一次・二次導関数を用いた貯留型流出モデルの最適化

Comparison of Derivative-Based Optimization Procedures for Storage Routing Models

星　　清
Kiyoshi HOSHI

（財）北海道河川防災研究センター・研究所長

要　旨

種々の最適化手法が存在するが、その中でももっとも理解が容易で、実用的にも有効な方法は、一階ニュートン法に代表される一次導関数を用いた最適化手法であると言われている [1), 2)]。

本報告では、**単一流域**および**複合流域**において、以下に掲げる 3 種類の貯留関数モデルを採用して、洪水ハイドログラフの再現性の検証を行う。

(i)　**有効雨量を用いた貯留関数法（一般化貯留関数モデル）**（未知定数 : 1 個）

(ii)　**損失項を含む貯留関数法（1 段タンク型貯留関数モデル）**（未知定数 : 3 個）

(iii)　**地下水流出を含む貯留関数法（2 段タンク型貯留関数モデル）**（未知定数 : 3 個）

また、それぞれのモデルについて、次の 2 種類の最適化手法について検討を行う。

(i)　**一階ニュートン法（一次微係数利用）**

(ii)　**ダビドン法（一次微係数と二次微係数利用）**

数学的最適化手法の成否は、いかに効率よく導関数（微係数）を算出するかに依存する。上記の 2 種類の最適化手法の適用にあたっては、一次微係数及び二次微係数が必要となる。一次微係数と二次微係数は、感度方程式を導出して解析的に算定している。

解析対象として、北海道内の一級河川・湧別川及び信濃川・笠堀ダムにおける既往洪水に提案モデルと手法を適用して、最適化手法の検討を行う。

《キーワード : 貯留関数法 ; 最適化手法 ; 感度方程式 ; 一次・二次導関数》

１．はじめに

Parametric Hydrology においては、なんらかの流出モデルを既往洪水に適用する場合、実測ハイドログラフに最も適合するようにモデル定数を推定することが必要となる。この推定法がシステム同定あるいはモデル定数の最適化と言われている。モデル定数個数が 1 個の場合には、モデル定数を少しずつ動かしながら､実測波形に最も近くなるように試行錯誤的にモデル定数を同定することができよう。しかしながら、モデル定数の個数が多くなると試行錯誤的手法では用をなさなくなる。というのも、モデル定数値の変化割合をどのように設定したらよいかの問題、モデル定数の変動幅の組み合わせが指数関数的に増加するなど、繰返し回数も膨大なものとなるからである。また、モデル定数が相互に関連している場合には、各々のモデル定数を独立に動かしたのでは、真値に近づくという保障が得られなