)式の観測誤差分散 σ_2^2 をどのように設定したらよいかという疑問が生ずる。この問題に関しては、最近、京大グループ⁵⁾が「乗算的誤差」概念の導入を図っており、実際の運用も比較的容易に行える方法を提案している。この方法論の説明は別の機会に譲る。

参 考 文 献

- 1) 星 清: 洪水予測システムの基礎的検討(1), 土木試験所月報, No.385, pp.42-51, 1985.
- 2) 星 清: 洪水予測システムの基礎的検討(2), 土木試験所月報, No.386, pp.48-68, 1985.
- 3) 日野幹雄: Kalman の予測推定理論の平易な誘導について, 東京工業大学土木工学科研究報告, No.15, pp.91-99, 1973.
- 4) 神田 徹・藤田睦博: 水文学—確率論的手法とその応用—, 新体系土木工学 26, 技報堂, 1981.
- 5) 宝 馨・高棹琢馬・椎葉充晴: 洪水流出の確率予測における実際的手法, 第 28 回水理講演会論文集, pp.415-422, 土木学会, 1984.

2. 洪水予測における貯留関数法の位置づけ

原資料

星 清：洪水予測システムの基礎的検討(1)

北海道開発局土木試験所月報

No. 385, pp. 42-51, 1985

1. はじめに

ここ数年来、各開発建設部および直轄ダムにおいて、洪水情報の収集・処理・伝達を機能的に行うことを目的とした河川情報システムの導入がはかられている。同時に、洪水生起時の災害防止・軽減のために、的確、かつ迅速な洪水予報システムを確立することを第一の目的とする流出逐次予測、すなわち、洪水予測システムの開発が進められている。各開発建設部でこれまでに開発された洪水予測システムの成果が、昭和 58 年 1 月発行の「北海道開発局の洪水予測システム」報告書に収められている¹⁾。この報告書を一見すると、ほとんどの建設部において、洪水流出モデルとして貯留関数法が用いられている。一方、採用予測手法は各開発建設部ともまちまちであり、必ずしも体系化されているとはいえない。今後は、実務レベルでの洪水予測システムに対する熟知徹底を含め、流出モデル・予測理論の改良を加えて、予測精度を向上させていく必要がある。

本報告では、2 回にわたり洪水予測システム開発に介在する課題、すなわち、流出モデルと予測理論の選択問題を平易に解説する。洪水流出モデルとしての貯留関数法は各開発建設部においても多くの実績があるので、第 1 回目は洪水予測システムに組込む貯留関数モデルとしてどのような構造式が適切であるかを詳述する。第 2 回目は予測理論としてのカルマン・フィルター (Kalman filter) を洪水流出逐次手法にどのように適用していくかを述べる。

2. 洪水流出逐次予測

洪水流出の逐次予測は、時々刻々入手される観測値情報（降雨・水位）をもとに数時間先の流出予測を行うという点で、オンライン予測と呼ばれることが多い。洪水流出オンライン予測の構成要素をマクロ的にとらえたのが図-1 である。

洪水流出予測に伴う最大の難点は降雨予測であろう。近年、アメダスや雨量レーダなどの観測体制の整備に伴い、この情報を取入れた豪雨の短期予測が研究レベルで推進されているが、実用面での活用にあたってはまだ越えなければならない壁がいくつか残されている。アメダスや雨量レーダから得られる観測情報量は膨大であり、データ処理と

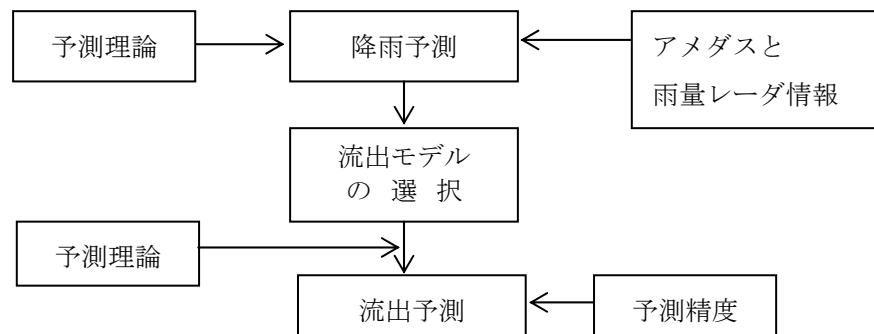


図-1 洪水流出予測の構成要素

予測演算に要する時間短縮が今後の課題となろう。北海道開発局においても、近い将来雨量レーダ設置が予定されており、レーダ観測情報をいかに効率よく洪水予測システムに反映していくかを検討しておく必要がある。

洪水流出のオンライン予測においても、流出モデルを選択しなければならない。洪水防御施設操作、洪水予報の伝達、避難・水防活動などの緊急度を考慮すると、計算があまりかかりすぎる複雑なモデルは極力さけるべきである。計算の迅速さという観点からは、流出系の非線形性を比較的単純な構造式で表現できる貯留関数モデルが有利である。どのような予測理論を採用しようとも、予測値と実測値には誤差が生ずる。この差は降雨予測の不正確さと観測値誤差にも起因するが、流出モデルの不完全さによる影響も大である。したがって、ハイドログラフの形状特性を的確に表現できる貯留関数モデル構造の決定が流出逐次予測のために不可欠である。

最後に、降雨予測と流出予測ともなんらかの予測理論が必要となる。現段階では計算容量も少なく、計算も容易なカルマン・フィルター理論の適用が洪水流出の逐次予測に最も威力を発揮する一手法と考えられている。特に、カルマン・フィルターは予測値の誤差分散を逐次推定していくので予測精度を知るのに有効である。

3. 貯留関数モデル

各開発建設部においても、貯留関数法が洪水流出解析に広く用いられている。したがって、洪水予測モデルとして、貯留型流出モデルを採用することに関しては違和感がないであろう。しかしながら、どのような型式の貯留関数モデルを採用すべきかという問題に関しては、“予測”ということを念頭に入れておく必要がある。最近、モデルの実用性を重視して、降雨流出過程の物理機構、すなわち、雨水流の挙動に関する水理式を基礎にした **Kinematic wave**（等価粗度）モデルを貯留関数モデルに変換する研究成果が多数発表されている²⁾。今後、物理構造を考慮した貯留型流出モデルが流出予測の主流となるであろう。

貯留関数モデルの構造式を決定する前に、**図-2**に示すハイドログラフの形状特性をどのように表現したらよいかを考えてみよう。まず、ハイドログラフの上昇部の流量予測

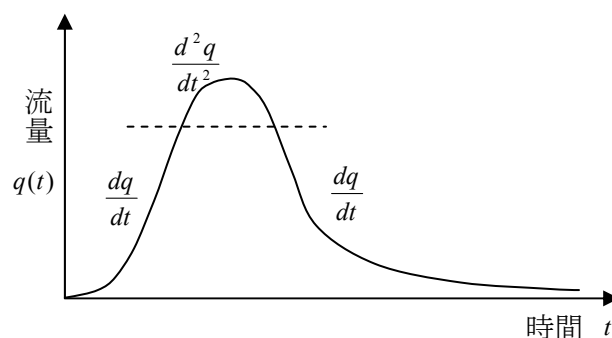


図-2 ハイドログラフの形状特性

においては、勾配、すなわち、 dq/dt が支配的要素となることが理解できる。一方、ピーク近傍での流量予測においては、曲率、すなわち、 d^2q/dt^2 の効果が予測精度に大きく影響する。したがって、貯留関数モデルは、少なくとも dq/dt と d^2q/dt^2 項を含むのが適当である。

貯留関数形も線形貯留方程式と非線形貯留方程式に分類される。もちろん、線形方程式の方が計算が容易であるが、洪水時の貯留量と流量の関係をプロットしてもわかるように、多くの場合、この関係は非線形である。したがって、実際の運用にあたっては、非線形貯留方程式の採用が妥当と考えられる。以上の考察により、貯留型流出モデルの構造を次式で与える。

$$s = k_1 q^p + k_2 \frac{dq}{dt} + k_3 \frac{d^2q}{dt^2} \quad (1)$$

ここで、 s : 貯留高 (mm), q : 流出高 (mm/h), t : 時間 (h), k_1, k_2, k_3, p : モデルパラメータ

また、連続式は次式で与えられる。

$$\frac{ds}{dt} = r - q \quad (2)$$

ここで、 r : 降雨量 (mm/h)

(1)式の右辺第3項を除いた貯留式は、プラサド (Prasad) ³⁾によって提案された型式である。大中洪水においては、直接流出成分が卓越していると考えられる。このとき、Manning 型の表面流出モデルを想定すると、(1)式中のモデルパラメータ k_1, k_2, p は Kinematic wave モデルを集中化することにより、次式で推定されることが知られている ⁴⁾。

$$\begin{cases} k_1 = 2.53 \left(n / \sqrt{i} \right)^{0.6} A^{0.24} & (3) \\ k_2 = 0.152 k_1^2 \bar{r}^{-0.8} & (4) \\ p = 0.6 & (5) \end{cases}$$

ここで、 n : 等価粗度 (s/m^{1/3}), i : 平均斜面勾配, A : 流域面積 (km²), $\bar{r}$: 平均雨量強度 (mm/h)

なお、(3)、(4)式の導出にあたっては実測の降雨波形を平均雨量強度 $\bar{r}$ の矩形降雨で置換えてパラメータを推定してある。また、山地流域河川において大中洪水を対象とする場合、(3)式中の $(n / \sqrt{i})^{0.6}$ の値のオーダーは 1~2 となることが知られている。したが

って、実際の流出予測にあたっては、モデルパラメータ k_1 と p を(3)、(5)式に固定してもさしつかえないと考えられる。第2報では、カルマン・フィルター理論の流出予測への適用を述べるが、カルマン・フィルター理論は流量予測に加えて、モデルパラメータのオンライン推定が可能である。そこで、第2報ではパラメータ k_2 と k_3 のオンライン同定問題を取上げる。

4. モデル解法

いずれにしても、モデルパラメータ k_1, k_2, k_3, p が既知として、(1)、(2)式を流出高、 q について解かなければならない。このとき、流出予測という性格上、計算が速く行える解法を準備しておく必要がある。

今、(1)、(2)式を q について解くために、次の変数変換を行う。

$$\begin{cases} x_1 = q \\ x_2 = \frac{dq}{dt} \\ x_3 = \frac{d^2q}{dt^2} \end{cases} \quad (6)$$

上式を t について微分すると、

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{dq}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = x_3 \end{cases} \quad (7)$$

(6)式を(1)式に代入すると、

$$s = k_1 x_1^p + k_2 x_2 + k_3 x_3 \quad (8)$$

(8)式を t で微分し、(2)式の連続式を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= k_1 p x_1^{p-1} \frac{dx_1}{dt} + k_2 \frac{dx_2}{dt} + k_3 \frac{dx_3}{dt} \\ &= r - x_1 \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式に(7)式の関係式を代入すると、 x_3 に関する微分方程式が次式で与えられる。

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{k_3}x_1 - \frac{k_1}{k_3}px_1^{p-1}x_2 - \frac{k_2}{k_3}x_3 + \frac{r}{k_3} \quad (10)$$

(7)、(10)式をまとめると、次の3元連立微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3) \\ \quad = -\frac{1}{k_3}x_1 - \frac{k_1}{k_3}px_1^{p-1}x_2 - \frac{k_2}{k_3}x_3 + \frac{r}{k_3} \end{cases} \quad (11)$$

(11)式を解くにあたり、(12)式の初期条件を設定する。

$$\begin{cases} x_1|_{t=0} = x_0 \text{ (初期流量)} \\ x_2|_{t=0} = x_3|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

(11)式 of 非線形連立微分方程式は、種々の数値解法を利用して解くことができるが、本報告では計算が容易で、しかもカルマン・フィルター理論の適用に便利な線形化方程式に変換しておく。まず、以後の解析に便利のように(11)式をベクトル表示すると、

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (13)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (14)$$

非線形関数 $F(X)$ をあらかじめ既知な $X = X^*$ において、テーラー級数展開を用いて線形化すると、次式が得られる。

$$F(X) = F(X^*) + A(X^*)(X - X^*) \quad (15)$$

ここで、 $A(X^*)$ は (3×3) 行列であり、次式で定義される。

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{X=X^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

(16)式の行列要素 a_1, a_2, a_3 は次式で計算される。

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{1}{k_3} - \frac{k_1}{k_3} p(p-1)(x_1^*)^{p-2}(x_2^*) \\ a_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = -\frac{k_1}{k_3} p(x_1^*)^{p-1} \\ a_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -\frac{k_2}{k_3} \end{cases} \quad (17)$$

なお、 X^* の決定には次の手段を用いればよい。すなわち、任意の時刻、 $(k+1)$ 時点での X の値、 X_{k+1} を計算しようとするれば、 k 時刻での X_k の値はすでに既知であるから、実用上、 $X^* = X_k$ としてよからう。

(13)式の右辺 $F(X)$ に(15)式を代入すれば、次の線形微分方程式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (18)$$

ここで、

$$\begin{aligned} D(X^*) &= F(X^*) - A(X^*)X^* \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \\ f_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \\ f_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= f_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*) - a_1 x_1^* - a_2 x_2^* - a_3 x_3^* \\ &= \frac{k_1}{k_3} p(p-1)(x_1^*)^{p-1}(x_2^*) + \frac{r}{k_3} \end{aligned} \quad (20)$$

(18)式は線形微分方程式であるが、計算機を用いた計算にはなじまない。そこで、計算が容易に行えるように、(18)式を次の差分方程式に変換する⁵⁾。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (21)$$

ここで、 X_k は任意の計算時間ステップ、 k における X の値である。また、各変数行列の要素は次式で定義される。

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_k \quad D_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix}_k \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \exp(AT) = I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \frac{1}{24}(AT)^4 \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 \\ \phi_7 & \phi_8 & \phi_9 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= [\exp(AT) - I]A^{-1} \\ &= T \left[I + \frac{1}{2}(AT) + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 \right] \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 \\ \gamma_7 & \gamma_8 & \gamma_9 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

(23)、(24)式中の T は計算時間間隔であり、 I は(3×3)の単位行列である。また、 A は(16)式の行列である。

Φ_k と Γ_k の要素を計算するには、(16)式より行列 A^2, A^3, A^4 の演算を行い、その結果を(23)、(24)式に代入すればよい。整理した結果を以下に示す。

$$\begin{cases}
 \phi_1 = 1 + \frac{1}{6}a_1T^3 + \frac{1}{24}a_1a_3T^4 \\
 \phi_2 = T\left(1 + \frac{1}{6}a_2T^2 + \frac{1}{24}a_4T^3\right) \\
 \phi_3 = T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_3T + \frac{1}{24}a_5T^2\right) \\
 \phi_4 = a_1\phi_3 \\
 \phi_5 = 1 + \frac{1}{2}a_2T^2 + \frac{1}{6}a_4T^3 + \frac{1}{24}a_6T^4 \\
 \phi_6 = T\left(1 + \frac{1}{2}a_3T + \frac{1}{6}a_5T^2 + \frac{1}{24}a_7T^3\right) \\
 \phi_7 = a_1\phi_6 \\
 \phi_8 = T\left(a_2 + \frac{1}{2}a_4T + \frac{1}{6}a_6T^2 + \frac{1}{24}a_8T^3\right) \\
 \phi_9 = 1 + a_3T + \frac{1}{2}a_5T^2 + \frac{1}{6}a_7T^3 + \frac{1}{24}a_9T^4
 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases}
 \gamma_3 = T^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}a_3T\right) \\
 \gamma_6 = T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_3T + \frac{1}{24}a_5T^2\right) = \phi_3 \\
 \gamma_9 = T\left(1 + \frac{1}{2}a_3T + \frac{1}{6}a_5T^2 + \frac{1}{24}a_7T^3\right) = \phi_6
 \end{cases} \quad (26)$$

ここで、

$$\begin{cases}
 a_4 = a_1 + a_2a_3 & a_5 = a_2 + a_3^2 & a_6 = a_1a_3 + a_2a_5 \\
 a_7 = a_4 + a_3a_5 & a_8 = a_1a_5 + a_2a_7 & a_9 = a_6 + a_3a_7
 \end{cases} \quad (27)$$

なお、行列 Γ_k の要素のうち、 $\gamma_3, \gamma_6, \gamma_9$ のみが実際の計算に必要となる。その理由は、(22)式に示されるベクトル D_k の要素のうち、最初の2つの要素がゼロだからである。上に求めた行列の要素を(21)式に代入すると、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 \\ \phi_7 & \phi_8 & \phi_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_6 \\ \gamma_9 \end{bmatrix} (d_1)_k \quad (28)$$

(28)式の行列を展開すると、次に示すようにさらに計算が容易になる。

$$\begin{cases} (x_1)_{k+1} = \phi_1(x_1)_k + \phi_2(x_2)_k + \phi_3(x_3)_k + \gamma_3(d_1)_k \\ (x_2)_{k+1} = \phi_4(x_1)_k + \phi_5(x_2)_k + \phi_6(x_3)_k + \gamma_6(d_1)_k \\ (x_3)_{k+1} = \phi_7(x_1)_k + \phi_8(x_2)_k + \phi_9(x_3)_k + \gamma_9(d_1)_k \end{cases} \quad (29)$$

(29)式は任意の計算ステップ、 $(k+1)$ における変数 x_1, x_2, x_3 の値を前の計算ステップ、 k の値から順次計算できることを意味する。

したがって、計算機演算にもっとも適した手法といえる。なお、変数 x_1, x_2, x_3 は(6)式に示されるように、 $x_1 = q$, $x_2 = dq/dt$, $x_3 = d^2q/dt^2$ である。すなわち、 $(k+1)$ ステップでの計算流量 q は、 k ステップにおける勾配と曲率の影響を取入れていることがわかる。この特性は、特にハイドログラフのピーク近傍での流量予測に効果が現われると考えられる。

以上、(11)式の3元連立非線形微分方程式を簡便法で解く方法を述べた。このとき、この近似解法の計算精度を検討しておく必要がある。計算結果にもっとも影響を及ぼす要因は計算時間間隔 T である。当然のことながら、 T を小さくとれば、近似解法による解の精度は向上するが、計算時間は増大する。現実問題としても、計算時間があまりかかりすぎるのであれば、洪水予測モデルとしての機能を果たさないことになる。したがって、各開発建設部および直轄ダムに設置されている計算機能力に応じた計算時間間隔 T の決定が必要となる。洪水時における予測システムの運用状況をまず考えてみよう。河川情報システムを媒介として得られる水文量データ（降雨量と水位）は、安全をみて1時間ごとに得られるものとする。現時点で得られる水文量観測値情報をもとに1時間先、2時間先、3時間先の流出予測が通常必要となろう。もちろん、予測時間（リードタイム）に応じた降雨予測のための演算時間も念頭に入れておく必要がある。降雨予測の計算時間はそのモデルの難易度に依存してくる。水文量観測データのサンプリング時間を1時間として、1時間の分割数を12個とすると、計算時間間隔は $T=1/12$ hrs（すなわち、5分）となる。この計算条件で3時間先の流出予測を終了するのに、計算ステップは毎回（すなわち、1時間ごとに）36回必要となる。したがって、この計算ステップ終了に要する演算時間は、各開発建設部が有する予測機器の能力に見合ったものでなければならない。

ここでは計算時間間隔 T を種々変化させたときの計算流量精度を仮定の降雨波形を用いて検討してみる。このためには、流量の“真値”が必要であるが、これには次の方法によった。すなわち、非線形連立微分方程式の数値解法には、計算が比較的速く、精度も高いルンゲ・クッター・ギル（Runge-Kutta-Gill）法がよく用いられている。したがって、計算時間間隔を $T=1/20$ hrs(3分)として、ルンゲ・クッター・ギル法で求めた流量の数値解を“真値”とみなす。また、計算条件として、(12)式の初期条件をすべて

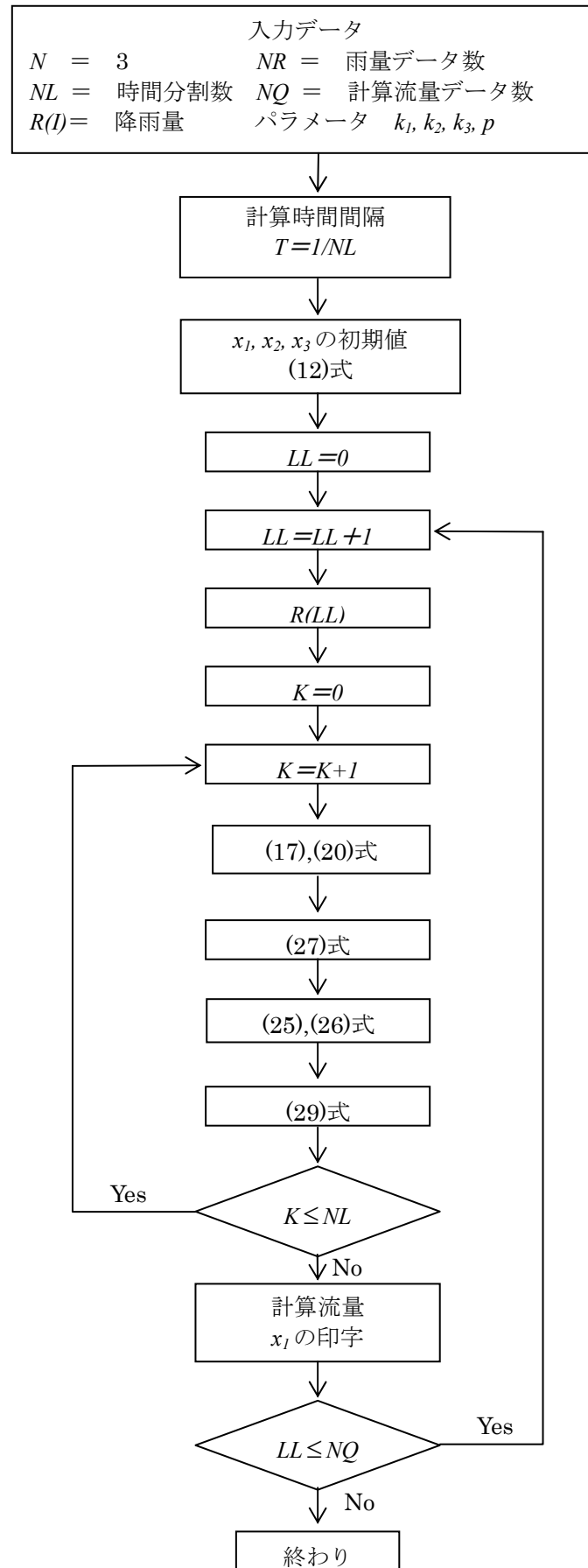


図-3 計算フローチャート

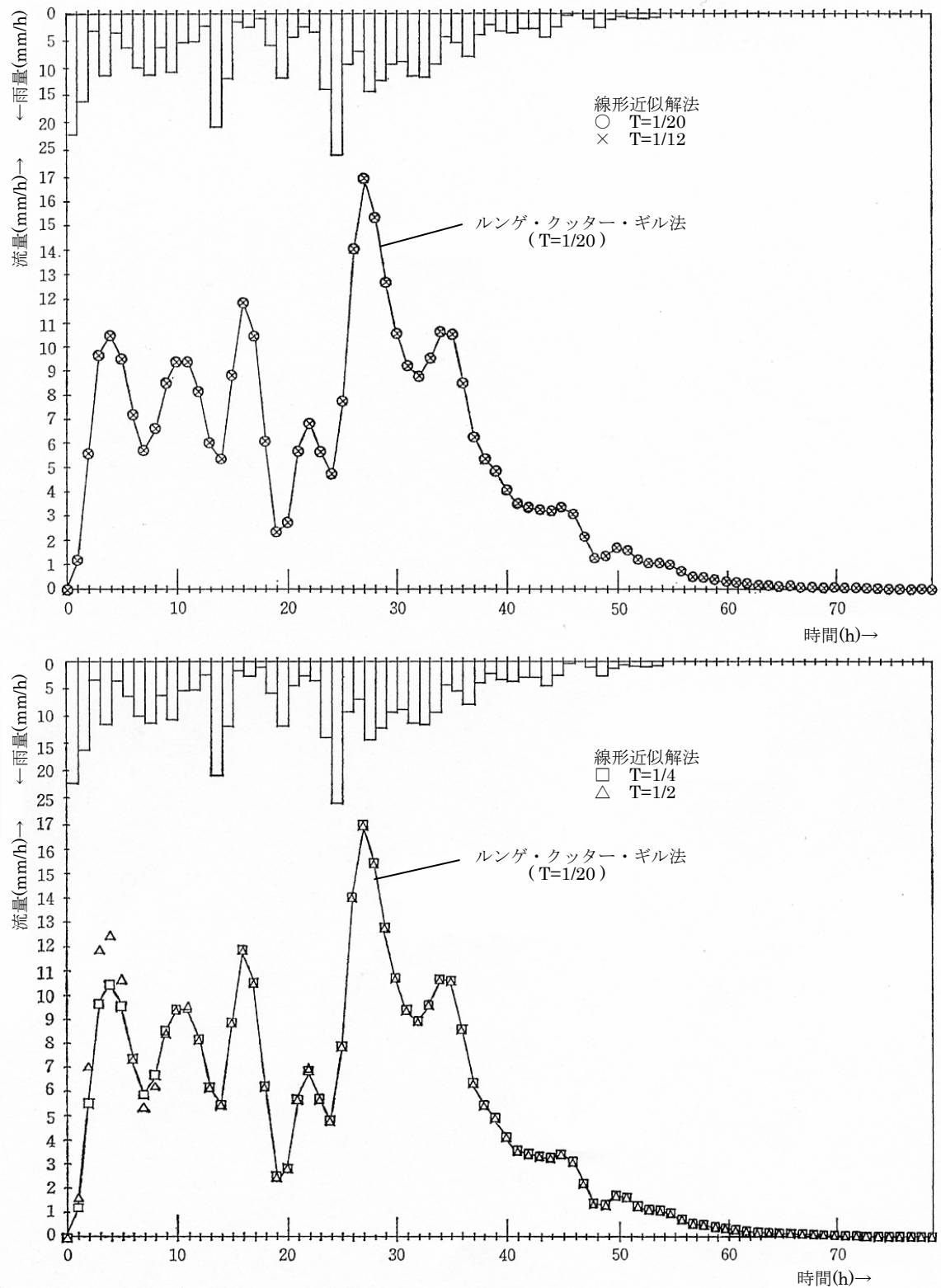


図-4 計算時間間隔(T)の線形近似解精度に及ぼす影響

ゼロにし、モデルパラメータを $k_1 = 8.14$, $k_2 = 2.21$, $k_3 = 1.5$, $p = 0.6$ に設定した。本報告で述べた非線形微分方程式の線形近似解法によるフローチャートを図-3に示す。このとき、関連式番号で略記してある。ルンゲ・クッター・ギル法で用いた同じ計算条件で、計算時間間隔 T のみを変化させたときの線形近似解の精度を検討する。ルンゲ・クッター・ギル法と線形近似解法によって、ハイドログラフを計算して比較した一例が図-4に示されている。当然のことながら、 T が小さくなるにしたがって、線形近似解はルンゲ・クッター・ギル法による解に近づく。図-4に示される特定例においても、 $T=1/2$ hrs(30 分)による解の精度は極度に悪化していない。各開発建設部が有する計算機の計算速度にも依存するが、実用上、 $T=1/4$ hrs(1 時間を 4 分割)としてもさしつかえなさそうである。(3)、(4)式にも示されるように、パラメータ k_1 と k_2 は流域面積 A の関数である。したがって、対象流域の実績洪水資料を用いて、計算時間間隔 T を種々変化させて結果を比較検討し、誤差許容値内に収まるように T を決定する方法が得策である。

6. おわりに

洪水逐次予測は計画ハイドログラフの設定問題と異なり、計算の迅速さと計算結果の高精度が要求される。

本報告では、以上の要求に応えるという観点から、洪水予測流出モデルとして、どのような形式の貯留関数方程式が適当であるかを論じてきた。また、計算の迅速性を考慮して、非線形微分方程式の近似解法による計算時間間隔の精度に及ぼす影響を検討した。計算時間間隔は数時間先の流出予測に要する計算時間にも影響するので、出来るだけ大きくしたいが、計算結果の精度も十分考慮して決定する必要がある。

本報告では、有効雨量算定方法はとくに述べなかった。木村の貯留関数法に含まれる一次流出率と飽和雨量の算定方法は各開発建設部においても広範に用いられているので、既往洪水解析から得られている一次流出率と飽和雨量の情報を有効雨量算定に利用してもよい。なお、将来は、洪水予測システムモデルに、流出率のオンライン同定を含める必要があろう。

参 考 文 献

- 1) 北海道開発局：北海道開発局の洪水予測システム，昭和 58 年 1 月。
- 2) 星 清・山岡 勲：雨水流法と貯留関数法との相互関係，第 26 回水理講演会論文集，pp.273-278，土木学会，1982。
- 3) Prasad, R.: A nonlinear hydrologic system response model, J. of Hydraulic Divi., Proc. of ASCE, Vol.93, No.HY4, pp.201-221, 1967.
- 4) 高棹琢馬・宝 馨・楠橋康弘：貯留関数型洪水流出モデルの比較精度，第 29 回水理講演会論文集，pp.245-250，土木学会，1985。
- 5) 高橋安人：システムと制御，岩波書店，1974。

補遺 Fortran プログラム

本報告で述べた非線形貯留関数モデル、(1)、(2)式の近似解法プログラムを以下に示す。出力結果の一例として、図-4 に示される計算時間間隔 $T=1/4$ hrs(すなわち、1 時間の分割数=4)に対応する計算流量を 60 時間まで示した。各開発建設部においても、 T を種々変化させて、精度と演算時間をチェックしておくことを推奨する。

なお、主プログラム中の **data** 文の変数説明を以下に示す。

N : 微分方程式の階数
 NR : 雨量標本数
 NQ : 計算流量標本数
 NL : サンプル時間間隔の分割数
 $WK1$: k_1
 $WK2$: k_2
 $ZK3$: k_3
 WP : p

(1) 主プログラム

```

C**  MAIN  PROGRAM
C**  NONLINEAR STORAGE FUNCTION MODEL
C**  S = K1*Q**P+K2*DQ/DT+K3*D2Q/DT2
      DIMENSION X(5), R(100), TITLE(20)
      COMMON/ST1/WK1, WK2, WK3, WP, RAIN, N
      COMMON/ST2/H, H2, H3, H4
      DATA N, NR, NQ, NL/3, 54, 100, 4/
      DATA WK1, WK2, ZK3, WP/8. 14, 2. 21, 1. 5, 0. 6/
      WK3=1. /ZK3
      XNL=NL
      H=1. /XNL
      H2=H**2
      H3=H2*H
      H4=H3*H
      READ(5, 102) TITLE
102  FORMAT(20A4)
      READ(5, 104) (R(I), I=1, NR)
104  FORMAT(16F5. 2)
      WRITE(6, 805) TITLE
805  FORMAT(1H0, 5X, 20A4)
      WRITE(6, 806) H
806  FORMAT(1H0, 5X, ' COMPUTATIONAL TIME=' , F6. 3/)
      WRITE(6, 807)
807  FORMAT(1H0, 5X, '    NO    R(I)    Q(I) ' /)
      DO 800 I=1, N
800  X(I)=0. 0
      DO 30 LL=1, NQ
      RAIN=0. 0
      IF(LL. LE. NR) RAIN=R(LL)
      DO 40 K=1, NL
      CALL NOLIN2(X)
      IF(X(1). LT. 0. 0) X(1)=0. 0
40  CONTINUE
      WRITE(6, 809) LL, RAIN, X(1)
809  FORMAT(1H , I9, F6. 2, F8. 3)
      30  CONTINUE
      STOP
      END

```


(2) サブプログラム

```

SUBROUTINE NOLIN2(X)
C**  NONLINEAR STORAGE FUNCTION MODEL
C**   $S = K1*Q**P + K2*DQ/DT + K3*D2Q/DT2$ 
C**  LINEARIZATION OF NONLINEAR VECTOR EQUATION
C**   $X(K+1) = PHI*X(K) + GAMMA*B(K)$ 
      DIMENSION X(1), Y(5)
      COMMON/ST1/WK1, WK2, WK3, WP, RAIN, N
      COMMON/ST2/H, H2, H3, H4
      A=0.0
      D=0.0
      Y1=X(1)
      Y2=X(2)
      IF(Y1.LE.0.0) GO TO 14
      A=Y1**(WP-1.)
      D=Y1**(WP-2.)
14    A1=-WK3*(1.+WK1*WP*(WP-1.)*D*Y2)
      A2=-WK1*WK3*WP*A
      A3=-WK2*WK3
      B1=WK3*(WK1*WP*(WP-1.)*A*Y2+RAIN)
      A4=A1+A2*A3
      A5=A2+A3**2
      A6=A1*A3+A2*A5
      A7=A4+A3*A5
      A8=A1*A5+A2*A7
      A9=A6+A3*A7
C**  ELEMENTS OF PHI MATRIX
      F1=1.+A1*H3/6.+A1*A3*H4/24.
      F2=H*(1.+A2*H2/6.+A4*H3/24.)
      F3=H2*(0.5+A3*H/6.+A5*H2/24.)
      F4=A1*F3
      F5=1.+A2*H2/2.+A4*H3/6.+A6*H4/24.
      F6=H*(1.+A3*H/2.+A5*H2/6.+A7*H3/24.)
      F7=A1*F6
      F8=H*(A2+A4*H/2.+A6*H2/6.+A8*H3/24.)
      F9=1.+A3*H+A5*H2/2.+A7*H3/6.+A9*H4/24.
C**  ELEMENTS OF GAMMA MATRIX
      G3=H3*(1./6.+A3*H/24.)
      G6=F3
      G9=F6
      Y(1)=F1*X(1)+F2*X(2)+F3*X(3)+G3*B1
      Y(2)=F4*X(1)+F5*X(2)+F6*X(3)+G6*B1
      Y(3)=F7*X(1)+F8*X(2)+F9*X(3)+G9*B1
      DO 102 I=1, N
102   X(I)=Y(I)
      RETURN
      END

```

(3) 出力結果

時間	雨量	流量	時間	雨量	流量
1	22.30	1.426	31	8.80	9.263
2	16.20	6.069	32	11.40	8.837
3	3.20	10.286	33	11.60	9.556
4	11.50	10.965	34	9.30	10.634
5	3.50	9.767	35	4.30	10.556
6	6.30	7.267	36	5.40	8.552
7	10.00	5.693	37	7.90	6.302
8	11.30	6.545	38	3.90	5.376
9	6.20	8.486	39	2.10	4.884
10	10.70	9.407	40	3.30	4.125
11	5.30	9.453	41	3.60	3.568
12	5.20	8.165	42	2.80	3.409
13	2.30	6.121	43	2.80	3.310
14	20.90	5.399	44	4.40	3.267
15	11.90	8.848	45	2.50	3.413
16	1.60	11.846	46	0.30	3.123
17	2.60	10.493	47	0.00	2.193
18	1.00	6.172	48	1.00	1.383
19	5.80	2.439	49	2.60	1.372
20	11.80	2.786	50	1.10	1.736
21	4.40	5.701	51	0.60	1.645
22	2.50	6.879	52	0.90	1.290
23	3.40	5.719	53	1.00	1.143
24	14.00	4.783	54	0.80	1.152
25	26.00	7.817	55	0.00	1.042
26	9.30	14.000	56	0.00	0.783
27	6.90	16.943	57	0.00	0.611
28	14.40	15.390	58	0.00	0.535
29	12.30	12.681	59	0.00	0.457
30	9.30	10.586	60	0.00	0.385

3. 洪水予測におけるカルマン・フィルターの 位置づけ

原資料

星 清：洪水予測システムの基礎的検討(2)
北海道開発局土木試験所月報
No. 386, pp. 48-68, 1985

1. はじめに

前報では、洪水流出予測システム開発にかかわる課題のうち、流出モデル選定と数値解法上の留意点を述べた。採用流出モデルの成否が流出予測精度に直接影響を及ぼすので、できるだけ降雨流出過程の物理機構に基づくモデル構築が望ましいことは論をまたない。

洪水予測システムに組込まれる流出モデルが決定されれば、次に、数時間先の流出予測のためにどのような予測理論を採用したらよいかという問題が起こる。予測理論も単純な外挿補間式から複雑な予測式と多岐にわたる。前報においても強調したように、あまり計算時間がかかりすぎるような予測理論は流出予測の性格からいっても望ましくない。また、人間の経験的直感による予測と理論を用いた予測結果に著しい差異が生ずるようであれば、実務者はその予測理論の採用を躊躇するであろう。以上の観点から、カルマン・フィルター理論が流出オンライン予測に最適と考えられる。したがって、本報告では、カルマン・フィルター理論を洪水流出逐次予測にどのように適用していったらよいかを述べる。

カルマン・フィルター理論の概念がよくわからないということをししばしば耳にする。確かに、1960年にカルマン(Kalman)によって発表された原論文⁶⁾は難解である。原論文のフィルター理論誘導式を理解するためには相当の確率過程論の習熟が必要である。一方、カルマン・フィルター理論の一連の公式結果をみるかぎりには、行列演算の基礎知識があれば、容易にプログラム化できることも事実である。したがって、洪水逐次予測問題をどのようにカルマン・フィルター理論へ定式化したらよいかを理解できれば、あとは一連の公式を機械的に適用していけばよいことになる。本報告では、まず、単純な水理学の問題を例にとり、カルマン・フィルター理論の基礎原理を解説する。次に、前報で述べた貯留関数流出モデルとカルマン・フィルター理論を組合わせた流出オンライン予測手法について述べる。

2. フィルター理論の基礎式

カルマン・フィルター理論は、本来、機械系の変数最適推定問題に初めて適用されたものである。その好例として、水理学でもしばしば見受けられる図-5に示されるようなオリフィスからの流出問題を取りあげてみよう。水深、 $x(t)$ の増加割合(すなわち、連続式)は次式で与えられる。

$$A \frac{d}{dt} x(t) = r(t) - q(t) \quad (30)$$

ここで、 A ：水槽の断面積、 $r(t)$ ：流入量、 $q(t)$ ：オリフィスからの流出量
一方、流出量はベルヌイの定理より、次式で与えられることはよく知られている。

$$q(t) = Ca\sqrt{2gx(t)} \quad (31)$$

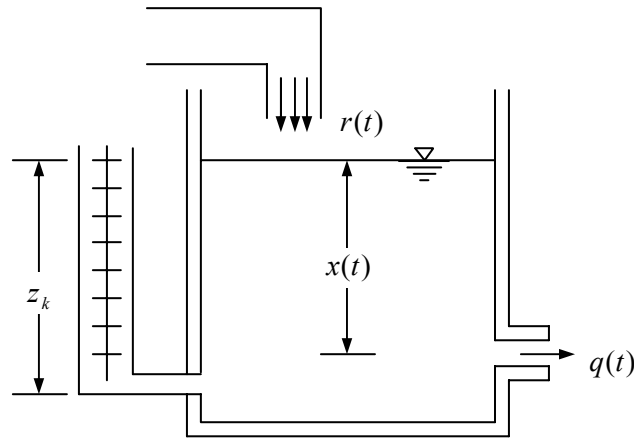


図-5 オリフィスによる流出

ここで、 C ：流量係数(流速係数と断面積収縮係数の積)、 a ：オリフィス断面積、 g ：重力加速度

(31)式を(30)式に代入すると、(32)式の $x(t)$ に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = k_1 r - k_2 \sqrt{x} = f(x) \quad (32)$$

ここで、

$$k_1 = \frac{1}{A}, \quad k_2 = \frac{Ca\sqrt{2g}}{A} \quad (33)$$

(30)、(31)式から流出量、 $q(t)$ に関する微分方程式を作ることとも可能であるが、(32)式よりは複雑になろう。すなわち、カルマン・フィルター理論では、どの変数に関して微分方程式を作るかということがまず問題となる。

(32)式の例では、水深 $x(t)$ に関する微分方程式が得られているので、 x を状態変量(state variable)と呼び、(32)式をカルマン・フィルター理論ではシステム方程式あるいは状態方程式と呼んでいる。カルマン・フィルター理論でもう1つ重要な事項は、モデルパラメータを状態変量とすることができることである。(32)式を解くためには、パラメータ k_1 と k_2 の初期値が必要である。(33)式によれば、この2つのパラメータは水理学的にもかなり正確に見積ることが可能であろう。しかしながら、 k_2 に含まれる流量係数 C には種々の不確定要素が収約されている。たとえば、図-5に示されるように、曲りによる損失、摩擦損失あるいはオリフィス断面の切口形状によっても流量係数 C は変化する。したがってパラメータ k_2 の変動幅は小さいといいながらも、 k_2 は時間変化していると考えられる。パラメータ k_2 を水深 x に加えて状態変量とすることによって、カルマン・フィルターはこの2つの状態変量を同時にオンライン同定することができる特徴をもっている。この問題については後述する。

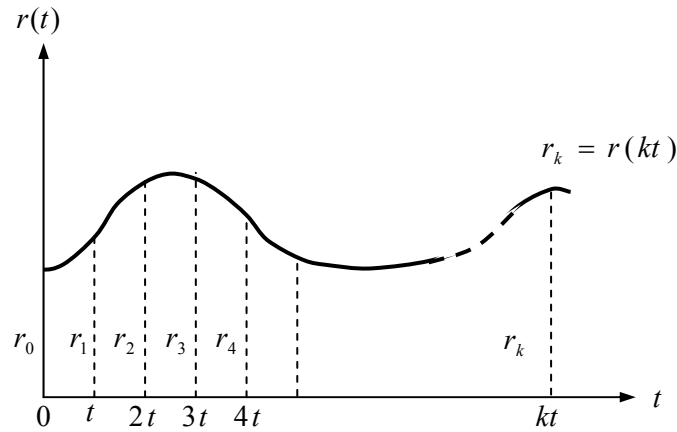


図-6 入力の離散化

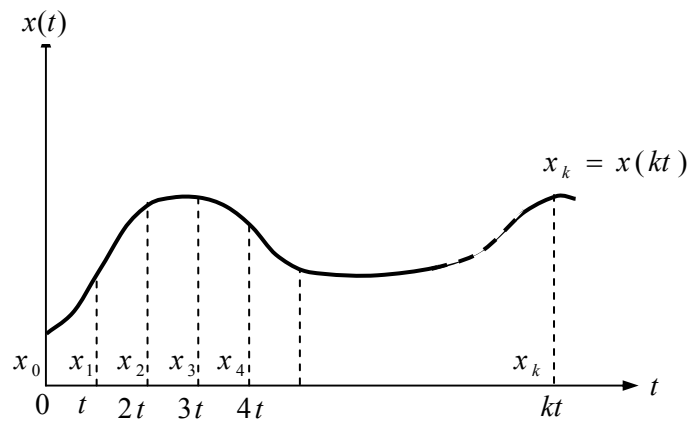


図-7 出力の離散化

(32)式のシステム方程式が決定されたとはいえ、カルマン・フィルター理論を直接適用することは困難である。その理由は、本来、カルマン・フィルター理論は線形システム方程式に基づいて誘導されているからである。

近年、非線形フィルター理論もいくつか開発されているが、計算手法が複雑となるので実務者には推奨できない。むしろ、(32)式の非線形微分方程式を一度近似線形微分方程式に変換したのち、カルマン・フィルター理論を適用した方がプログラム化も容易で、實際上得策である。非線形微分方程式の線形化手法およびその離散化方程式変換手法については前報ですでに述べたところであるが、カルマン・フィルター理論の理解を深めるために、ここで再度解説することにする。なお、以下の議論においては、パラメータ k_1 と k_2 は確定変数の既知量と仮定し、状態変量を水深 x のみとする。また、(32)式における流入量 $r(t)$ と出力水深 $x(t)$ の連続量は図-6 と 図-7 に示されるように、離散時刻 kt ごとにサンプリングするものとする。図-7 に示されるように、 $x_{k+1} = x(kt + t)$ の値を計算しようとするれば、すでに $x_k = x(kt)$ の値は既知であるから、(32)式の非線形関数 $f(x)$ を x_k のまわりでテイラー級数展開を用いて線形化すると(33)式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \simeq f(x_k) + \frac{\partial f(x_k)}{\partial x}(x - x_k) \quad (33)$$

ここで、

$$\begin{cases} f(x_k) = k_1 r_k - k_2 \sqrt{x_k} \\ c = \frac{\partial f(x_k)}{\partial x} = -\frac{1}{2} k_2 (x_k)^{-1/2} \end{cases} \quad (34)$$

(33)式はさらに、次のように変換される。

$$\frac{dx}{dt} = cx + d \quad (35)$$

ここで、

$$\begin{aligned} d &= f(x_k) - \frac{\partial f(x_k)}{\partial x} x_k \\ &= k_1 r_k - k_2 (x_k)^{1/2} + \frac{1}{2} k_2 (x_k)^{1/2} \\ &= k_1 r_k - \frac{1}{2} k_2 (x_k)^{1/2} \end{aligned} \quad (36)$$

すなわち、(32)式の非線形微分方程式が(35)式の線形化方程式に変換されたことになる。(35)式の線形微分方程式は計算が簡便に行えるように差分方程式に変換できる。この方法論についても前回の報告ですでに述べてある。

(35)式の差分方程式を再記すれば、以下のようになる。

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + \Gamma_k d_k \quad (37)$$

ここで、

$$\Phi_k = \exp(cT) \quad (38)$$

$$\Gamma_k = [\exp(cT) - 1] c^{-1} \quad (39)$$

(38)、(39)式中の T は計算時間間隔であるが、今は便宜上、 r_k と x_k のサンプリング時間間隔に等しいものとする ($T = t$)。

(38)、(39)式は形式的には前報の(23)、(24)式にそれぞれ等しい。(34)式に示される c は x_k の値に依存するから、 Φ_k と Γ_k も時間的に変化することになる。同様なことが d_k についてもいえる。なお、(37)式中の d_k は強制入力の機能を果たし、“確定変数”として

扱う。以上、長々と述べてきたことを要約すれば、いかなる非線形微分方程式（たとえば、(32)式も、近似解として、(37)式に示されるような線形差分方程式に変換可能であることを示している。このことは、状態変数の数が1個から数個に増加しても基本的には同じであり、行列演算が必要になってくるにすぎない。

カルマン・フィルター理論で扱うシステム方程式は、次に示す形式を取ることが多い。

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + \Gamma_k d_k + w_k \quad (40)$$

(40)式は(37)式の右辺に w_k が加わったにすぎない。この w_k をカルマン・フィルター理論ではシステム誤差（モデリング誤差）と呼んでいる。ここで、システム誤差の物理的意義を考えてみよう。機械系のシステム、たとえば、図-5 に示されるようなオリフィスからの流出問題では、水理学的現象をかなり正確に(32)式のシステム方程式で記述されていると考えてさしつかえなかろう。したがって、システム誤差も小さいことが予想される。もちろん、 w_k には(32)式を(37)式に変換するまでの誤差、すなわち、非線形関数 $f(x)$ の線形化に伴う誤差、差分式に変換するときの誤差(主として、計算時間間隔)も加わっている。一方、自然界における現象、たとえば、降雨流出過程を考えてみよう。流出現象は機械系システムと異なり、(32)式で表わせるほど単純ではない。その証拠に、(32)式に相当する流出モデルは世界中で多数開発されている(流出モデルは100以上はあるといわれている)。概念的には、単純モデル(ブラックボックスモデル)の方が物理モデルに比べて w_k が大きくなることは理解できるが、残念ながら、 w_k の絶対量を知ることができない。 w_k がしばしばモデリング誤差といわれるのも、(32)式に相当するシステム方程式の決定が困難なことによる。システム誤差 w_k の値を直接知ることができない代わりに、 w_k の統計的性質、すなわち、平均値と分散をカルマン・フィルター理論では、次のように指定してやる必要がある。

$$E(w_k) = 0, \quad E(w_k^2) = Q_k \quad (41)$$

ここで、 $E(\cdot)$ は期待値演算子である。

すなわち、(41)式の第1式は w_k の平均値がゼロ(不偏推定値の条件)で、第2式は w_k の分散が Q_k となっていることを意味する。実際問題として、 Q_k の値をどの程度に見積るかという疑問が起きる。この値の決定は試行錯誤的要素が強く、ある値を仮定してカルマン・フィルターを作動させ、解が発散するようであれば Q_k を種々変化させてやらざるを得ない。

(32)式ないしは(37)式を与えられた初期条件下で解くことにより、状態変数 x_k (水深)を推定することができる。一方、水深は図-5 に示されるように、サンプリング時刻、 k ごとに目視あるいは計測器を通じて観測することが可能であるが、このとき観測誤差が伴う。したがって、水深の観測値を z_k とすれば、状態変数 x_k との間に次の関係式が成立することがわかる。

$$z_k = x_k + v_k \quad (42)$$

(42)式はカルマン・フィルター理論では観測方程式と呼ばれ、また、 v_k を観測誤差と呼んでいる。 v_k はシステム誤差 w_k と同じく、次の統計的性質をもつものとする。

$$E(v_k) = 0, \quad E(v_k^2) = R_k \quad (43)$$

すなわち、観測誤差の平均値はゼロ(不偏推定値の条件)で、その分散が R_k となっている。カルマン・フィルター理論における観測方程式は通常次の形式で表現されることが多い。

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (44)$$

もちろん、(42)式の例では $H_k = 1$ である。

(44)式の H_k は状態変量を何個とるかによって異なってくる。先に、カルマン・フィルターではモデルパラメータを状態変量に含めてオンライン推定することが可能であると述べた。図-5のオリフィス流出問題で、仮に、(33)式のパラメータ k_2 を状態変量に加えた場合、観測方程式はどのようなであろうか。もちろん、水深はなんらかの方法で観測可能であるが、パラメータ k_2 は観測できない。したがって、(44)式を書き換えると次のようになる。

$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ k_2 \end{bmatrix} + v_k \quad (45)$$

すなわち、 $H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ となる。(45)式の z_k は水深の観測値である点では(42)式と同じである。(45)式の結果の意味するところは、カルマン・フィルター理論ではすべての状態変量が観測される量である必要はなく、少なくとも1つあればよいということにある。

カルマン・フィルター理論は、オンライン予測に適した手法であるとししばしばいわれるが、その意味を図-5のオリフィス流出で考えてみよう。サンプリング時刻 k までに得られる情報量としては、水深の観測値集合 $(z_0, z_1, z_2, \dots, z_k)$ 、流入量集合 $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_k)$ およびパラメータ k_1 と k_2 がある。 k 時刻までの情報量に基づいて、 $(k+1)$ 時刻の状態変量 x_{k+1} を推定するには(37)式が用いられ、これはオフライン予測に相当する。このオフライン予測による状態変量の推定値を便宜上、 $\hat{x}_{k+1}(-)$ とする（ $\hat{}$ は以後推定値を表わすものとする）。 $(k+1)$ 時刻では新しい観測値 z_{k+1} が得られるから、 z_{k+1} と $\hat{x}_{k+1}(-)$ の差の度合に応じて、状態変量 x_{k+1} が修正される。これがオンライン予測に相当する。このオンライン予測による推定値が $\hat{x}_{k+1}(+)$ となる。すなわち、 $(-)$ と $(+)$ はそれぞれ、新しい観測値情報が得られる直前と直後の変量を意味する。

上述したように、 $\hat{x}_{k+1}(-)$ は(37)式から次式で計算されることがわかる。

$$\hat{x}_{k+1}(-) = \Phi_k \hat{x}_k(+) + \Gamma_k d_k \quad (46)$$

(46)式はカルマン・フィルター理論では状態変量の伝達(補間)方程式と呼ばれている。

(40)式を(46)式から引くと、次式が得られる。

$$\{\hat{x}_{k+1}(-) - x_{k+1}\} = \Phi_k \{\hat{x}_k(+) - x_k\} - w_k \quad (47)$$

あるいは、

$$\tilde{x}_{k+1}(-) = \Phi_k \tilde{x}_k(+) - w_k \quad (48)$$

ここで、

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1}(-) = \hat{x}_{k+1}(-) - x_{k+1} \\ \tilde{x}_k(+) = \hat{x}_k(+) - x_k \end{cases} \quad (49)$$

$\tilde{x}_{k+1}(-)$ は状態変量の“真値”、 x_{k+1} とその推定値、 $\hat{x}_{k+1}(-)$ の差、すなわち誤差(～は以後誤差を表わすものとする)になっているので、状態変量推定誤差と呼ぶ。なお、 $\tilde{x}_{k+1}(-)$ と $\tilde{x}_k(+)$ の平均値はゼロである。すなわち、次式が成立する。

$$E\{\tilde{x}_{k+1}(-)\} = E\{\tilde{x}_k(+)\} = 0 \quad (50)$$

(46)式による予測値の精度を知る手段としては、推定誤差の分散を(48)式から計算すればよい。すなわち、

$$\begin{aligned} P_{k+1}(-) &= E\{\tilde{x}_{k+1}^2(-)\} = E\{(\Phi_k \tilde{x}_k(+) - w_k)^2\} \\ &= \Phi_k^2 E\{\tilde{x}_k^2(+)\} - 2\Phi_k E\{\tilde{x}_k(+)w_k\} + E(w_k^2) \end{aligned} \quad (51)$$

推定誤差 $\tilde{x}_k(+)$ とシステム誤差 w_k の共分散、 $E\{\tilde{x}_k(+)w_k\}$ をゼロとし、(41)式を(51)式に代入すると次式が得られる。

$$P_{k+1}(-) = \Phi_k^2 P_k(+) + Q_k \quad \text{注 1)} \quad (52)$$

ここで、 $P_{k+1}(-)$ は $(k+1)$ 時点で新しい観測値が入手される直前の $\hat{x}_{k+1}(-)$ の誤差分散を意味する。(52)式はカルマン・フィルター理論では誤差共分散の伝達（補間）方程式と呼ばれている。(52)式はとくに、流出予測値の信頼区間を知る上で非常に有効であることを示そう。先に述べたように、(37)式と(46)式は基本的には同じ内容であるから、(52)式中の $(-)$ と $(+)$ をはずすと、推定誤差分散の漸化式が次式で与えられることになる。

$$P_{k+1} = \Phi_k^2 P_k + Q_k \quad (53)$$

洪水流出予測問題では、 k 時刻までの情報を知って、1 時間先、2 時間先、3 時間先の流量予測が必要となる。このため、ここでは x_k と r_k をそれぞれ、 k 時刻での流量および降雨量にみたてることとする。まず、3 時間先までの流量予測値は(37)式の漸化式を用いて計算される。このとき、 d_k には(36)式に示されるように、降雨量 r_k を含んでいるので、なんらかの方法によって r_{k+1} と r_{k+2} の雨量予測値が必要となる。一方、3 時間先までの予測値の誤差分散も(53)式の漸化式を用いて同時に計算される。今、各予測時点 $(k+1)$ での流量推定値の分布が平均値 $\hat{x}_{k+1}$ 、分散 P_{k+1} をもつ正規分布と仮定すると、95%の信頼区間は次式で与えられる。

$$\hat{x}_{k+1} \pm 1.96\sqrt{P_{k+1}} \quad (54)$$

図-8には以上述べたオフライン予測法と信頼区間を計算するためのフローチャートを簡単に示してある。また、図-9には k 時点での 3 ステップ先まで予測値と信頼区間の関係を示してある。もし、 $(k+1)$ 時点で新しい観測値が入手されれば、更新値 $\hat{x}_{k+1}(+)$ と $P_{k+1}(+)$ をもとに、上述した方法を繰り返し適用して、予測値を更新していくことができる。

注 1) n 個の状態変量がある場合、(52)式は次のように行列表示される。

$$P_{k+1}(-) = \Phi_k P_k(+) \Phi_k^T + Q_k$$

ここで、 $P_{k+1}(-)$, $P_k(+)$, Φ_k , Q_k とともに $(n \times n)$ 行列になり、 T は行列の転置を意味する。たとえば、 $n=2$ の場合、 P は 2 つの状態変量推定誤差の分散・共分散行列になる。

$$P = E(\tilde{x}\tilde{x}^T) = E\left\{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^T & \tilde{x}_2^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} E(\tilde{x}_1\tilde{x}_1^T) & E(\tilde{x}_1\tilde{x}_2^T) \\ E(\tilde{x}_2\tilde{x}_1^T) & E(\tilde{x}_2\tilde{x}_2^T) \end{bmatrix}$$

すなわち、 P 行列の対角要素が分散になり、非対角要素が共分散になる。

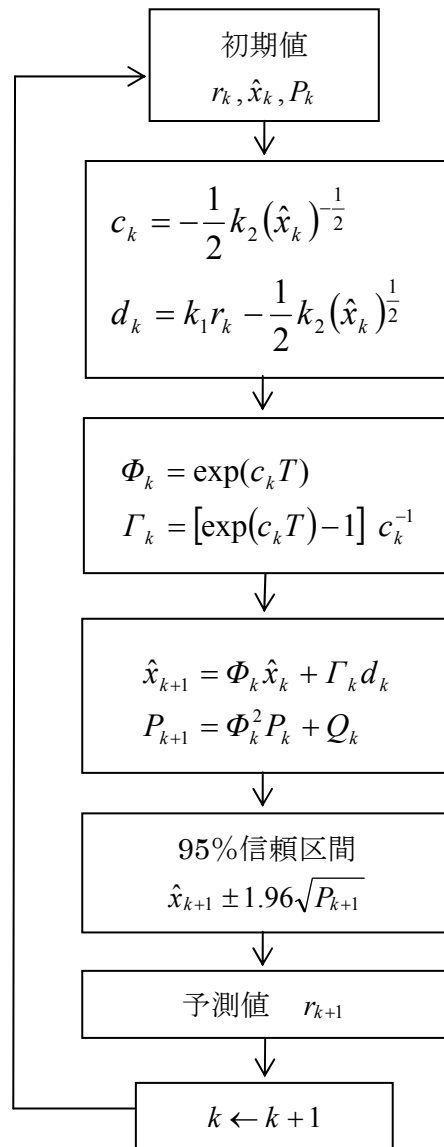


図-8 オフライン予測のための略式フローチャート

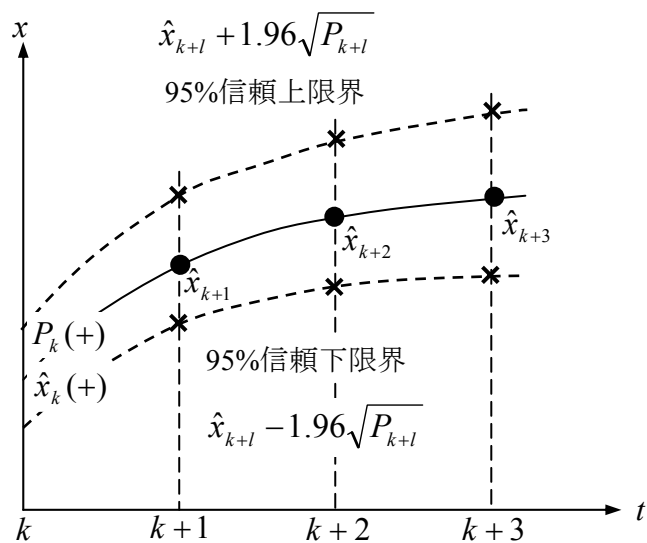


図-9 予測値と信頼区間

k 時刻で新しい観測値 z_k が得られたとき、 $\hat{x}_k(-)$ と $P_k(-)$ をカルマン・フィルターではどのように更新するかを考えてみよう。更新値 $\hat{x}_k(+)$ は $\hat{x}_k(-)$ と z_k の重みつき和で求められることは直感的にも理解できよう。したがって、次式が成立するものとしよう。

$$\hat{x}_k(+) = K'_k \hat{x}_k(-) + K_k z_k \quad (55)$$

ここで、 K'_k と K_k は重み係数(ベクトル)であるが、これを決定する必要がある。

(44)式の観測方程式と(49)式の状態変量誤差を(55)式に代入すると、

$$\tilde{x}_k(+) = [K'_k + K_k H_k - 1] \tilde{x}_k(-) + K_k v_k \quad (56)$$

(43)式と(50)式から誤差の平均値はすべてゼロでなければならないから、(56)式から次式が成立しなければならない。

$$K'_k + K_k H_k - 1 = 0$$

あるいは、

$$K'_k = 1 - K_k H_k \quad (57)$$

(57)式を(55)式に代入すると、次式が得られる。

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)] \quad (58)$$

(58)式はカルマン・フィルター理論では状態変量の更新方程式といわれ、 K_k が カルマン・ゲインと呼ばれているものである。(57)式を(56)式に代入すると、

$$\tilde{x}_k(+) = (1 - K_k H_k) \tilde{x}_k(-) + K_k v_k \quad (59)$$

したがって、更新した後の推定値誤差分散は次式から計算できる。

$$\begin{aligned} P_k(+) &= E\{\tilde{x}_k^2(+)\} = E\{[(1 - K_k H_k) \tilde{x}_k(-) + K_k v_k]^2\} \\ &= (1 - K_k H_k)^2 P_k(-) + K_k^2 R_k \end{aligned} \quad (61)$$

(61)式の誘導にあたっては、 $E[\tilde{x}_k(-) v_k] = 0$ と(43)式を用いてある。最後にカルマン・ゲイン K_k は $P_k(+)$ 、すなわち、更新される誤差分散を最小にするよう決定される。

$$\frac{\partial P_k(+)}{\partial K_k} = -2(1 - K_k H_k) P_k(-) H_k + 2K_k R_k = 0 \quad (62)$$

したがって、 K_k は次式で算定される。

$$K_k = P_k(-) H_k [H_k^T P_k(-) + R_k]^{-1} \quad \text{注 2)} \quad (63)$$

(63)式を(61)式に代入すると次式が得られる。

$$P_k(+) = (1 - K_k H_k) P_k(-) \quad (64)$$

(64)式はカルマン・フィルター理論では、推定誤差分散の更新方程式と呼ばれている。

カルマン・ゲイン K_k の物理的意義を調べるために、(64)式を(62)式に代入すると、 K_k は次のようにも表現できる。

$$K_k = P_k(+) H_k R_k^{-1} \quad (65)$$

(42)式の例に見られるように $H_k = 1$ として議論を進めると、 K_k は推定誤差分散に比例し、観測誤差分散に反比例することになる。この事実からカルマン・フィルター理論による予測特性を知ることができる。

(a) 観測誤差が大きく、状態変量の推定誤差が小さいときは K_k は小さくなる。したがって、(58)式中の $z_k - H_k \hat{x}_k(-)$ はほとんど誤差とみなされ、 $\hat{x}_k(+)$ はほとんど $\hat{x}_k(-)$ に等しくなる。

(b) 一方、観測誤差が小さく、推定誤差分散が大きいときには K_k が大きくなり、 z_k と $H_k \hat{x}_k(-)$ の差が更新推定値、 $\hat{x}_k(+)$ に大きく寄与することになる。

以上述べたように、 K_k は人間が経験的直感にたよって推定値を補正する方法によく一致していることがわかる。

図-5 に示されるオリフィス流出問題を例にとりながら、カルマン・フィルター理論を実際に適用する際の問題点を述べ、あわせてフィルター主要公式を誘導してきた。状態変量が 1 個の場合のカルマンフィルター理論の公式をまとめて表-1 に示す。また、状態変量が n 個の場合の公式は表-1 を拡張して表-2 に示す。

表-1 と表-2 の結果にはほとんど差がない。状態変量が n 個の場合には、表-1 の変

注 2) n 個の状態変量がある場合、(63)式は次のように行列表示される。

$$K_k = P_k(-) H_k^T [H_k P_k(-) H_k^T + R_k]^{-1}$$

表-1 1次元カルマン・フィルター理論

定 義	公 式	式番号
システム方程式	$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}d_{k-1} + w_{k-1}$	(40)
観測方程式	$z_k = H_k x_k + v_k$	(44)
システム誤差	$E(w_k) = 0, \quad E(w_k^2) = Q_k$	(41)
観測誤差	$E(v_k) = 0, \quad E(v_k^2) = R_k$	(43)
初期条件	$\hat{x}_0(+), \quad P_0(+)$	
状態変量の伝達方程式	$\hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + \Gamma_{k-1}d_{k-1}$	(46)
状態変量の推定誤差分散伝達方程式	$P_k(-) = \Phi_{k-1}^2 P_{k-1}(+) + Q_k$	(52)
カルマン・ゲイン	$K_k = P_k(-)H_k^T [H_k^2 P_k(-) + R_k]^{-1}$	(63)
状態変量の更新方程式	$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)]$	(58)
状態変量の推定誤差分散更新方程式	$P_k(+) = (1 - K_k H_k) P_k(-)$	(64)

$\hat{x}_k(-)$: $(k-1)$ 時刻までの情報に基づき計算される k 時刻での状態変量推定値

$\hat{x}_k(+)$: k 時刻で新しい観測値を得たときの状態変量の更新推定値

$P_k(-)$: 推定値 $\hat{x}_k(-)$ の誤差分散

$P_k(+)$: 更新値 $\hat{x}_k(+)$ の誤差分散

表-2 n 次元カルマン・フィルター理論

定 義	公 式
システム方程式 観測方程式	$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}D_{k-1} + w_{k-1}$ $z_k = H_k x_k + v_k$
システム誤差 観測誤差	$E(w_k) = 0, \quad E(w_k w_k^T) = Q_k$ $E(v_k) = 0, \quad E(v_k^2) = R_k$
初期条件	$\hat{x}_0(+), \quad P_0(+)$
状態変量の伝達方程式 状態変量の推定誤差共分散伝達方程式	$\hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + \Gamma_{k-1}D_{k-1}$ $P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_k$
カルマン・ゲイン 状態変量の更新方程式 状態変量の推定誤差共分散更新方程式	$K_k = P_k(-)H_k^T [H_k P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1}$ $\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)]$ $P_k(+) = [I - K_k H_k] P_k(-)$

x_k : $(n \times 1)$ の状態変量ベクトル

Φ_k : $(n \times n)$ の遷移行列

Γ_k : $(n \times n)$ の係数行列

D_k : $(n \times 1)$ の確定変数(強制関数)ベクトル

w_k : $(n \times 1)$ のシステム誤差ベクトル

z_k : (1×1) の観測値(状態変量のうちの 1 個)

H_k : $(1 \times n)$ の係数ベクトル

v_k : 観測誤差

Q_k : $(n \times n)$ のシステム誤差分散・共分散行列

R_k : 観測誤差分散

P_k : $(n \times n)$ の推定誤差分散・共分散行列

K_k : $(n \times 1)$ のカルマン・ゲインベクトル

I : $(n \times n)$ の単位行列

T : 上添字は行列の転置

数がベクトルないし行列になっているにすぎない。行演列算は複雑にみえるだけで、自分で一度展開してみることを奨める。カルマン・フィルター理論を流出予測計算に用いるときは、観測値情報は流量(水位～流量曲線の変換による)だけとなるから、観測値方程式は一次元となると考えてよい。すなわち、(44)式における z_k は流量の観測値、 v_k はその誤差とすればよい。また、 H_k のベクトルの要素は流量計算値に対応する要素のみが 1 で他の要素はゼロとすればよい(たとえば、 $H_k = [1\ 0\ 0\ 0\ \cdots]$)。表-2 の脚注は以上のことをふまえて、 z_k を一次元量(スカラー量)としてある。 n 次元カルマン・フィルター理論を実際問題に適用する際の難点は、表-2 に示される Q_k (システム誤差分散・共分散行列)、 R_k (観測誤差分散)および $P_0(+)$ (推定誤差分散・共分散の初期値)の決定である。この決定はかなり試行錯誤的要素が強いが、 Q_k と $P_0(+)$ については対角要素のみを指定することを奨める。

洪水流出のオンライン予測に、カルマン予測理論を適用する際の留意点をまとめて以下に記述する。

- (a) システム方程式と観測方程式の明確な設定が必要である。通常われわれが流出解析に用いている流出モデルがシステム方程式に対応していると考えてよい。しかしながら、非線形流出モデルに直接カルマン・フィルター理論を適用するのは計算がはん雑となるので一工夫が必要となる。その便法として、非線形微分方程式を線形差分方程式で近似する方法を奨める。この近似解法については、前報と本報で詳しく述べたので理解できたものとする。われわれが観測できる量は通常流量のみであるから、観測方程式は一次元となると考えてよい。
- (b) どの変数を状態変量とするかによって、システム方程式と観測方程式の定式化が異なってくるので、状態変量の設定に留意しなければならない。このとき、状態変量のすべてが観測される必要はない。たとえば、流出モデルパラメータのうち、降雨特性に影響されるパラメータは時間変動していることが、予想されるが観測することは不可能である。モデルパラメータを流量予測と同時にオンライン推定する必要がある場合には、これらも状態変量に含めることができる。モデルパラメータに関するシステム方程式として、 $da/dt=0(a=\text{パラメータ})$ が常套手段として広く用いられている。上式は新しい観測値情報が入るまでは、一定値が伝達されることを意味するが、情報が入るとカルマン・フィルター理論により更新できる。
- (c) 新しい観測値情報が入手されるまでは、状態変量の伝達方程式を繰り返し適用することにより、近い将来の流量予測値を計算することができる。このとき、同時に予測値の精度(誤差分散)がわかるので、予測値の信頼区間を指定することができる。

3. 貯留関数モデルへのカルマン予測理論の適用

前報で述べた貯留関数モデルに、カルマン・フィルター理論を適用して流出オンライン予測を行うためには、表-2に示されるシステム方程式をどのように導くかにかかっている。この作業が終われば、カルマン・フィルターのプログラムはほぼ完了したといっても過言ではない。採用貯留関数モデルを再記すれば、次式で与えられる。

$$s = k_1 q^p + k_2 \frac{dq}{dt} + k_3 \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (1)$$

$$\frac{ds}{dt} = r - q \quad (2)$$

ここで、 s : 貯留高(mm), q : 流出高(mm/h), r : 降雨量(mm/h), t : 時間(h), k_1, k_2, k_3, p : モデルパラメータ

(1)、(2)式から、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1 = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2 = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = f_3 = -\frac{1}{k_3} x_1 - \frac{k_1}{k_3} p x_1^{p-1} x_2 - \frac{k_2}{k_3} x_3 + \frac{r}{k_3} \end{cases} \quad (11)$$

ここで、

$$x_1 = q, \quad x_2 = \frac{dq}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (6)$$

初期条件、降雨量、モデルパラメータが既知の場合は、(11)式の連立微分方程式を解くことによって、 x_1, x_2, x_3 が求まる。したがって、カルマン・フィルター理論を適用する際、 x_1, x_2, x_3 を状態変数として選定する。

モデルパラメータ k_1, k_2, k_3, p のうち、対象流域において、 k_1 と p は固定することが可能である((3)~(5)式を参照)。したがって、パラメータ k_2 と k_3 を状態変数に加えて、この2個のパラメータのオンライン同定法を考えることにする。このとき、パラメータに関するシステム方程式(微分方程式)が必要となるが、時間変動がわからないので、次の方策がカルマン・フィルター理論適用にあたってしばしばとられる。

$$\begin{cases} \frac{dk_2}{dt} = 0 \\ \frac{dk_3}{dt} = 0 \end{cases} \quad (66)$$

(66)式の離散化表示は次式で与えられることがわかる。

$$\begin{cases} (k_2)_{k+1} = (k_2)_k \\ (k_3)_{k+1} = (k_3)_k \end{cases} \quad (67)$$

ここで、 k は任意の離散時刻である。

なお、ここで注意すべき点は、(67)式は洪水期間中変化しない印象を受けるが、そうではなく、(67)式は状態変量(パラメータ)の伝達方程式で、新しい観測値が入手されれば更新される。以上、まとめると状態変量ベクトルは次式で表現されることがわかる。

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

ここで、

$$X_1 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T, \quad X_2 = [k_2 \quad k_3]^T \quad (69)$$

カルマン・フィルター理論における観測方程式は容易に定式化できる。すなわち、上に選定した状態変量のうち、観測できるものは $x_1 (= q)$ の流量だけでだけであるから、次式が観測方程式となる。

$$z_k = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} + v_k \quad (70)$$

あるいは、

$$z_k = HX + v_k = [H_1 \quad \vdots \quad H_2] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{bmatrix} + v_k \quad (71)$$

ここで、 z_k はサンプリング時刻 k における流量の観測値であり、 v_k は観測誤差である。

また、ベクトル H は次式で定義される。

$$H = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (72)$$

$$H_1 = [1 \quad 0 \quad 0], \quad H_2 = [0 \quad 0] \quad (73)$$

H は定係数ベクトルになっており、表-2 の H_k がこのベクトルに対応する。また、 v_k の分散が表-2 の R_k に対応する。

さて、状態変量に関する微分方程式は(11)式と(66)式をまとめて、次式で表現できる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ f_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (74)$$

関数 f_3 は(11)式右辺の非線形関数である。(74)式を行列表示すると(75)式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (75)$$

ここで、

$$F(X) = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5]^T \quad (76)$$

(75)式は形式的には前報の(13)式と同じであり、非線形微分方程式を線形微分方程式に近似変換する方法はなん度も述べてきたので、ここでは結果のみにとどめる。ただし、前報と本報告の基本式の違いは、ベクトル X の次元の大きさの相異だけである。すなわち、前報における X は (3×1) 、本報告での X は (5×1) ベクトルである。

したがって、式の展開そのものは前回と同様であるので、基本的考えは前報を参照されたい。まず、(75)式の線形近似式は次式で与えられる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (77)$$

ここで、

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_1 & 0_2 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$0_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

(79)式の行列 A_1 は前報の(16)式と同一であり、その要素 a_1, a_2, a_3 はすでに(17)式で与えられている。行列 A_2 の要素 b_1 と b_2 は次式で計算される。

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\partial f_3}{\partial k_2} = -\frac{1}{k_3}(x_3^*) \\ b_2 = \frac{\partial f_3}{\partial k_3} = \frac{1}{k_3^2} \{ x_1^* + k_1 p(x_1^*)^{p-1} x_2^* + k_2 x_3^* - r \} \end{cases} \quad (81)$$

一方、(77)式のベクトル $D(X^*)$ は次式で与えられる。

$$D(X^*) = F(X^*) - A(X^*)X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= f_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*, k_2, k_3) - a_1 x_1^* - a_2 x_2^* - a_3 x_3^* \\ &\quad - b_1 k_2 - b_2 k_3 = \frac{1}{k_3} \{ k_1 p(p-2)(x_1^*)^{p-1} x_2^* - x_1^* + 2r \} \end{aligned} \quad (83)$$

次に、(77)式の線形微分方程式は次の差分方程式に変換される。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (84)$$

(5×5)の係数行列 Φ_k と Γ_k を求める公式は、前報の(23)、(24)式に示してある。なお、(82)式のベクトルは第3要素を除いてすべてゼロであるから、行列 Γ_k のうち第3列の要素のみを算出すればよいことがわかる。以下に Φ_k と Γ_k の計算結果のみを示す。

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_{10} & \phi_{11} \\ \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_7 & \phi_8 & \phi_9 & \phi_{14} & \phi_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (85)$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_6 \\ \gamma_9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (86)$$

(85)式の (3×3) の行列 Φ_1 の要素は、前報の(25)式に示されている。また、(86)式の (3×1) のベクトル Γ_1 の要素も(26)式に等しい。新たに今回出現した (3×2) の行列 Φ_2 の要素を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_{10} = \frac{1}{6}b_1T^3\left(1 + \frac{1}{4}a_3T\right) = b_1\gamma_3 \\ \phi_{11} = \frac{1}{6}b_2T^3\left(1 + \frac{1}{4}a_3T\right) = b_2\gamma_3 \\ \phi_{12} = b_1\phi_3 \\ \phi_{13} = b_2\phi_3 \\ \phi_{14} = b_1\phi_6 \\ \phi_{15} = b_2\phi_6 \end{cases} \quad (87)$$

(84)式をすべての要素を用いて書き換えると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_{10} & \phi_{11} \\ \phi_4 & \phi_5 & \phi_6 & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_7 & \phi_8 & \phi_9 & \phi_{14} & \phi_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_6 \\ \gamma_9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_1)_k \quad (88)$$

(88)式の行列を展開して、各要素間の関係を導くと次式が得られる。

$$\begin{cases} (x_1)_{k+1} = \phi_1(x_1)_k + \phi_2(x_2)_k + \phi_3(x_3)_k + \phi_{10}(k_2)_k + \phi_{11}(k_3)_k + \gamma_3(d_1)_k \\ (x_2)_{k+1} = \phi_4(x_1)_k + \phi_5(x_2)_k + \phi_6(x_3)_k + \phi_{12}(k_2)_k + \phi_{13}(k_3)_k + \gamma_6(d_1)_k \\ (x_3)_{k+1} = \phi_7(x_1)_k + \phi_8(x_2)_k + \phi_9(x_3)_k + \phi_{14}(k_2)_k + \phi_{15}(k_3)_k + \gamma_9(d_1)_k \end{cases} \quad (89)$$

$$\begin{cases} (k_2)_{k+1} = (k_2)_k \\ (k_3)_{k+1} = (k_3)_k \end{cases} \quad (90)$$

すなわち、(90)式は(67)式と同一になることがわかる。(89)式はパラメータ k_2 と k_3 を状態変量に加えたときの状態変量、 $x_1(=q), x_2(=dq/dt), x_3(=d^2q/dt^2)$ の伝達方程式になる。このとき、前報の(29)式と(89)式の解に差異があるだろうかという疑問が起こる。

表-3 (89)式による流量計算結果

時間	雨量	流量	時間	雨量	流量
1	22.30	1.426	31	8.80	9.263
2	16.20	6.069	32	11.40	8.837
3	3.20	10.286	33	11.60	9.556
4	11.50	10.965	34	9.30	10.634
5	3.50	9.767	35	4.30	10.556
6	6.30	7.267	36	5.40	8.552
7	10.00	5.693	37	7.90	6.302
8	11.30	6.545	38	3.90	5.376
9	6.20	8.486	39	2.10	4.884
10	10.70	9.407	40	3.30	4.125
11	5.30	9.453	41	3.60	3.568
12	5.20	8.165	42	2.80	3.409
13	2.30	6.121	43	2.80	3.310
14	20.90	5.399	44	4.40	3.267
15	11.90	8.848	45	2.50	3.413
16	1.60	11.846	46	0.30	3.123
17	2.60	10.493	47	0.00	2.193
18	1.00	6.172	48	1.00	1.383
19	5.80	2.439	49	2.60	1.372
20	11.80	2.786	50	1.10	1.736
21	4.40	5.701	51	0.60	1.645
22	2.50	6.879	52	0.90	1.290
23	3.40	5.719	53	1.00	1.143
24	14.00	4.783	54	0.80	1.152
25	26.00	7.817	55	0.00	1.042
26	9.30	14.000	56	0.00	0.783
27	6.90	16.943	57	0.00	0.611
28	14.40	15.390	58	0.00	0.535
29	12.30	12.681	59	0.00	0.457
30	9.30	10.586	60	0.00	0.385

(89)式の係数 $\phi_{10} \sim \phi_{15}$ がゼロのとき、(89)式は(29)式に形式上一致するが、 $(d_1)_k$ の内容は(20)式と(83)式に示されるように、異なることを注意すべきである。前報の補遺に(29)式による流量計算値の出力結果を示した。前回と同一の計算条件で求めた(89)式による計算結果を表-3に示す。両手法による計算結果は一致していることがわかる。すなわち、モデルパラメータは、(90)式によって観測値間では時間変化していないので、パラメータを除くほかの状態変数 (x_1, x_2, x_3) 推定のための伝達方程式は、(89)式によらずとも(29)式でよいことになる。しかしながら、(29)式を用いたときの推定値誤差分散・共分散の伝達方程式は、状態変数 x_1, x_2, x_3 のみに関するものとなり、パラメータ k_2, k_3 との共分散を含まないことになることを念頭に入れておく必要がある。(84)式を(68)、(85)、(86)式を用いて書き換え、システム誤差ベクトル w_k を加えると、次のシステム方程式が得られる。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} (d_1)_k + \begin{bmatrix} w_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (91)$$

ここで、 X_2 はパラメータ k_2 と k_3 からなる (2×1) ベクトルであり、 w_k は (3×1) のシステム誤差ベクトルである。

(91)式から状態変数の推定誤差分散・共分散の伝達方程式を誘導するために、次式を定義しよう。

$$\begin{aligned} P_k &= E[\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T] = E \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \tilde{X}_1^T & \tilde{X}_2^T \end{bmatrix}_k \right\} \\ &= \begin{bmatrix} E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2^T)_k \\ E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_2^T)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} \\ P_{2,k}^T & U_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (92)$$

ここで、 $P_{1,k}$ は X_1 に関する (3×3) の分散・共分散行列、 $P_{2,k}$ は X_1 と X_2 に関する (3×2) の共分散行列、 U_k は X_2 に関する (2×2) の分散・共分散行列

表-2の推定誤差共分散伝達方程式を(91)、(92)式の小行列を用いて表わすと、次のようになる。

$$P_{k+1}(-) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k}(+) & P_{2,k}(+) \\ P_{2,k}^T(+) & U_k(+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^T & 0 \\ \Phi_2^T & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (93)$$

したがって、(93)式の行列を展開すれば、次の誤差共分散の伝達方程式が得られることになる。

$$P_{1,k+1}(-) = \Phi_1 P_{1,k}(+) \Phi_1^T + \Phi_2 P_{2,k}(+) \Phi_1^T + \Phi_1 P_{2,k}(+) \Phi_2^T + \Phi_2 U_k(+) \Phi_2^T + Q_k \quad (94)$$

$$P_{2,k+1}(-) = \Phi_1 P_{2,k}(+) + \Phi_2 U_k(+) \quad (95)$$

$$U_{k+1}(-) = U_k(+) \quad (96)$$

(96)式は、パラメータに関する推定誤差共分散は新しい観測値が入手されるまでは変化しないことを意味している。その理由は、(90)式に示されるように、一定値が伝達されるからである。 $U_k(+)$ の初期値、 $U_0(+)$ の設定には次の手段を用いるとよい。すなわち、いくつかの洪水資料が得られる地点では、まず、最適化手法⁷⁾によりパラメータ、 k_2 と k_3 の同定を行う。次に、同定されたパラメータの平均値を、 k_2 と k_3 の初期値として採用し、共分散を $U_0(+)$ に組込んでやればよい。

表-2でカルマン・ゲイン算定式に逆行列が含まれているが、観測方程式が一次元（スカラー量）式である場合にはこの項はその逆数をとればよい。カルマン・ゲインに含まれる行列演算を(73)式の定係数ベクトル H_1 と(92)式の小行列を用いて行ってみる。

$$\begin{aligned} P_k(-)H_k^T &= \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ P_{2,k}^T(-) & U_k(-) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (97)$$

(73)式に示されるように、ベクトル H_1 は最初の要素が1で、他の要素がゼロであるから、(97)式の実際の演算は行列 $P_{1,k}(-)$ と $P_{2,k}^T(-)$ のうちの第一列目の要素をとればよいことになる。次に、

$$\begin{aligned} H_k P_k(-)H_k^T + R_k &= \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k}(-)H_1^T \\ P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{bmatrix} + R_k \\ &= H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k \end{aligned} \quad (98)$$

(98)式の $H_1 P_{1,k}(-)H_1^T$ は、行列 $P_{1,k}(-)$ の1行1列目の要素を意味する。したがって、 $\left[H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k \right]^{-1}$ はスカラー量、 $H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k$ の逆数をとればよいことになる。また、カルマン・ゲイン K_k は(97)式の要素を(98)式で割ればよい。

状態変量の更新方程式も(72)式を用いると、次のように簡単化される。

$$\begin{cases} [\hat{x}_1(+)]_k = [\hat{x}_1(-)]_k + K_{1,k} \{z_k - [\hat{x}_1(-)]_k\} \\ [\hat{x}_2(+)]_k = [\hat{x}_2(-)]_k + K_{2,k} \{z_k - [\hat{x}_1(-)]_k\} \\ [\hat{x}_3(+)]_k = [\hat{x}_3(-)]_k + K_{3,k} \{z_k - [\hat{x}_1(-)]_k\} \end{cases} \quad (99)$$

$$\begin{cases} [\hat{k}_2(+)]_k = [\hat{k}_2(-)]_k + K_{4,k} \{z_k - [\hat{x}_1(-)]_k\} \\ [\hat{k}_3(+)]_k = [\hat{k}_3(-)]_k + K_{5,k} \{z_k - [\hat{x}_1(-)]_k\} \end{cases} \quad (100)$$

(99)式、(100)式の $K_{i,k}$ ($i=1,2,3,4,5$) は、カルマン・ゲイン K_k の要素である。 $z_k - [\hat{x}_1(-)]_k$ は流量の観測値と推定値の差を表わしている。したがって、パラメータもこの差に応じて更新されることが(100)式から明確となる。

最後に、推定誤差共分散の更新方程式は次のように変形される。

$$\begin{aligned} I - K_k H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1,k} \\ K_{2,k} \\ K_{3,k} \\ K_{4,k} \\ K_{5,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{1,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{2,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{3,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{4,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{5,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (101)$$

ここで、

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 - K_{1,k} & 0 & 0 \\ -K_{2,k} & 1 & 0 \\ -K_{3,k} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} -K_{4,k} & 0 & 0 \\ -K_{5,k} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} P_k(+) &= \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ M_2 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ P_{2,k}^T(-) & U_k(-) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_1 P_{1,k}(-) & M_1 P_{2,k}(-) \\ M_2 P_{1,k}(-) + P_{2,k}^T(-) & M_2 P_{2,k}(-) + U_k(-) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (103)$$

すなわち、 $P_k(+)$ の小行列は次式で計算される。

$$\begin{cases} P_{1,k}(+) = M_1 P_{1,k}(-) \\ P_{2,k}(+) = M_1 P_{2,k}(-) = P_{1,k}^T(-) M_2^T + P_{2,k}(-) \\ U_k(+) = M_2 P_{2,k}(-) + U_k(-) \end{cases} \quad (104)$$

4. おわりに

洪水流出オンライン予測手法は、大きく分けて流出モデルの選定と予測理論の選定がある。貯留関数法は実用上広く用いられている洪水解析法であるという観点から、この方法のオンライン予測に要求される構造式の決定を第1報で述べた。第2報では、予測理論としてのカルマン・フィルターをどのように流出予測システムに組込んで行ったらよいかを述べた。カルマン予測理論はむずかしくてよく理解できないとしばしば耳にするので、比較的単純な例題をとりあげ、カルマン・フィルター理論の定式化と適用上の問題点について詳しく解説してきた。一次元カルマン・フィルター理論が理解できると、容易に多次元理論への拡張ができると考える。多次元のカルマン・フィルター理論では、行列演算を伴うこともこの理論の理解を困難にしている原因かもしれない。しかしながら、行列演算には規則があるわけで、みずから行列を展開してみることを奨める。また、実際の適用にあたって留意すべき点は、対象行列の多くの要素がゼロである場合が多いので、直接行列演算をプログラム化するのではなく、行列を展開した結果の要素をプログラムに組込むことである（たとえば、(101)式の展開）。この操作は、とくに計算時間を大幅に短縮させるのに有効となる。

流出モデルは多くの場合、非線形微分方程式で表現されるため、カルマン・フィルター理論を直接適用するには一工夫を必要とする。その便法として、基本式を線形差分方程式に近似変換する手法について何度か述べてきた。この方法は、拡張カルマン・フィルター（Extended Kalman filter）⁸⁾として広く知られているものである。

参 考 文 献

- 6) Kalman, R. E. : A new approach to linear filtering and prediction problems, J. of Basic Engineering, Trans. of ASME, Vol.82, No.2, pp.35-45, 1960.
- 7) 本間 隆・星 清: 貯留関数モデルパラメータの最適同定, 第28回北海道開発局技術研究発表会概要集, pp.493-500, 1985.
- 8) 水理公式集, 第2編 水文編, pp.175-177, 土木学会, 1985.

補 遺 Fortran プログラムと計算例

前報で紹介した貯留関数モデルにカルマン・フィルター理論を適用して、3 時間先までの流量予測値($XPR(LT)$)とその誤差分散($XVA(LT)$)を計算する Fortran プログラムと計算例を以下に示す。入力変数名は前報のものとほぼ同じである。また、プログラム中にはコメント文を加えたので、変数名と計算内容が容易に理解できるものと思う。

(1) 主プログラムの機能

流出予測を行うに際して、降雨量と流量の観測値が 1 時間ごとに得られるものとして、各時点で 3 時間先までの流量予測値(XPR)とその推定誤差分散(XVA)を計算する。このとき 1 時間ごとに状態変量と誤差共分散が更新されるので、1 時間先の推定量を 1 度保存しておき、オフライン予測後にカルマン・フィルター理論により、1 時間先の推定量を新しい流量観測値に基づき更新している。このプログラム例では、将来の降雨量予測を行っておらず、実測値を用いている点に注意すべきである。

(2) サブプログラムの機能

(a) サブプログラム INPUT

状態変量(X)の初期値とその誤差共分散($P1, P2$)を設定する。パラメータ k_2 と k_3 の初期値($WK2, ZK3$)とその誤差共分散(U)を指定する。また、システム誤差共分散(Q)と観測誤差分散(RQ)を入力する。

(b) サブプログラム NO2KAL

前報の(29)式による状態変量伝達方程式により、 X を計算する。同時に、(94)、(95)式の推定誤差共分散伝達方程式により、 $P1$ と $P2$ を計算する。

(c) サブプログラム NO2UPD

1 時間ごとに流量観測値が入手されるとして、(99)、(100)式により状態変量とパラメータの更新値を計算する。このとき、同時に(104)式により状態変量とパラメータの推定誤差共分散($P1, P2, U$)を更新する。

(d) サブプログラム MUL31,MUL21

(94)、(95)式に含まれる行列演算、 ABC^T と AB を出力する。

(3) 計算例

以上のプログラムを用いた計算例とその出力結果の一部を表-4に示す。計算例として、前報の図-4に示される計算時間間隔 $T=1/4$ hrs に対応するハイドログラフを流量観測値とみなす。このとき、パラメータの“真値”は、 $k_1=8.14$, $k_2=2.21$, $k_3=1.5$, $p=0.6$ である。カルマン・フィルター理論適用にあたっては、パラメータ k_2 と k_3 を状態変量として、オンライン同定している。現実問題として、パラメータの真値はわからないので、計算例では k_2 と k_3 の初期値を、 $k_2=1.50$, $k_3=0.8$ と設定した。計算時間間隔は $T=1/4$ hrs である。表-4には毎時における 3 時間先までの流量予測値とその推定誤差分散が

示されている。この情報は図-9に示される信頼区間を設定するのに用いることができる。カルマン・フィルター理論適用の初期段階（2時間目～5時間目）では、システム誤差共分散 Q_k とパラメータ誤差共分散 U_k の不確定性が大きいために、予測値誤差分散が逆転している。しかしながら、6時間目以降では予測時間（リードタイム）が大きくなるにつれて、分散も増大して安定している。

最後に、カルマン・フィルター理論適用にあたって一番問題となるシステム誤差共分散 Q_k 、パラメータ誤差共分散 U および観測誤差分散 R_k の設定について若干の説明を加える。まず、 Q_k と U_k の初期値 $U_0(+)$ は対角行列として計算を始めるとよい（すなわち、分散のみを指定する）。 $U_0(+)$ はパラメータ k_2 と k_3 の初期値（計算例では、 $k_2=1.50$, $k_3=0.8$ ）の大きさをみて、1オーダー小さい値を入力するとよい（出力結果を参照）。 Q_k の指定方法としては、まず、 $Q_k = 0$ として、(94)式の状態変数推定誤差分散、すなわち、 P_1 の対角要素が正になっているかを調べる。同時に、 P_1 の要素の大きさがわかるので、もし、 P_1 の対角要素が負となっている場合には、その要素が正になるように、 Q_k の対角要素を調整する。このとき、 Q_k の対角要素はすべて同じ値としてもさしつかえない（出力結果を参照）。流量観測値は、水位～流量曲線の変換によって計算される。したがって、観測誤差分散 R_k は流観に基づく水位～流量曲線の精度にも影響される。既往洪水資料に貯留関数モデルを適用して、実測流量と計算流量の誤差分散を R_k に用いるのが現実的解決法であろう。

表-4 予測計算例

時間	雨量	実測 流量	予測流量			予測値誤差分散		
			1 時間	2 時間	3 時間	1 時間先	2 時間先	3 時間先
1	22.30	1.426	2.249	7.930	10.989	0.3603E+00	0.1190E+01	0.1571E+01
2	16.20	6.069	6.968	10.949	10.091	0.8000E+00	0.2228E+01	0.1397E+01
3	3.20	10.286	9.855	9.766	8.617	0.8292E+00	0.1295E+01	0.9778E+00
4	11.50	10.965	10.181	8.719	6.524	0.4785E+00	0.1016E+01	0.1070E+01
5	3.50	9.767	9.455	6.904	5.730	0.5316E+00	0.1074E+01	0.9366E+00
6	6.30	7.267	7.221	5.902	7.108	0.4187E+00	0.7535E+00	0.7542E+00
7	10.00	5.693	5.942	7.125	8.984	0.3641E+00	0.6787E+00	0.8298E+00
8	11.30	6.545	6.920	8.879	9.414	0.3634E+00	0.7547E+00	0.9076E+00
9	6.20	8.486	8.547	9.224	9.121	0.3912E+00	0.7950E+00	0.8911E+00
10	10.70	9.407	9.168	9.089	7.773	0.3830E+00	0.7603E+00	0.8776E+00
11	5.30	9.453	9.301	7.889	5.877	0.3790E+00	0.7705E+00	0.8330E+00
12	5.20	8.165	8.026	5.950	5.578	0.3815E+00	0.7282E+00	0.7328E+00
13	2.30	6.121	6.071	5.634	9.600	0.3650E+00	0.6613E+00	0.8281E+00
14	20.90	5.399	5.674	9.619	12.274	0.3571E+00	0.7671E+00	0.1038E+01
15	11.90	8.848	9.377	12.138	9.897	0.4197E+00	0.9453E+00	0.1185E+01
16	1.60	11.846	11.642	9.661	5.231	0.4904E+00	0.1087E+01	0.1097E+01
17	2.60	10.493	9.866	5.321	2.236	0.4873E+00	0.9939E+00	0.7977E+00
18	1.00	6.172	5.916	2.442	3.289	0.4746E+00	0.8105E+00	0.5470E+00
19	5.80	2.439	2.663	3.343	6.209	0.3834E+00	0.5447E+00	0.6661E+00
20	11.80	2.786	3.187	6.143	6.922	0.3108E+00	0.6298E+00	0.8781E+00

主プログラム

```

C**  MAIN PROGRAM(KALN2)
C**  EXTENDED KALMAN FILTERING TECHNIQUE
C**  NONLINEAR STORAGE FUNCTION MODEL
C**  S = K1*Q**P+K2*DQ/DT+K3*D2Q/DT2
      DIMENSION X(5), R(100), TITLE(20), QQ(200)
      DIMENSION P1(3,3), P2(3,2), XPR(3), XVA(3)
      DIMENSION XEX(3), P1EX(3,3), P2EX(3,2)
      DIMENSION Q(3,3), U(3,3)
      COMMON/ST1/WK1, WK2, ZK3, WK3, WP, RAIN, N
      COMMON/ST2/H, H2, H3, H4
      DATA N, NR, NQ, NL/3, 54, 20, 4/
      DATA WK1, WK2, ZK3, WP/8.14, 1.50, 0.8, 0.6/
      N1=N-1
      XNL=NL
      H=1./XNL
      H2=H**2
      H3=H2*H
      H4=H3*H
      READ(5,102) TITLE
102  FORMAT(20A4)
      READ(5,104) (R(I), I=1, NR)
104  FORMAT(16F5.2)
C**  QQ(I)=OBSERVED DISCHARGE
      READ(5,106) (QQ(I), I=1, NQ)
106  FORMAT(10F8.3)
      WRITE(6,805) TITLE
805  FORMAT(1H0, 5X, 20A4)
      WRITE(6,806) H
806  FORMAT(1H0, 5X, 'COMPUTATIONAL TIME = ', F6.3/)
C***  INPUT DATA FOR KALMAN FILTERING
      CALL INPUT(X, P1, P2, RQ, Q, U)
C***
      WRITE(6,807)
807  FORMAT(1H0, 5X, '  NO  R(I)   OQ(I)   CQ(I)' /)
      DO 30 LL=1, NQ
C**  3-HOUR AHEAD PREDICTION
      WK3=1./ZK3

```

```

      DO 500 LT=1, 3
      RAIN=0.0
      IF (LL. LE. NR) RAIN=R (LL+LT-1)
      DO 40 K=1, NL
C***  EXTRAPOLATION EQUATION OF KALMAN FILTERING
      CALL NO2KAL (X, P1, P2, Q, U)
      IF (X (1). LT. 0. 0) X (1)=0. 0
C***
40    CONTINUE
      XPR (LT)=X (1)
      XVA (LT)=P1 (1, 1)
      IF (LT. NE. 1) GO TO 500
C**   STORE ONE-HOUR AHEAD STATISTICS
      DO 502 I=1, N
502   XEX (I)=X (I)
      DO 504 I=1, N
      DO 504 J=1, N
504   P1EX (I, J)=P1 (I, J)
      DO 506 I=1, N
      DO 506 J=1, N1
506   P2EX (I, J)=P2 (I, J)
500   CONTINUE
      Z=QQ (LL)
      RAIN=0.0
      IF (LL. LE. NR) RAIN=R (LL)
      WRITE (6, 809) LL, RAIN, Z, (XPR (I), I=1, 3), (XVA (I), I=1, 3)
809   FORMAT (1H , I9, F6. 2, 4F8. 3, 3E12. 4)
C**   UPDATE STATE VARIABLES AND ERROR COVARIANCES
      DO 510 I=1, N
510   X (I)=XEX (I)
      DO 512 I=1, N
      DO 512 J=1, N
512   P1 (I, J)=P1EX (I, J)
      DO 514 I=1, N
      DO 514 J=1, N1
514   P2 (I, J)=P2EX (I, J)
C***  UPDATE EQUATION OF KALMAN FILTERING
      CALL NO2UPD (X, P1, P2, RQ, Z, U)

```

C***

```
30    CONTINUE
      STOP
      END
```

サブプログラム

```
      SUBROUTINE INPUT (X, P1, P2, RQ, Q, U)
C**  INPUT DATA FOR IMPLEMENTING KALMAN FILTER
      DIMENSION X(1), P1(3, 3), P2(3, 2)
      DIMENSION Q(3, 3), U(3, 3)
      COMMON/ST1/WK1, WK2, ZK3, WK3, WP, RAIN, N
      N1=N-1
      WRITE(6, 420)
420   FORMAT(1H0, 5X, ' INITIAL VALUES OF PARAMETERS' /)
      WRITE(6, 422)
422   FORMAT(1H , 5X, '      K1      K2      K3      P' /)
      WRITE(6, 424) WK1, WK2, ZK3, WP
424   FORMAT(1H, 5X, 4F6. 2)
C**  INITIAL VALUES OF STATE VARIABLES
C**  X(1)= INITIAL DISCHARGE (INPUT)
      DO 800 I=1, N
800   X(I)=0. 0
C**  STATE ERROR COVARIANCE, P1(I, J) AND P2(I, J)
      DO 400 I=1, N
      DO 400 J=1, N
400   P1(I, J)=0. 0
      DO 402 I=1, N
      DO 402 J=1, N1
402   P2(I, J)=0. 0
C**  SYSTEM ERROR COVARIANCE, Q(I, J)
      DO 404 I=1, N
      DO 404 J=1, N
      Q(I, J)=0. 0
404   CONTINUE
      Q(2, 2)=0. 1
      Q(3, 3)=0. 1
      WRITE(6, 301)
301   FORMAT(1H0, 5X, ' SYSTEM ERROR COVARIANCE' /)
```



```

WRITE (6, 303)
303  FORMAT (1H , 5X, '      Q (1, 1)      Q (2, 2)      Q (3, 3)' /)
      WRITE (6, 305) (Q (I, I), I=1, 3)
305  FORMAT (1H , 5X, 3F9. 4)
C**  PARAMETER ERROR COVARIANCE, U (I, J)
      DO 406 I=1, N1
      DO 406 J=1, N1
406  U (I, J)=0. 0
      U (1, 1)=0. 2
      U (2, 2)=0. 1
      WRITE (6, 307)
307  FORMAT (1H0, 5X, ' PARAMETER ERROR COVARIANCE' /)
      WRITE (6, 309)
309  FORMAT (1H , 5X, '      U (1, 1)      U (2, 2)' /)
      WRITE (6, 311) (U (I, I), I=1, 2)
311  FORMAT (1H , 5X, 2F10. 4)
C**  MEASUREMENT ERROR VARIANCE, R
      RQ=0. 1
      WRITE (6, 313)
313  FORMAT (1H0, 5X, ' MEASUREMENT ERROR VARIANCE' /)
      WRITE (6, 315) RQ
315  FORMAT (1H , 5X, '      R =' , F8. 4)
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE N02KAL (X, P1, P2, Q, U)
C**  NONLINEAR STORAGE FUNCTION MODEL
C**   $S = K1*Q**P + K2*DQ/DT + K3*D2Q/DT2$ 
C**  EXTRAPOLATION EQUATION OF KALMAN FILTER
C**  LINEARIZATION OF NONLINEAR VECTOR EQUATION
C**   $X(K+1) = PHI*X(K) + GAMMA*D(K)$ 
      DIMENSION X (1), Y (3), F (15), G (3)
      DIMENSION P1 (3, 3), P2 (3, 2), P3 (3, 3), P4 (3, 3)
      DIMENSION PHI1 (3, 3), PHI2 (3, 2)
      DIMENSION Q (3, 3), U (3, 3)
      COMMON/ST1/WK1, WK2, ZK3, WK3, WP, RAIN, N
      COMMON/ST2/H, H2, H3, H4
      N1=N-1

```

```

A=0.0
D=0.0
Y1=X(1)
Y2=X(2)
Y3=X(3)
IF (Y1.LE. 0.0) GO TO 14
A=Y1**(WP-1.)
D=Y1**(WP-2.)
14  A1=-WK3*(1.+WK1*WP*(WP-1.)*D*Y2)
    A2=-WK1*WK3*WP*A
    A3=-WK2*WK3
    B1=-WK3*Y3
    B2=WK3**2*(Y1+WK1*WP*A*Y2+WK2*Y3-RAIN)
    D1=WK3*(WK1*WP*(WP-1.)*A*Y2+RAIN)
    A4=A1+A2*A3
    A5=A2+A3**2
    A6=A1*A3+A2*A5
    A7=A4+A3*A5
    A8=A1*A5+A2*A7
    A9=A6+A3*A7
C**  ELEMENTS OF PHI AND GAMMA MATRICES
    F(1)=1.+A1*H3/6.+A1*A3*H4/24.
    F(2)=H*(1.+A2*H2/6.+A4*H3/24.)
    F(3)=H2*(0.5+A3*H/6.+A5*H2/24.)
    F(4)=A1*F(3)
    F(5)=1.+A2*H2/2.+A4*H3/6.+A6*H4/24.
    F(6)=H*(1.+A3*H/2.+A5*H2/6.+A7*H3/24.)
    F(7)=A1*F(6)
    F(8)=H*(A2+A4*H/2.+A6*H2/6.+A8*H3/24.)
    F(9)=1.+A3*H+A5*H2/2.+A7*H3/6.+A9*H4/24.
    G(1)=H3*(1./6.+A3*H/24.)
    G(2)=F(3)
    G(3)=F(6)
    F(10)=B1*G(1)
    F(11)=B2*G(1)
    F(12)=B1*F(3)
    F(13)=B2*F(3)
    F(14)=B1*F(6)

```

```

      F(15)=B2*F(6)
C**  PHI1(I,J)AND PHI2(I,J) MATRICES
      K=0
      DO 92 I=1, N
      DO 92 J=1, N
      K=K+1
92   PHI1(I,J)=F(K)
      K=9
      DO 94 I=1, N
      DO 94 J=1, N1
      K=K+1
94   PHI2(I,J)=F(K)
C**  **EXTRAPOLATION OF STATE VARIABLES **
      DO 90 I=1, N
      Y(1)=0.0
      DO 91 J=1, N
91   Y(I)=Y(I)+PHI1(I,J)*X(J)
90   Y(I)=Y(I)+G(I)*D1
      DO 102 I=1, N
102  X(I)=Y(I)
C**  ** EXTRAPOLATION EQUATION **
C**  EXTRAPOLATION OF COVARIANCE MATRIX P1(I,J)
      CALL MUL31(3,3,3,3,PHI1,P1,PHI1,P3)
      CALL MUL31(3,3,3,2,PHI1,P2,PHI2,P4)
      DO 10 I=1, N
      DO 10 J=1, N
10   P3(I,J)=P3(I,J)+P4(I,J)
      DO 12 I=1, N
      DO 12 J=1, N
12   P3(I,J)=P3(I,J)+P4(J,I)
      CALL MUL31(3,3,2,2,PHI2,U,PHI2,P4)
      DO 16 I=1, N
      DO 16 J=1, N
      P1(I,J)=P3(I,J)+P4(I,J)
      IF(I.EQ.J) GO TO 22
      P1(J,I)=P1(I,J)
      GO TO 16
22   P1(I,I)=P1(I,I)+Q(I,I)

```

```

16    CONTINUE
C**   EXTRAPOLATION OF COVARIANCE MATRIX P2(I, J)
      CALL MUL21 (3, 2, 3, PHI1, P2, P3)
      CALL MUL21 (3, 2, 2, PHI2, U, P4)
      DO 20 I=1, N
      DO 20 J=1, N1
20    P2(I, J)=P3(I, J)+P4(I, J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE NO2UPD(X, P1, P2, RQ, Z, U)
C**   UPDATE EQUATION OF KALMAN FILTER
      DIMENSION X(1), P1(3, 3), P2(3, 2), P3(3, 3)
      DIMENSION XM1(3, 3), XM2(2), XKAL(5), U(3, 3)
      COMMON/ST1/WK1, WK2, ZK3, WK3, WP, RAIN, N
      N1=N-1
      ERR=Z-X(1)
      PVA=P1(1, 1) + RQ
C**   KALMAN GAIN, KAL(I)
      DO 10 I=1, N
10    XKAL(I)=P1(I, 1)/PVA
      DO 12 I=4, 5
      I1=I-N
12    XKAL(I)=P2(1, I1)/PVA
C**   UPDATE STATE VARIABLES
      DO 13 I=1, N
13    X(I)=X(I) + XKAL(I) *ERR
C**   UPDATE PARAMETERS
      WK2=WK2 + XKAL(4) *ERR
      ZK3=ZK3 + XKAL(5) *ERR
C**   COEFFICIENT MATRIX, M1(I, J)
      DO 20 I=1, N
      DO 20 J=1, N
      XM1(I, J)=0.0
      IF(I.EQ. J) XM1(I, I)=1.0
20    CONTINUE
      XM1(1, 1)=XM1(1, 1)-XKAL(1)
      XM1(2, 1)=-XKAL(2)

```

```

      XM1(3,1)=-XKAL(3)
C**  COEFFICIENT MATRIX, M2(I)
      XM2(1)=-XKAL(4)
      XM2(2)=-XKAL(5)
C**  UPDATE COVARIANCE MATRIX, P1(I,J)
      CALL MUL21(3,3,3,XM1,P1,P3)
      DO 30 I=1,N
      DO 30 J=1,N
      P1(I,J)=P3(I,J)
      IF(I.EQ.J) GO TO 30
      P1(J,I)=P1(I,J)
30    CONTINUE
C**  UPDATE PARAMETER COVARIANCE, U(I,J)
      DO 34 I=1,N1
      DO 34 J=1,N1
      U(I,J)=XM2(I)*P2(1,J)+U(I,J)
      IF(I.EQ.J) GO TO 34
      U(J,I)=U(I,J)
34    CONTINUE
C**  UPDATE COVARIANCE MATRIX, P2(I,J)
      CALL MUL21(3,2,3,XM1,P2,P3)
      DO 32 I=1,N
      DO 32 J=1,N1
32    P2(I,J)=P3(I,J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE MUL31(N1,N2,N3,N4,A,B,C,D)
C**  MULTIPLICATION OF MATRICES A,B, AND CT
      DIMENSION A(3,3),B(3,3),C(3,3),D(3,3)
      DO 10 I=1,N1
      DO 10 J=1,N2
      D(I,J)=0.0
      DO 12 K=1,N3
      DO 12 L=1,N4
12    D(I,J)=D(I,J)+A(I,K)*B(K,L)*C(J,L)
10    CONTINUE
      RETURN

```

END

```

SUBROUTINE MUL21 (N1, N2, N3, A, B, C)
C**  MULTIPLICATION OF MATRICES A AND B
      DIMENSION A(3, 3), B(3, 3), C(3, 3)
      DO 10 I=1, N1
      DO 10 J=1, N2
      C(I, J)=0.0
      DO 12 K=1, N3
12    C(I, J)=C(I, J)+A(I, K)*B(K, J)
10    CONTINUE
      RETURN
      END
  
```

出力結果

```

***  KALMAN FILTER TECHNIQUE  ***
      COMPUTATIONAL TIME = 0.250
      INITIAL VALUES OF PARAMETERS
           K1      K2      K3      P
      8.14      1.50      0.80      0.60
      SYSTEM ERROR COVARIANCE
           Q(1,1)  Q(2,2)  Q(3,3)
           0.0000  0.1000  0.1000
      PARAMETER ERROR COVARIANCE
           U(1,1)  U(2,2)
           0.2000  0.1000
      MEASUREMENT ERROR VARIANCE
           R = 0.1000
  
```

4. 一般化貯留関数法による洪水予測法

原資料

星 清：洪水予測法の実例

第 24 回水工学に関する夏季研修会講義集

A-3, pp. 1-20, 土木学会, 1988

1. はじめに

治水対策はハード面の整備とソフト面の整備に大別される。ハード的対策とは、文字通り、ダム、遊水池、河川改修等の治水施設の整備向上を図り、洪水に対する安全度を高めることを目的としている。治水施設整備の現状をマクロ的に捉えれば、大河川では当面の整備目標を戦後最大洪水対応に置いているが、その整備率は約 60%である。また、中小河川の都市域では整備目標を時間雨量 50mm 対応としているが、その整備率も約 50%と必ずしも高水準とは言えない。

さらに、治水施設整備が進むにつれて、人口・資産が洪水防御対象区域に集中する傾向がますます顕著となっており、とりわけ大都市周辺への集中が著しい。たとえば、全国第 2 位の流域面積をもつ石狩川流域は北海道の約 20%の面積を有しており、この流域には 280 万人(北海道全人口の約 50%)が生活を営み、資本の高度集積化が進んでいる地域である。上記の現象は我が国だけの問題ではなく、世界の大都市圏がかかえる大きな悩みの種でもある。治水施設の整備水準の向上は一朝一夕にできるものではなく、財政上の問題、時間的制約、社会的要因に強く影響される。

一方、ソフト的対策とは、洪水生起時の被害を極力最小限にとどめるため、的確かつ迅速な洪水情報収集伝達体制の整備・強化を図ることを目的としている。洪水は自然現象である降雨に起因する以上、異常出水が発生する可能性は常に存在する。かりに、洪水氾濫という事態が生ずれば、人口・資産が高度に集中化している河川流域では、従来にも増して壊滅的な被害を受ける危険にさらされている。このため、近年、洪水予報・水防警報システム開発の重要性が認識されるようになってきている。建設省が全国的規模で毎年行っている「水防演習」、「出水時の情報伝達演習」、「ダム管理演習」も治水のソフト的対策の一環として位置づけられる。

北海道開発局においても、ここ数年来、電子計算機や通信機器の進歩と相まって、洪水情報の収集・処理・伝達を機能的に行うことを目的とした河川情報システムの導入がはかられている。同時に、洪水生起時の災害防止・軽減のために、的確かつ迅速な洪水予報を確立することを目的とした、いわゆる洪水オンライン予測システムの開発が進められている。本報告ではとくに、石狩川で実運用されているカルマン・フィルター理論を取り入れた洪水予測手法を紹介する。

2. カルマン・フィルターの予測理論

洪水予測手法は単純な外挿補間式から複雑な予測式と多岐にわたる。カルマン・フィルターは人間の経験的な直感による予測に近いことを計算機で自動的に行えることから、洪水予測にあまり熟練を要しない。このため、カルマン・フィルター理論は洪水流出オンライン予測手法として最適であると考えられる。

カルマン・フィルター理論は、1960 年にカルマン (Kalman) によって発表された論文に由来する¹⁾。この理論は、本来機械系の線形システムの最良状態変量推定法として考え出されたものである。カルマン・フィルター理論を初めて洪水流出のオンライン

予測問題に適用したのは日野である^{2),3)}。その後、水工学の多くの問題にカルマン・フィルターが適用され、その有効性が検証されている^{4),5)}。貯留関数法をどのようにしてカルマン・フィルター理論に組み入れて洪水予測を行うかの解説書もある⁶⁾。

カルマン・フィルター理論はむずかしすぎてよく理解できないという声がしばしば聞かれる。確かに、原論文⁷⁾は難解であり、フィルター理論の誘導過程を理解するためには相当の確率過程論の習熟が必要である。しかしながら、カルマン・フィルター理論の一連の公式結果はそうむずかしいものではなく、行列演算の基本知識があれば、容易にプログラムを組むことができることも事実である。実務者は行列演算を毛嫌いする向きがあるが、行列演算には規則があるわけで、みずから行列を展開してみることを奨める。むしろ、カルマン・フィルター理論を実際に適用する際の課題は、当該問題をどのように理論適用可能なように定式化するかにかかっており、この作業が終れば、一連の公式を機械的に運用していけばよいことになる。

表-1 n 次元カルマン・フィルター理論

定 義	公 式
システム方程式 観測方程式	$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}D_{k-1} + w_{k-1}$ $z_k = H_k x_k + v_k$
システム誤差 観測誤差	$E(w_k) = 0, \quad E(w_k w_k^T) = Q_k$ $E(v_k) = 0, \quad E(v_k^2) = R_k$
初期条件	$\hat{x}_0(+), \quad P_0(+)$
状態変量の伝達方程式 状態変量の推定誤差共分散伝達方程式	$\hat{x}_k(-) = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}(+) + \Gamma_{k-1}D_{k-1}$ $P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T + Q_k$
カルマン・ゲイン 状態変量の更新方程式 状態変量の推定誤差共分散更新方程式	$K_k = P_k(-)H_k^T [H_k P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1}$ $\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)]$ $P_k(+) = [I - K_k H_k]P_k(-)$

x_k : $(n \times 1)$ の状態変量ベクトル

Φ_k : $(n \times n)$ の遷移行列

Γ_k : $(n \times n)$ の係数行列

D_k : $(n \times 1)$ の確定変数(強制関数)ベクトル

w_k : $(n \times 1)$ のシステム誤差ベクトル

z_k : (1×1) の観測値(状態変量のうちの 1 個)

H_k : $(1 \times n)$ の係数ベクトル

$\hat{x}_k(-)$: $(k-1)$ 時刻までの情報に基づき計算
される k 時刻での状態変量推定値

$P_k(-)$: 推定値 $\hat{x}_k(-)$ の誤差共分散行列

v_k : 観測誤差

Q_k : $(n \times n)$ のシステム誤差分散・共分散行列

R_k : 観測誤差分散

P_k : $(n \times n)$ の推定誤差分散・共分散行列

K_k : $(n \times 1)$ のカルマン・ゲインベクトル

I : $(n \times n)$ の単位行列

T : 上添字は行列の転置

$\hat{x}_k(+)$: k 時刻で新しい観測値を得た場合の
状態変量の更新推定値

$P_k(+)$: 更新値 $\hat{x}_k(+)$ の誤差共分散行列

カルマン・フィルター理論は、元来線形システムの状態推定として導かれている。その構成式をまとめて表-1に示す。カルマン・フィルター理論を適用して洪水流出オンライン予測を行うためには、表-1に示されるシステム方程式と観測方程式をどのように導くかにかかっている。この作業が終われば、カルマン・フィルターのプログラムはほぼ完了したといっても過言ではない。

3. 流出モデルの選択

洪水流出のオンライン予測においても、なんらかの流出モデルを選定しなければならない。洪水防御施設操作、洪水予報の伝達、避難・水防活動などの緊急性を考慮すると、計算があまりかかりすぎる複雑なモデルは極力さけるべきである。また、洪水予測の実運用という観点からは、実務者が普段から慣れ親しんでいるモデルを採用することが望ましい。最近、全国109直轄水系における洪水予報・水防警報システムの実態調査が行われた⁷⁾。その結果、流出予測モデル手法として、貯留関数法を採用している所が93%と高率を占めている。したがって、実務者は洪水予測モデルとして、貯留関数モデルを採用することに関しては違和感がないであろう。さらに、降雨流出過程の物理機構に基づいた等価粗度モデル(kinematic wave 法)を貯留関数モデルに変換して、貯留関数モデル定数の物理的意味を定量的に評価しようとする研究成果が発表されているので^{8)~10)}、今後は物理構造を考慮した貯留型流出モデルが洪水予測の主流となつてこよう。

石狩川流域の洪水予測システムで用いられている貯留関数モデルは次式で与えられる。

$$\begin{cases} s = k_1 q^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ \frac{ds}{dt} = fr - q \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 s ：貯留高(mm)、 q ：流出高(mm/h)、 r ：雨量強度(mm/h)、 f ：流出率、 t ：時間(h)、 k_1, k_2, p_1, p_2 ：モデル定数

(1)式の貯留関数形は等価粗度モデルの理論解から導出されたものである。また、マニング則による表面流を想定する場合、貯留関数モデル定数は次式で与えられる。

$$\begin{cases} k_1 = 2.823 f_c A^{0.24} \\ k_2 = 0.2835 k_1^2 \bar{r}^{-0.2648} \\ p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ f_c = (n / \sqrt{i})^{0.6} \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 A ：流域面積(km²)、 $\bar{r}$ ：平均有効雨量強度(mm/h)、 n ：等価粗度(s/m^{1/3})
 i ：平均斜面勾配

一般には、(2)式中の f_c は未知定数である。しかしながら、解析対象地点で数個の洪水資料がある場合、実測流量と計算流量の誤差 2 乗和が最小となるように f_c を一次元探索によって同定し、その平均値を洪水予測システムに組み込むことが可能である。ちなみに、ピーク比流量 $0.5\text{m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ 以上の洪水例 169 ケースにつき f_c を最適同定した結果、その平均値は 1.56、分散 0.43 の値の得ている。モデル定数 k_2 には平均有効雨量強度 $\bar{r}$ が含まれている。そこで、1 時間毎に雨量情報が入手されるものとして、 $\bar{r}$ には過去の累加雨量の平均値を用いる。すなわち、

$$\bar{r} = \frac{f}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} r_i \quad (3)$$

ここで、 N_t は現時刻までの雨量系列 r_i の標本数

したがって、洪水予測システムでは、定数 k_2 を(3)式により 1 時間毎に更新する。また、洪水生起時に流出率 f を正確に算定することは困難であるので、既往洪水の解析結果に基づき、流出率を最大値近傍に設定しておく。

(1)式をカルマン・フィルター理論適用の際のシステム方程式とする訳であるが、(1)式を表-1 に示される「システム方程式」の型式に変換しなければならない。このため、次のように変数変換を行う。

$$\begin{cases} x_1 = q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (4)$$

(1)式と(4)式から、次の非線形連立常微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{1}{k_2} x_1^{1/p_2} + \frac{fr}{k_2} \end{cases} \quad (5)$$

(5)式を解くにあたり、(6)式の初期条件を設定する。

$$\begin{cases} x_1|_{t=0} = q_0^{p_2} \\ x_2|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 q_0 : 初期流量(mm/h)

(5)式の非線形微分方程式は線形カルマン・フィルター理論が適用可能なように近似線形化する。まず、以後の解析に便利のように、(5)式をベクトル表示すると

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (7)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ f_2(x_1, x_2) = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{1}{k_2} x_1^{1/p_2} + \frac{fr}{k_2} \end{cases} \quad (10)$$

今、 $F(X)$ が十分になめらかな関数として、 $F(X)$ をあらかじめ既知な $X = X^*$ において1次の項までテーラー級数展開すると、

$$F(X) = F(X^*) + A(X^*)(X - X^*) \quad (11)$$

ここで、 $A(X^*)$ はヤコビアン行列で、次式で定義される。

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{X=X^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

(12)式の行列要素、 a_1 と a_2 は次式で与えられる。

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-2} (x_2^*) - \frac{1}{k_2} \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2-1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} \end{cases} \quad (13)$$

(11)式を(7)式に代入すると、(14)式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} D(X^*) &= F(X^*) - A(X^*)X^* \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x_1^*, x_2^*) \\ f_2(x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{cases} d_1 = f_1(x_1^*, x_2^*) - x_2^* = 0 \\ d_2 = f_2(x_1^*, x_2^*) - a_1 x_1^* - a_2 x_2^* \\ \quad = \frac{k_1}{k_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) + \frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{1/p_2} + \frac{fr}{k_2} \end{cases} \quad (16)$$

(14)式は線形常微分方程式であり、 $A(X^*)$ と $D(X^*)$ が定係数行列であるとき、その理論解は次式で表わされる差分方程式に変換できる¹¹⁾。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (17)$$

ここで、 X_k は任意の計算時間ステップ k における X の値である。

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k, \quad D_k = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix}_k \quad (18)$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_k = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (19)$$

なお、行列 Φ_k と Γ_k は次式によって計算される。

$$\Phi_k = \exp(AT) = I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \frac{1}{24}(AT)^4 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= [\exp(AT) - I]A^{-1} \\ &= T \left[I + \frac{1}{2}(AT) + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 \right] \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 T は計算時間間隔、 I は (2×2) の単位行列、 A は(12)式の行列である。

行列 Φ_k と Γ_k の要素を求めるには、(12)式を(20)、(21)式に代入すればよい。その結果を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_1 = 1 + \frac{1}{2}a_1T^2 + \frac{1}{6}a_1a_2T^3 + \frac{1}{24}a_1a_3T^4 \\ \phi_2 = T\left(1 + \frac{1}{2}a_2T + \frac{1}{6}a_3T^2 + \frac{1}{24}a_2a_4T^3\right) \\ \phi_3 = a_1T\left(1 + \frac{1}{2}a_2T + \frac{1}{6}a_3T^2 + \frac{1}{24}a_2a_4T^3\right) = a_1\phi_2 \\ \phi_4 = 1 + a_2T + \frac{1}{2}a_3T^2 + \frac{1}{6}a_2a_4T^3 + \frac{1}{24}(a_1a_3 + a_2^2a_4)T^4 \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = T\left(1 + \frac{1}{6}a_1T^2 + \frac{1}{24}a_1a_2T^3\right) \\ \gamma_2 = T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_2T + \frac{1}{24}a_3T^2\right) \\ \gamma_3 = a_1T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_2T + \frac{1}{24}a_3T^2\right) = a_1\gamma_2 \\ \gamma_4 = T\left(1 + \frac{1}{2}a_2T + \frac{1}{6}a_3T^2 + \frac{1}{24}a_2a_4T^3\right) = \phi_2 \end{cases} \quad (23)$$

ここで、

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + a_2^2 \\ a_4 = a_1 + a_3 \end{cases} \quad (24)$$

したがって、(17)式は、(18)、(19)式を用いて、次のように表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (25)$$

(25)式は(26)式によってスカラー計算できる。

$$\begin{aligned} (x_1)_{k+1} &= \phi_1(x_1)_k + \phi_2(x_2)_k + \gamma_2(d_2)_k \\ (x_2)_{k+1} &= \phi_3(x_1)_k + \phi_4(x_2)_k + \gamma_4(d_2)_k \end{aligned} \quad (26)$$

(26)式の漸化式を用いれば、任意の離散時刻 k における $x_1 (= q^{p_2})$ と $x_2 (= d(q^{p_2})/dt)$ の値を計算できる点で計算機演算に最適な計算手法と言えよう。最後に任意の離散時刻 k における所要の流量も(4)式の逆変換で次式より算出される。

$$q = x_1^{1/p_2} = h(x_1, p_2) \quad (27)$$

非線形方程式の線形化解法では X^* の決定方法が問題となる。(17)式によって X_{k+1} を計算しようとするば、すでに X_k の値は既知であるから、実用的には $X^* = X_k$ とするのが自然であろう。すなわち、(13)、(16)式の a_1, a_2, d_2 の係数を k ステップでの x_1 と x_2 の計算値を用いて算定すればよい。この操作に伴い、変係数行列 Φ_k と Γ_k は計算時間間隔 T ごとに一定値をとることになる。

4. カルマン・フィルタ理論の適用

カルマン・フィルタ理論適用にあたっては、どの変数を状態変量とするかによって、システム方程式と観測方程式の定式化が異なることに留意しなければならない。たとえば、流量予測に加えてモデル定数をオンライン同定したいときにはモデル定数も状態に含めることも可能である。石狩川流域における洪水予測システムでは、(4)式に示される x_1 と x_2 のみを状態変量として、モデル定数を(2)式の値に固定している。その理由は、石狩川水系の予測値点数は本・支川あわせて42地点にのぼり、各点でモデル定数をオンライン同定することは、計算の迅速性から言って得策ではないと判断したからである。さらに、システムの実運用中の誤動作を極力排除する必要性があったからである。

モデル定数を固定した影響が流量予測精度にも影響を及ぼすことは容易に想像できる。したがって、予測精度の劣化をふせぐ方策としてシュミット・カルマン・フィルタ(Schmidt-Kalman filter)を採用する¹²⁾。この手法の特徴は、定数固定化に伴う影響を状態変量と定数の誤差分散・共分散で補償してやろうとするところにある。

このため、モデル定数を状態変量にみたてて、システム方程式の拡大を図る。まず、(4)式の x_1 と x_2 をベクトル X_1 で表現し、モデル定数をベクトル X_2 で表わす。すなわち、

$$\begin{cases} X_1^T = [x_1 & x_2] \\ X_2^T = [k_1 & k_2 & p_1 & p_2 & f] \end{cases} \quad (28)$$

新しい状態変量ベクトル X_2 を導入したとき、システム方程式は多少複雑になるが、基本的誘導過程は前述した方法を踏襲すればよい。すなわち、(10)式の非線形方程式をモデル定数で微分して線形化微分方程式を導き((14式に対応)、さらに差分方程式に変換する((17式に対応)。その結果をベクトル表示で以下に示す。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0_2 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (29)$$

ここで、

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_5 & \phi_6 & \phi_7 & \phi_8 & \phi_9 \\ \phi_{10} & \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} \quad (30)$$

0_1 : (5×2) のゼロ行列、 0_2 : (5×1) のゼロベクトル、 I : (5×5) の単位行列
(29)式を展開すると、 $(X_2)_{k+1} = (X_2)_k$ という関係式が得られる。これは 5 個のモデル定数が時間的に変化しない事を意味する。(30)式の Φ_1 とベクトル Γ_1 の要素は(22)式と(23)式の値に等しい。

したがって、モデル係数を状態変量にみたてた拡大システム方程式では係数行列 Φ_2 の要素のみがふえたことになる。(17)式ないし(29)式は表-1 中の状態変量の伝達方程式に対応している。このとき、状態変量の推定誤差分散・共分散がどのように伝達されているかが次の問題となる。このため、次に示す推定誤差分散・共分散を定義する。

$$\begin{aligned} P_k &= E(\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \tilde{X}_1^T & \tilde{X}_2^T \end{bmatrix}_k \right\} \\ &= \begin{bmatrix} E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2^T)_k \\ E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_2^T)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} \\ P_{2,k}^T & U_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 $\tilde{X}_k$: 状態変量の推定誤差、 $P_{1,k}$: X_1 に関する (2×2) の分散・共分散行列、 $P_{2,k}$: X_1 と X_2 に関する (2×5) の共分散行列、 U_k : X_2 (モデル定数) に関する (5×5) の分散・共分散行列

(29)式の $(d_2)_k$ を確定変数とみなし、表-1 に示される「推定誤差共分散伝達方程式」と(31)式の関係式を用いると、次式が得られる。

$$P_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} \\ P_{2,k}^T & U_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^T & 0_1^T \\ \Phi_2^T & I \end{bmatrix} \quad (32)$$

(32)式を小行列毎に展開した結果を以下に示す。

$$P_{1,k+1} = \Phi_1 P_{1,k} \Phi_1^T + \Phi_2 P_{2,k}^T \Phi_1^T + \Phi_1 P_{2,k} \Phi_2^T + \Phi_2 U_k \Phi_2^T \quad (33)$$

$$P_{2,k+1} = \Phi_1 P_{2,k} + \Phi_2 U_k \quad (34)$$

$$U_{k+1} = U_k \quad (35)$$

(33)式は非常に重要な意味をもつ。 $P_{1,k+1}$ は状態変量 x_1 の推定値誤差分散・共分散である。さきに、モデル定数を固定するとしたが、モデル定数を状態変量に加え、システム方程式を拡大することによって、 Φ_2 , $P_{2,k}$ および U_k の影響が $P_{1,k+1}$ に反映されていることになる。(35)式に示されるモデル定数の誤差分散・共分散が一定値で伝達される理由はモデル定数が時間的に変化しないことによる。

U_k の値をあらかじめ設定しておく必要がある。このとき、モデル定数を(2)式で固定するので、それに伴う不確定性を考慮しておく。誤差の大きさを各定数の $100\alpha\%$ ($\alpha=0.1\sim0.3$ が適当)として、 U_k を次のように仮定する。

$$U_k = \begin{bmatrix} (k_1\alpha)^2 & & & & 0 \\ & (k_2\alpha)^2 & & & \\ & & (p_1\alpha)^2 & & \\ & 0 & & (p_2\alpha)^2 & \\ & & & & (f\alpha)^2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

なお、モデル定数 k_2 は平均雨量強度 $\bar{r}$ によって変化するので、カルマン・フィルタ理論によって状態変量 x_1 と x_2 を更新したのち、(3)式によって累加平均有効雨量を算定して、定数 k_2 を設定し直す。したがって、 $(k_2\alpha)^2$ のみが、観測値情報入手後に変化し、他の要素は変化しないことになる。

カルマン・フィルタ理論を適用するに際しての難点は、表-1に示される「システム誤差共分散行列」 Q_k と「観測誤差分散」 R_k をどのように設定したらよいかという問題にある。この難点をいかに克服するかを以下に述べる。

(17)式は、カルマン・フィルタ理論における流量観測値間、 $t_k \leq t < t_{k+1}$ での状態変量の伝達方程式に相当しており、この間システム誤差を考慮しない。その代り、 $t=t_{k+1}$ において瞬間的にノイズが付加されると考える。このとき、ノイズの大きさは状態変量推定値に比例すると仮定する。この考えが京大グループによって提案された「乗算的ノイズ」の導入である¹³⁾。今、(17)式の解より得られる $t=t_{k+1}$ における状態変量を $x_1(t_{k+1})$ 及び $x_2(t_{k+1})$ とする。また、新しい流量観測値が得られる直前の状態変量を $x_{1,k+1}(-)$ および $x_{2,k+1}(-)$ とする。したがって、乗算的ノイズを導入することにより、次の定式化を行なうことができる。

$$\begin{aligned} X_{1,k+1}(-) &= X_1(t_{k+1})(1+W_{k+1}) \\ &= X_1(t_{k+1})+B_{k+1}W_{k+1} \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、

$$\begin{cases} X_{1,k+1}(-) = \begin{bmatrix} x_{1,k+1}(-) \\ x_{2,k+1}(-) \end{bmatrix} \\ B_{k+1} = \begin{bmatrix} b_{1,k+1} & 0 \\ 0 & b_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) & 0 \\ 0 & x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} \\ W_{k+1} = \begin{bmatrix} w_{1,k+1} \\ w_{2,k+1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (38)$$

(37)、(38)式にも示されるように、システム誤差は状態変量に比例している。システム誤差ベクトル W_{k+1} は次の統計的性質をもつものとする。

$$\begin{cases} E(W_{k+1}) = 0 \\ E(W_{k+1}W_{k+1}^T) = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (39)$$

システム誤差として状態変量の $100\alpha_1\%$ の大きさが想定されているので、 $\alpha_1 = 0.1 \sim 0.2$ の値を採用すればよい。 W_{k+1} は(39)式の性質を有しているので、 $X_{1,k+1}(-)$ の推定値は(37)式から次式で与えられる。

$$\hat{X}_{1,k+1}(-) = E[X_{1,k+1}(-)] = \hat{X}_1(t_{k+1}) \quad (40)$$

すなわち、 $\hat{X}_{1,k+1}(-)$ は(17)式の伝達方程式を解いたときの $t = t_{k+1}$ における値に等しい。(40)式から(37)式を引くと、次式が得られる。

$$\tilde{X}_{1,k+1}(-) = \tilde{X}_1(t_{k+1}) - B_{k+1}W_{k+1} \quad (41)$$

ここで、

$$\begin{cases} \tilde{X}_{1,k+1}(-) = \hat{X}_{1,k+1}(-) - X_{1,k+1}(-) \\ \tilde{X}_1(t_{k+1}) = \hat{X}_1(t_{k+1}) - X_1(t_{k+1}) \end{cases} \quad (42)$$

したがって、(41)式を用いることによって推定誤差分散・共分散は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_{1,k+1}(-) &= E[\tilde{X}_{1,k+1}(-)\tilde{X}_{1,k+1}^T(-)] \\ &= P_{1,k+1} + B_{k+1}E(W_{k+1}W_{k+1}^T)B_{k+1}^T \\ &= P_{1,k+1} + Q_{k+1} \end{aligned} \quad (43)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
Q_{k+1} &= B_{k+1} E(W_{k+1} W_{k+1}^T) B_{k+1}^T = B_{k+1} (\alpha_1^2 I) B_{k+1}^T \\
&= \begin{bmatrix} (b_{1,k+1} \alpha_1)^2 & 0 \\ 0 & (b_{2,k+1} \alpha_1)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{44}$$

(41)式の右辺第1項の $P_{1,k+1}$ は(33)式で計算される。(44)式においては、行列 B_{k+1} は状態変数推定値に依存して流量観測値入手直前まで変化するので、 α_1 が一定値であっても Q_{k+1} は時間的に変化していることになる。すなわち、システムノイズに非定常性が考慮されていることになる。しかも、計算が非常に容易であり、実際の運用にあたっても困難を生じない。

カルマン・フィルター理論を適用するにあたって、残された問題は観測方程式の定式化である。流量と状態変数 x_1 の間には(27)式の関係が成立するので、観測方程式を次のように定義する。

$$z_k = x_1^{1/p_2} (1 + v_k) = x_1^{1/p_2} + c_k v_k \tag{45}$$

ここで、

$$c_k = x_1^{1/p_2} \tag{46}$$

z_k : サンプル時刻 k における流量観測値、 v_k : 流量観測誤差

(45)式の示される観測誤差は観測値に比例しているので、その効果は乗算的に作用していることになる。観測値 z_k が入手された後の状態変数の更新方程式は次式で与えられる。

$$\hat{X}_{1,k}(+) = \hat{X}_{1,k}(-) + K_1 [z_k - \{\hat{x}_{1,k}(-)\}^{1/p_2}] \tag{47}$$

ここで、 $(-)$ 、 $(+)$ の記号はそれぞれ、流量観測値情報入手直前と直後を意味する。(47)式の更新方程式においては、状態変数 x_1 と x_2 のみを更新し、5個のモデル定数の更新は行わない。

ここで問題となるのが (2×1) 行列のカルマン・ゲイン K_1 の算定である。元来、カルマン・フィルター理論は表-1 に示される線形システム方程式と線形観測方程式に関して理論展開がなされている。したがって、(45)式 of 非線形観測方程式に直接カルマン・フィルター理論を適用することができない。このため、近似解法として、(27)式 of 非線形関数 $h(x_1, p_2)$ の線形化を考える。すなわち、

$$h(x_1, p_2) \approx H_k X_k + h_{3,k} = [H_1 \vdots H_2] \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{bmatrix} + h_{3,k} \quad (48)$$

ここで、

$$H_k = [H_1 \vdots H_2] \quad , \quad H_1 = [h_1 \ 0] \quad , \quad H_2 = [0 \ 0 \ 0 \ h_2 \ 0] \quad (49)$$

$$\begin{cases} h_1 = \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2^*} (x_1^*)^{1/p_2^*-1} \\ h_2 = \frac{\partial h}{\partial p_2} = \frac{-1}{(p_2^*)^2} (x_1^*)^{1/p_2^*} \ln x_1^* \\ h_3 = h(x_1^*, p_2^*) - h_1 x_1^* - h_2 p_2^* \\ \quad = (x_1^*)^{1/p_2^*} \left\{ 1 - \frac{1}{p_2^*} (1 - \ln x_1^*) \right\} \end{cases} \quad (50)$$

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

(50)式中の x_1^* と p_2^* にはそれぞれ、 $x_1^* = \hat{x}_{1,k}(-)$ と $p_2^* = 0.4648$ の値を用いる。また、(51)式の X_1 と X_2 は(28)式に示されている。観測方程式は(48)式により近似線形化されたので、表-1 に示される「カルマン・ゲイン」と「推定誤差共分散更新方程式」の H_k に(49)式を用いればよい。ここで、計算上の留意点を述べる。まず、分散・共分散行列 $P_k(-)$ は(31)式の準じて、次のように定義する。

$$P_k(-) = \begin{bmatrix} P_1(-) & \vdots & P_2(-) \\ \hline P_2^T(-) & \vdots & U \end{bmatrix} \quad (52)$$

$P_1(-)$ には(43)式による結果を、 $P_2(-)$ と U にはそれぞれ、(34)式と(35)式の計算結果を用いる。

次に、観測誤差分散 R_k については、(45)式より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} R_k &= E[(c_k v_k)^2] = c_k^2 E[v_k^2] = c_k^2 \alpha_2^2 \\ \alpha_2^2 &= E[v_k^2] \quad (\alpha_2 = 0.1 \sim 0.2) \end{aligned} \quad (53)$$

このとき、(46)式で定義される c_k の x_1 の値として $\hat{x}_{1,k}(-)$ を用いればよい。(49)式のベクトル H_1 と H_2 を表-1 に示される「カルマン・ゲイン」式に代入して整理すると、カルマン・ゲイン K_k は次式で与えられる。

$$K_k = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(-)H_1^T + P_2(-)H_2^T \\ P_2^T(-)H_1^T + UH_2^T \end{bmatrix} S^{-1} \quad (54)$$

ここで、

$$S = H_1 P_1(-)H_1^T + H_1 P_2(-)H_2^T + H_2 P_2^T(-)H_1^T + H_2 UH_2^T + R_k \quad (55)$$

(55)式の S は一見複雑そうに見えるが、実際に行列を展開してみると、 S はスカラー量である。したがって、(54)式の S^{-1} も(55)式で計算される値の逆数をとればよい。ベクトル H_1 と H_2 の多くの要素はゼロである。このため、直接行列演算をプログラム化するのではなく、行列を展開した結果の要素をプログラムに組むことが得策である。この操作は、とくに計算時間を大幅に短縮させるのに有効となる。

以上、石狩川流域で実運用されている貯留関数モデルを基本式として、カルマン・フィルター理論を用いた実時間洪水予測手法について述べてきた。その適用例として、既往最大昭和56年8月上旬洪水に対して予測シミュレーションを行った結果を示す。図-1には石狩川上流部の納内地点(流域面積：3558km²)におけるシミュレーション結果を示した。同様に、図-2は石狩川中流部の月形橋地点(流域面積：9306km²)における検証例である。この計算例では各地点における実績流域平均降雨量を与えている。図-1に示される納内の場合、モデルパラメータを $k_1 = 28.1$ 、 $p_1 = 0.6$ 、 $p_2 = 0.4648$ 、 $f = 0.6$ と固定(k_2 は1時間毎に変化)してシミュレーションを行った結果であるが、これによると、3時間先予測で水位上昇時平均誤差が23cm、ピーク水位誤差が-18cm、ピーク水位時間誤差が4時間であり、6時間先予測で水位上昇時平均誤差33cm、ピーク水位誤差が16cm、ピーク水位時間誤差が3時間である。この場合、ピーク水位時間が多少早めに出現しているが、これは安全側であり、ハイドログラフ上昇時、ピーク付近とも良好な結果を得ているものと言える。

図中の破線で囲まれた部分は6時間先予測の95%信頼区間を示すが、これは予測理論としてカルマン・フィルター理論を用いた場合の1つの特徴であり、実際の予測の際にはこの上限値も考慮した方が安全である。

図-2に示す月形橋の場合も納内と同様に良好な結果と言えるが、双方ともハイドログラフの低減部の下降度合が若干早く今後改良の余地が残されている。

5. おわりに

石狩川流域における洪水予測は昭和38年のアナログ計算機の導入から始まり、以来、計算機の更新、洪水予測システムの改良を図ってきている。とくに、昭和55年にプラサド¹⁴⁾によって提案された貯留関数法とカルマン・フィルター理論を組み合わせた洪水予測手法と流出関数法を用いた洪水予測法が同時に実運用された事は特記に値する。

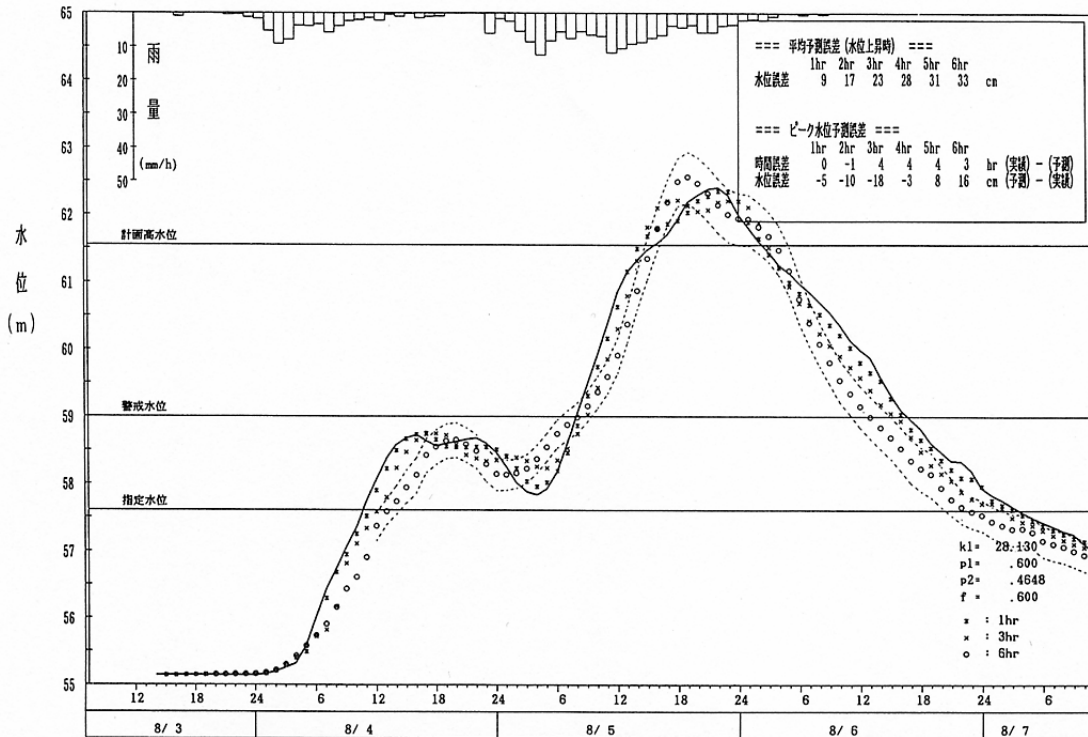


図-1 納内地点の再現計算結果 (昭和56年8月上旬洪水)

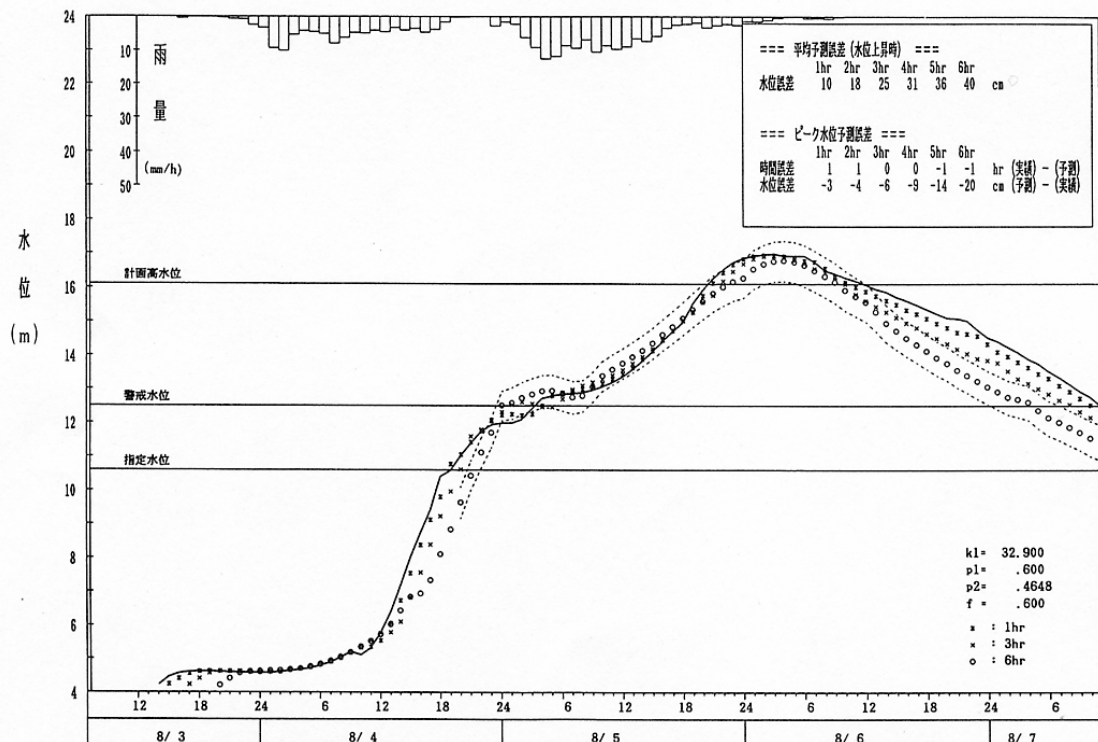


図-2 月形橋地点の再現計算結果 (昭和56年8月上旬洪水)

さらに、最近の電子計算機のデータ処理能力の向上、記憶容量の大型化、ディスプレイの高品位化、画像処理ソフトウェアの充実等の理由により、昭和 61 年には再度洪水予測システムの改良を行うことになった。その背景には、昭和 62 年 10 月に石狩川全流域を見渡すことができる道央レーダ雨雪量計が試験運用を開始したこともあげられる。洪水予測の精度向上を図る上で、レーダ雨量情報をどのように活用していくかが新たな鍵となっている。新洪水予測システムでは、次の点に配慮している。

- (a) 従来の縦横断水位予測システムの精度向上を図るため、11 地点から 42 地点へ予測地点数を増設
- (b) 流出モデルの更新
- (c) 予測理論の改良
- (d) ダム放流量を考慮した支川予測精度の向上
- (e) 本川の背水影響を受ける支川区間の水位予測向上
- (f) 本川における面積雨量の時間ずらし考慮である

本報告では、上記の改良点のうち、流出モデルと予測理論の更新につき、その数学的構築法を詳述してきた。その要旨をまとめて以下に示す。

- (a) モデル定数に物理的意味をもつ貯留関数法を流出モデルに採用した。
- (b) 演算時間の短縮を図るため、モデル定数を固定した。この定数固定に伴う流量予測精度の劣化を状態変量と定数に関する共分散を導入することによって防止した。
- (c) 予測手法として、シュミット・カルマン・フィルター理論を用いた。
- (d) システム誤差と観測誤差に乗算的ノイズを導入し、推定誤差共分散の非定常性を考慮した。

参考文献

- 1) Kalman, R. E. : A new approach to linear filtering and prediction problems, J. of Basic Engineering, Trans. of ASME. Vol.82, No.2, pp.35-45, 1960.
- 2) Hino, M.: On-line prediction of hydrologic system, Proc. of the 15th Conference of IAHR, Istambul, Vol.4, 1973.
- 3) 日野 幹雄: 水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用, 土木学会論文報告集, 第 221 号, pp.39-47, 1974.
- 4) Chiu, C.L.(Ed.): Application of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics and Water Resources, Proc. of the AGU Chapman Conference, University of Pittsburgh, 1978.
- 5) 椎葉 充晴: レーダ雨量計を利用した降雨の実時間予測と実時間流出予測法, 第 23 回水工学に関する夏季研修会講義集, A-1, pp.1-17, 土木学会, 1987.
- 6) 星 清: 洪水予測システムの基礎的検討(2), 北海道開発局土木試験所月報, No.386, pp.48-68, 1985.
- 7) 洪水予警報システム実態調査結果, (財)国土開発技術研究センター, 1986.
- 8) 星 清・山岡 勲: 雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第 26 回水理講演会論文集, pp.273-278, 土木学会, 1982.

- 9) 永井 明博・角屋 睦・杉山 博信・鈴木 克英: 貯留関数法の総合化, 京都大学防災研究所年報, 第 25 号 B-2, pp.207-220, 1982.
- 10) 高棹琢馬・宝 馨・楠橋康弘: 貯留関数型洪水流出モデルの比較精度, 第 29 回水理講演会論文集, pp.245-250, 土木学会, 1985.
- 11) 高橋 安人: システムと制御, 岩波書店, 1974.
- 12) Jazwinski, A.H.: Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press, 1970.
- 13) 宝 馨・高棹 琢馬・椎葉 充晴: 洪水流出の確率予測における実際的手法, 第 28 回水理講演会論文集, pp.415-422, 土木学会, 1984.
- 14) Prasad, R.: A nonlinear hydrologic system response model, J. of Hydraulic Divi., Proc. of ASCE, Vol.93, No.HY4, pp.201-221, 1967.

5. 種々の不確定性を考慮した洪水流出予測法

原資料

橋本 識秀・兪 朝夫・星 清：

洪水流出予測における実際の課題とその解決法

水工学論文集, 第 36 巻, pp. 567-572, 土木学会, 1992

洪水予測における実際的问题とその解決法

Practical Issues and Their Resolutions in Flood Runoff Prediction

Abstract

The present paper describes practical issues and their resolutions for increasing predictive capabilities of real-time flood forecasting methods. Special attention is directed to explicit incorporations of the water level-discharge($H \sim Q$)relationship and rainfall measurements by radar into the filter prediction formulation.

It is well recognized from hydrologic practices that measurement errors involved in the $H \sim Q$ relationship are quite significant in flow and water stage forecasting problems. The current approach proves extremely helpful in assessing the relative importance of modeling and measurement errors, and inaccuracy in rainfall forecasts for flood prediction applications.

For the behavior of watershed response, the present study uses a nonlinear storage routing model converted from the kinematic wave equations where accurate linkages between the parameters for the two approaches are maintained. The proposed algorithms were applied to the river stage forecasts of the 1988 Flood data in the Uryu River, which is a tributary of the Ishikari River.

Keywords: real-time flood forecasting, Schmidt-Kalman filter, radar rainfall information, water level-discharge relationship, storage-routing model

1. はじめに

カルマン・フィルターを用いた流出予測モデルについては、これまで多くの研究がなされている^{1)~4)}。最近では、電子計算機や通信機能の目覚ましい発達により、水文情報が実時間で入手できるようになった。このため、カルマン・フィルターを用いた流出予測モデルは、現場においてシステム化され、実際に洪水予測に利用されている。北海道開発局においても、石狩川をはじめ十勝川、留萌川等多くの河川でカルマン・フィルターを用いた流出予測モデルがシステム化されている。今後の洪水予測システムの大きな課題は河川情報システム、レーダ雨雪量計システムという水文情報収集システムと流出予測システムをいかに効率的に結びつけるか、また、予測値をどのように表示し、水防活動に結びつけていくかという実務的なものにその力点が移っていくと考えられる。すなわち、現在までにカルマン・フィルターを用いた流出予測モデルの方法論については、ほぼ確立されたと言うことができよう。

しかしながら、カルマン・フィルターを用いた流出予測モデルを適用する際の残された課題の一つに、誤差項(ノイズ項)の具体的設定方法がある。一般にカルマン・フィルターの適用にあたっては、システムノイズと観測ノイズを与える必要がある。このノイ

ズ項の与え方には、未だ定まった方法論が無く、多分に経験的、恣意的に設定されてきたきらいがある。よって、カルマン・フィルターを用いた流出予測モデルの適用性の向上を図るためには、合理的な誤差項の設定方法を今後確立していく必要がある。本研究はカルマン・フィルターを用いた流出予測モデルの適用性の向上を意図して、水位～流量($H \sim Q$)変換に伴う誤差、予測降雨の誤差の評価方法及びそれら誤差の流出予測モデルにおける取り扱い法を提案するものである。

2. 流出予測モデルにおける誤差

流出予測値に誤差を生じさせる要因としては、①流出モデルの有する誤差、②観測値の有する誤差、③予測降雨の有する誤差が挙げられる。これまでに提案されてきた流出予測モデル⁵⁾では、①～③の誤差をこれまで次のように取り扱ってきた。まず、流出モデルの持つ誤差については、これを流出モデル自体の誤差とパラメータの同定誤差に分離し、流出モデル自体の誤差は乗算的ノイズ、すなわち状態量の $100\alpha\%$ ($\alpha=0.1 \sim 0.2$) と表現している。一方、パラメータの誤差は形式的にシステム方程式を拡大し、パラメータを状態変量に取り込むことにより流出予測値にその誤差を反映させている(シュミット・カルマンの方法)。また、実時間で得られる観測値としては流量 Q を考え、観測誤差もシステムノイズ同様、乗算的ノイズとしている。予測雨量の誤差については考慮していない。

流量 Q は通常、観測水位から $H \sim Q$ 式を用いて変換される。従って、流量 Q の誤差は観測水位 H そのものの誤差と $H \sim Q$ 変換の際に生ずる誤差が考えられる。水位観測機器の十分な維持管理さえ行われれば、観測水位そのものの誤差は小さく、流量 Q の誤差の大部分は、 $H \sim Q$ 曲線のあてはめ誤差で構成されたと考えて差し支えないであろう。よって、 $H \sim Q$ 曲線のあてはめ誤差を評価することができれば、合理的に観測誤差を設定できそうである。また、現在の降雨予測の技術水準では、予測雨量の誤差はかなり大きく、流出予測値の誤差のかかなりの部分を構成していると考えられる。また、この誤差は予測時間が長くなるほど、対象流域が小さくなるほど、大きくなるものである。

以上の論議を踏まえ、本研究では $H \sim Q$ 変換に伴う誤差及び予測降雨の誤差の評価方法及びそれらの流出予測モデルでの取り扱い方を検討した。なお、システム方程式の入力条件である観測降雨も実は無視し得ない誤差を有すると考えられる。観測降雨の誤差は、主に点雨量から面雨量に変換する際に生じる。この誤差についても今後検討していく必要があろう。また、観測降雨の誤差の表現方法及びこれをどのように流出予測モデルへ取り込みむかについても、現在研究中である。この成果の発表は別の機会に行いたいと考えている。

3. 水位～流量($H \sim Q$)関係の誤差

通常、 $H \sim Q$ の関係式は H と $\sqrt{Q}$ が直線近似できるものとして、 $H \sim \sqrt{Q}$ 関係を観測データから最小2乗法で求めている。回帰式は次式で定義される。

$$\sqrt{Q} = a_0 + a_1 H \quad (1)$$

ここで、 a_0 と a_1 は回帰係数の推定値を表すものとする。

回帰式から求めるられる $\sqrt{Q}$ の分散推定値は、以下のようになる⁶⁾。

$$\begin{aligned} Var(\sqrt{Q}) &= \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial a_0} \right)^2 Var(a_0) + \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial a_1} \right)^2 Var(a_1) + 2 \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial a_0} \right) \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial a_1} \right) Cov(a_0, a_1) \\ &= Var(a_0) + H^2 Var(a_1) + 2HCov(a_0, a_1) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $Var(x)$ は x の分散の推定値、 $Cov(x, y)$ は x と y の共分散の推定値を表すものである。

a_0 と a_1 の分散及び共分散は次式で計算される。

$$Var(a_0) = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{\bar{H}^2}{\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2} \right\} \sigma^2 \quad (3)$$

$$Var(a_1) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2} \sigma^2 \quad (4)$$

$$Cov(a_0, a_1) = -\frac{\bar{H}}{\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2} \sigma^2 \quad (5)$$

ここで、 $\bar{H}$ は水位データの平均値で、 $\bar{H} = \sum H_i / n$ である。

σ^2 は流量データの分散の不偏推定値を表しており、

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (\sqrt{Q_i} - a_0 - a_1 H_i)^2 \quad (6)$$

となる。

以上、(3)～(5)式により回帰係数の a_0 と a_1 の分散及び共分散を、また(2)式により $\sqrt{Q}$ の分散を求めることが可能となる。

後述するように、本研究で用いた流出予測モデルでは、観測方程式を次の形で与える。

$$H = b_0 + b_1 \sqrt{Q} \quad (7)$$

したがって、(1)式の逆変換により $b_0 = -a_0 / a_1$ 、 $b_1 = 1 / a_1$ となる。

新しい回帰係数 b_0 と b_1 の分散及び共分散は次式で与えられる。

$$Var(b_0) = \left(-\frac{1}{a_1}\right)^2 Var(a_0) + \left(\frac{a_0}{a_1^2}\right)^2 Var(a_1) + 2\left(-\frac{1}{a_1}\right)\left(\frac{a_0}{a_1^2}\right)Cov(a_0, a_1) \quad (8)$$

$$Var(b_1) = \left(-\frac{1}{a_1^2}\right)^2 Var(a_1) \quad (9)$$

$$Cov(b_0, b_1) = \left(\frac{a_0}{a_1^2}\right)\left(-\frac{1}{a_1^2}\right)Var(a_1) + \left(-\frac{1}{a_1}\right)\left(-\frac{1}{a_1^2}\right)Cov(a_0, a_1) \quad (10)$$

図-1 は石狩川水系雨竜川の雨竜橋地点における昭和 63 年度観測データに基づく $\sqrt{Q} \sim H$ の関係式を表したものである。また、表-1 にはこれらのデータが示されている。(2)~(6)式及び(8)~(10)式を適用して、回帰係数の分散と共分散を求めた結果が示されている。

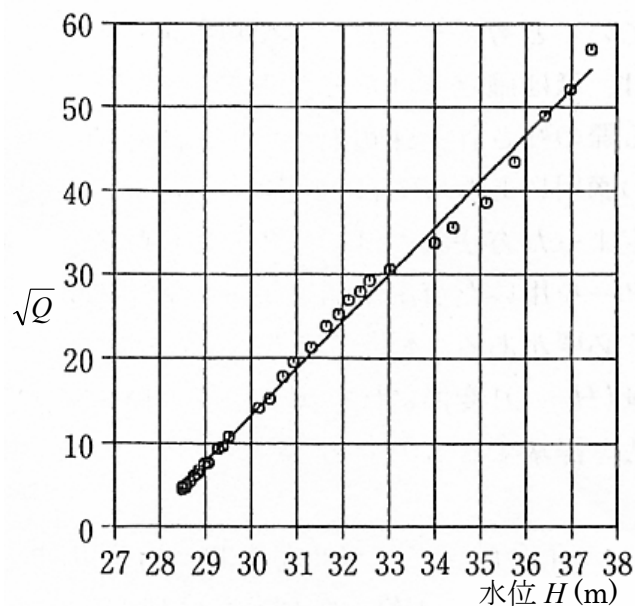


図-1 雨竜橋地点の $\sqrt{Q} \sim H$ 関係図 (昭和 63 年)

表-1 水位～流量曲線定数解析結果 (昭和 63 年)

サンプル数	31
a_0	-152.93
a_1	5.54
$Var(a_0)$	6.41
$Var(a_1)$	0.006
$Cov(a_0, a_1)$	-2.02
b_0	27.60
b_1	0.180
$Var(b_0)$	0.00461
$Var(b_1)$	0.000007
$Cov(b_0, b_1)$	-0.000144
適用範囲	$27.73 \leq H \leq 37.63$

4. 予測降雨の誤差のモデル化

レーダ雨量計を用いた降雨予測手法は数多く提案されているが、その予測精度が定量的に評価されている例は意外に少ない。吉野ら⁷⁾は予測雨量と実測雨量の関係を統計的に処理し、予測雨量の信頼限界を明らかにしている。また高棹ら⁸⁾はこれを一歩進め予測値の期待値が真値と一致し、その分散が予測時間 l と真値の2乗に比例すると考えて、次のように予測値の期待値と分散をモデル化した。

$$E(\hat{r}_{k+l}) = r_{k+l} \quad (11)$$

$$Var(\hat{r}_{k+l}) = S_{k+l}^2 = a_p^2 \cdot l \cdot r_{k+l}^2 \quad (12)$$

ここに $E(\cdot)$ ：期待値、 $Var(\cdot)$ ：分散、 $\hat{r}$ ：予測雨量、 r ：真値(実測雨量)、 S ：標準偏差、 a_p ：パラメータ、 l ：予測時間(リードタイム)、 k ：予測時刻

(11)式と(12)式は、予測時間が長くなるほど、また、降雨強度が大きくなるほど予測精度が悪くなるという仮定に基づいている。ただし、高棹らの原論文では、(11)、(12)式は予測降雨の精度を表すために導入されたものではなく、逆に、実測雨量から予測雨量を指定された精度で擬似的に作り出すためにモデル化されたものである。本研究でもこの誤差モデルの形式をそのまま採用することにし、降雨予測結果を統計処理し a_p を決定する。降雨予測は石狩川流域を対象に移流モデル⁹⁾を用いて行った。S63.8.25、S63.8.28、H1.9.3の3降雨を対象に、道央レーダ雨雪量計のレーダ雨量を用いて3時間先までの降雨予測を行った。予測雨量を実測雨量と対比しその誤差を統計的に処理することにより、 $a_p = 0.37$ を得た。図-2は予測雨量と実測雨量の散布図及び(12)式で表される標準偏差を示したものである。なお、上林は沖縄の八重岳レーダ、中部地方の御在所レーダの雨量を用いて降雨予測を実施し、本研究と同様に a_p の同定を行っている。

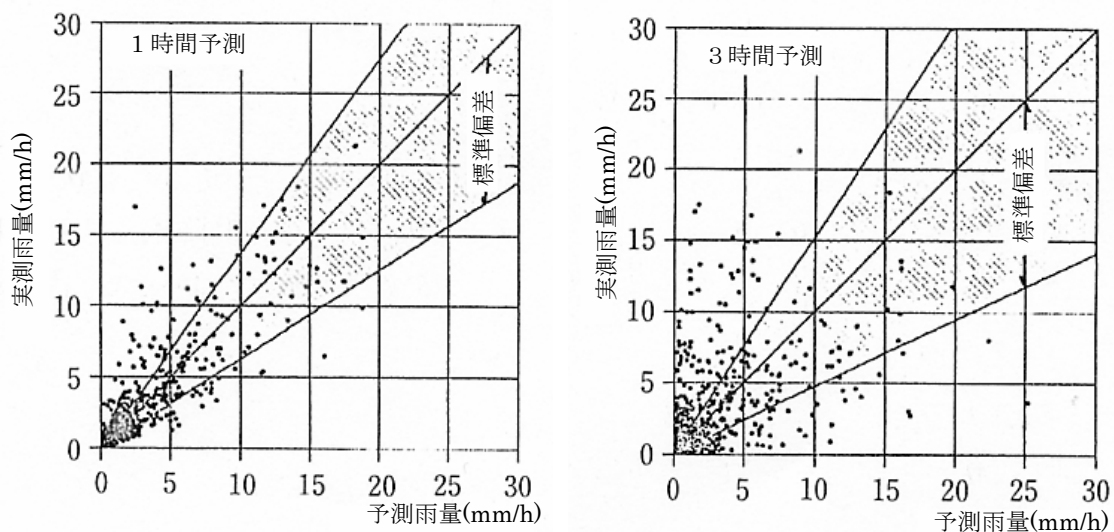


図-2 予測降雨の誤差のモデル化

その結果、それぞれ $a_p=0.47$ と 0.41 を得ている¹⁰⁾。今回求めた a_p は 0.37 であり、上林の求めた a_p 値を下回っている。すなわち、分散が小さく降雨予測の精度が良いような印象を受けるが、実は本研究と上林の研究では、予測精度を評価する面積が異なり、いちがいに降雨予測の精度について論ずることはできない。上林の論文では評価単位面積が 81km^2 であるのに対し、本研究では約 $1,000\text{km}^2$ となっており、むしろ評価面積の違いが a_p の差に現れたと考えるべきであろう。

5. 流出予測モデル

流出予測モデルは、次式で示される貯留関数型のモデルを採用する。このモデルは等価粗度モデルの理論解から導出されたものであり、数値的な取り扱いが簡単なうえ適用性も優れている¹¹⁾。

$$s = k_1 q^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad (13) \quad \frac{ds}{dt} = fr - q \quad (14)$$

ここに、 s ：貯留高(mm)、 q ：流出高(mm/h)、 r ：降雨量(mm/h)、 f ：流出率
マニング則による表面流を想定する場合、(13)式のモデル定数は次式で与えられる。

$$k_1 = 2.823 f_c A^{0.24}, \quad k_2 = 0.2835 k_1^2 \bar{r}_e^{-0.2648} \quad (15)$$

$$p_1 = 0.6, \quad p_2 = 0.4648, \quad f_c = (n/\sqrt{i})^{0.6}$$

ここに、 A ：流域面積(km^2)、 n ：等価粗度($\text{s/m}^{1/3}$)、 i ：勾配、 $\bar{r}_e$ ：平均有効雨量強度(mm/h)

(13)、(14)式を線形化するため、次式のように変数変換する。

$$x_1 = q^{p_2}, \quad x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad (16)$$

(16)式を(13)、(14)式に代入し、これをテイラー展開によって線形化し、かつ差分化すると次式が得られる。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k B_k \quad (17)$$

ここに、 $X_k^T = [x_1 \ x_2]_k$
(17)式を用いることにより、 $k+1$ 時刻の状態量 X_{k+1} を数値的に求めることができ、かつカルマン・フィルター理論を適用し、状態量の更新及び状態量の有する誤差を計算することができる。しかしながら、(17)式ではモデル定数、 $H \sim Q$ 変換定数及び予測降雨の誤差を状態量の誤差に反映させることはできない。よって形式上、モデル定数、 $H \sim Q$ 変換定数、予測降雨を状態量に加え、システム方程式を拡大する。すなわち、

$$X^T = [x_1 \ x_2 \ k_1 \ k_2 \ p_1 \ p_2 \ f \ b_0 \ b_1 \ r] \quad (18)$$

とする。ただし r は予測雨量であり、 r_k は $k \sim k+1$ 時刻間の予測雨量とする。 m 時間先

までの降雨予測を行うとすると、予測雨量は $r_k (k=1\cdots m)$ の m 個となる。よって本来なら、システム方程式には、 m 個すべての予測雨量を状態量として取り込む必要がある。しかしここでは、簡単のためこれら m 個の予測雨量の誤差間に相関はない。すなわち共分散を0として定式化を進める。このような仮定に立てば、システム方程式に取り込む予測雨量は、その時点で計算に用いる予測雨量だけで良いことになる。このように状態量を拡大すると(17)式は次のように書き換えられる。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & 0 & \Phi_4 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (19)$$

ここに、 $X_1^T = [x_1 \ x_2]$, $X_2^T = [k_1 \ k_2 \ p_1 \ p_2 \ f]$, $X_3^T = [b_0 \ b_1]$, $X_4 = r$
この時、状態量の誤差分散と共分散は次式で表される。

$$P_k = E \left[\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ \tilde{X}_4 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \tilde{X}_1^T & \tilde{X}_2^T & \tilde{X}_3^T & \tilde{X}_4^T \end{bmatrix}_k \right] = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} & P_{3,k} & P_{4,k} \\ P_{2,k}^T & U_k & 0 & 0 \\ P_{3,k}^T & 0 & W_k & 0 \\ P_{4,k}^T & 0 & 0 & V_k \end{bmatrix} \quad (20)$$

ここに、 $E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_3^T) = 0$, $E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_4^T) = 0$, $E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_4^T) = 0$

(20)式において、 U_k はモデルパラメータの誤差分散・共分散である。 W_k は $H \sim Q$ 変換定数の誤差分散・共分散であり、(8)～(10)式で計算される。また、 V_k は予測降雨の分散で(12)式で与えられる。

観測値を新たに入手した時の観測更新は次のように計算できる。観測方程式は、水位 z_k を観測値として、

$$z_k = b_0 + b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6}} x_1^{1/2 p_2} \quad (21)$$

(21)式を線形化して観測誤差を考慮すれば、(22)式のようになる。

$$z_k = H_k X_k + h_3 + m_k \quad (22)$$

ここで、 m_k は $H \sim Q$ 変換に伴う誤差だけを考慮することとし、次式の統計量を与える。

$$E(m_k) = 0, \quad R_k = E(m_k^2) = \varepsilon^2 / a_1^2 \quad (23)$$

$$\varepsilon^2 = \text{Var}(\sqrt{Q}) = \text{Var}(a_0) + H^2 \text{Var}(a_1) + 2H \text{Cov}(a_0, a_1) \quad (24)$$

カルマン・ゲイン K_k は(25)式で、また状態量の更新は(26)式で計算される。

$$K_k = P_k(-)H_k^T [H_k P_k(-)H_k^T + R_k] \quad (25)$$

$$\hat{X}_{1,k}(+) = \hat{X}_{1,k}(-) + K_1 \left[z_k - b_0 - b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6}} \hat{x}_{1,k}^{1/2 p_2}(-) \right] \quad (26)$$

ここに、 K_1 はカルマン・ゲインのうち X_1 に対応する部分行列(2×1)である。

また、誤差分散と共分散行列も観測値の入手に伴い更新されるが、 U_k, W_k, V_k は更新されない。すなわち、

$$U_k(+) = U_k(-), \quad W_k(+) = W_k(-), \quad V_k(+) = V_k(-) \quad (27)$$

(-) と (+) はそれぞれ、新しい観測値が入手される直前と直後の時刻を示す。

なお、水位予測の際には(21)式を出力方程式と考え、状態量 X_1 の分散・共分散を(20)式を介して算定し、予測水位の分散に変換する。

6. 実河川への適用

石狩川の一次右支川雨竜川を対象に、前節で述べた流出予測モデルを適用し、その適合性を検証した。雨竜川は本線 105km 地点で合流する流域面積 1722.3km²、幹線流路延長 177.0km の河川である。シミュレーションを行ったのは S63.8.25 洪水である。この洪水は、雨竜橋(流域面積 1,660.7km²)で計画高水位を上回った大出水であった。図-3 は実測値と予測値を比較したものである。1 時間予測とは、1 時間後の予測値を包絡したハイドログラフである。なお、計算条件はまとめて表-2 に示している。図-3 から 1 時間予測では、十分な精度で流出予測が行われていることがわかる。1 時間予測の場合のピーク付近の標準偏差は約 1m 程度である。1 時間予測の際の予測降雨誤差は小さいので、この誤差の大部分はシステムノイズで構成されている。3 時間予測ではピーク付近の予測精度は良好であるが、ピーク前の急激な上昇は表現し得ていない。これは予測降雨が小さかったためである。今後、更に検討を進めていく必要があるが、システムノイズは若干小さく、また予測降雨のノイズは更に大きく設定する方が妥当と推定される。

表-2 予測計算条件一覧

定数値		誤 差 分 散 の 設 定 方 法				
k_1	f	システム	モデル定数	$H \sim Q$ 変換定数	観測誤差	予測降雨
29.00	0.50	$(0.1X)^2$	$(0.1C)^2$	(8)~(10)式	(23),(24)式	(12)式

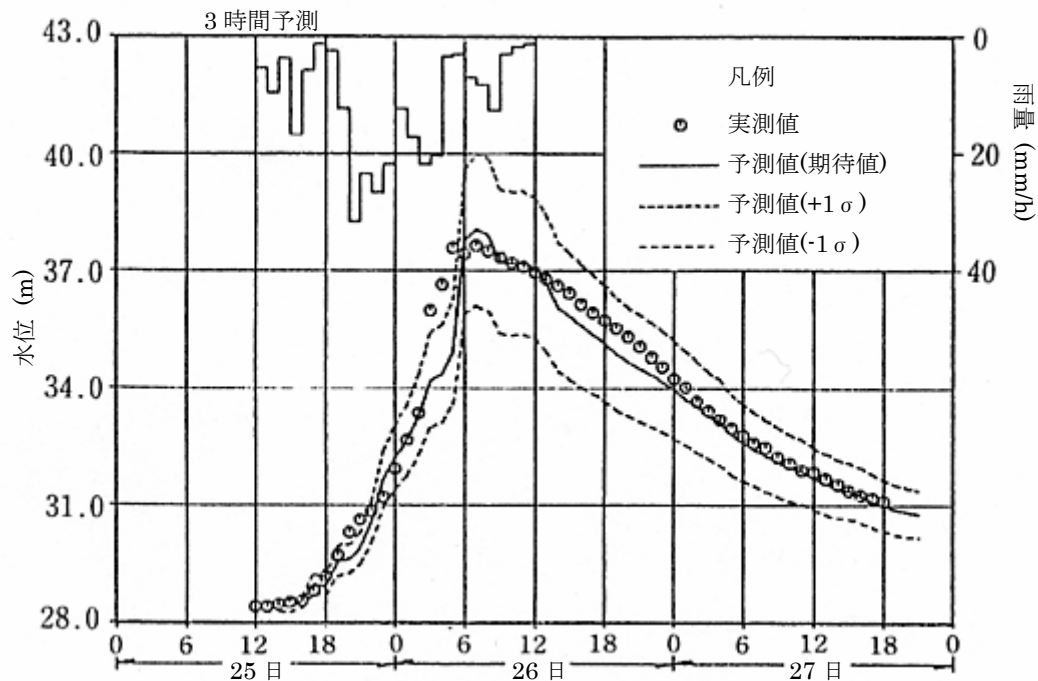
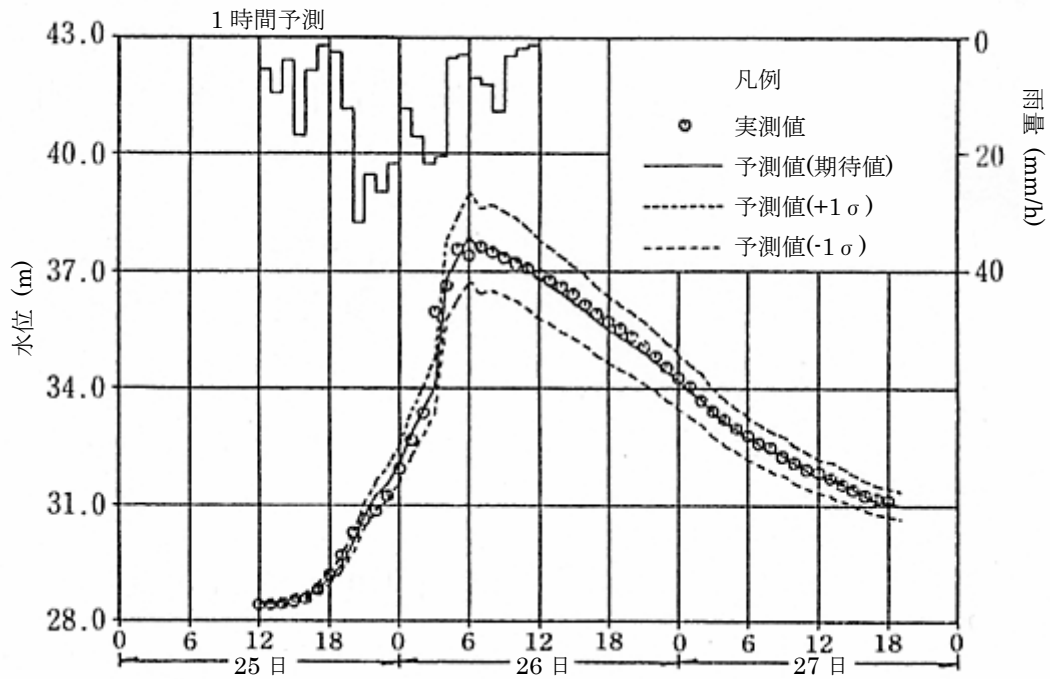


図-3 実測値と予測値の比較ハイドログラフ

7. おわりに

本研究では、カルマン・フィルターを用いた流出予測モデルの適用性向上を目指して、観測誤差、予測降雨の誤差のモデル化及び流出予測モデルへの取り込み方法について考察した。これを実河川に適用し良好な結果を得たが、次のような課題が残されていると考えられる。

- ① $H \sim Q$ 式の作成及びその評価は、通常、1年に1回行われるので、実際の洪水時には暫定的に昨年の $H \sim Q$ 式を用いている。よって、 $H \sim Q$ 関係のあてはめ誤差は、もっと大きいものになる。今後は $H \sim Q$ 式の作成、評価を迅速に行っていくシステムを確立する必要がある。
- ② 前述したように観測降雨も誤差を有しており、これらは通常システム誤差として表現されている。今後は観測降雨の誤差を明らかにし、システム誤差の設定方法にも合理性を求めていくことが重要と考えられる。

参考文献

- 1) 日野幹雄・金治弘：フィルター分離 AR 法とカルマン・フィルターによる洪水予測法に関する研究，土木学会論文報告集，第 351 号／Ⅱ－2，pp.155-162，1984.
- 2) 宝馨・高棹琢馬・椎葉充晴：洪水流出の確率予測における実際的手法，第 28 回水理講演会論文集，pp.415-422，土木学会，1984.
- 3) 砂田憲吾：非定常流出系の実時間洪水流量予測，第 26 回水理講演会論文集，pp.379-385，土木学会，1982.
- 4) 平野宗夫・森山聡之・河原田寿紀・山下三平：洪水位のオンライン予測に関する研究，土木学会第 41 回年次学術講演会概要集Ⅱ，pp.59-60，1986.
- 5) 星 清：洪水予測法の実例，第 24 回水工学に関する夏期研修会講義集，A-3，pp.1-20，土木学会，1988.
- 6) 中津川誠・星 清：水位－流量関係から推定される流量の精度について(その 1)，北海道開発局開発土木研究所月報，No.443，pp.2-8，1990.
- 7) 吉野文雄・水野雅光・兪朝夫：雨域追跡法による短時間降雨予測の精度，第 31 回水理講演会論文集，pp.209-214，土木学会，1987.
- 8) 高棹琢馬・椎葉充晴・宝馨：洪水流出の確率予測におけるモデルと手法，第 19 回自然災害科学総合シンポジウム，pp.63-66，1982.
- 9) 椎葉充晴・高棹琢馬・中北英一：移流モデルによる短時間降雨予測手法の検討，第 28 回水理講演会論文集，pp.423-428，土木学会，1984.
- 10) 上林好之：レーダ雨量情報を利用した洪水流出予測に関する研究，学位論文，早稲田大学，1990.
- 11) 星 清・山岡勲：雨水流法と貯留関数法との相互関係，第 26 回水理講演会論文集，pp.273-278，土木学会，1982.

実時間洪水予測システム理論 解説書

【発 行 日】 平成 16 年 5 月

【監 修】 国土交通省・北海道開発局建設部河川管理課

【編集・発行】 財団法人 北海道河川防災研究センター・研究所

〒060-0807 札幌市北区北 7 条西 4 丁目 伊藤 110 ビル

TEL (011)729-8141 FAX (011)729-3380

<http://www.bousai.or.jp>

【印 刷 所】 株式会社 アイワード

本CD-ROMの内容

本 CD-ROM は「実時間洪水予測システム理論」解説書を電子文書化したものです。
CD-ROM の内容は以下のとおりです。

フォルダ・ファイル名	内容
(1) CD-ROM の使用方法	本 CD-ROM の使用方法説明
(2) 本文	本報告の PDF ファイル
(3) プログラム	第3章～第9章までのフォートラン・プログラムのテキストファイル

▼Adobe Reader

PDF ファイルをご覧いただくには、Adobe Reader が必要です。無料配布されている
Adobe Reader を下記のリンク先よりダウンロードして下さい。

▼注意

接続回線の状態によっては時間がかかる場合があります。

Adobe Reader リンク先

<http://www.adobe.co.jp/products/acrobat/readstep2.html>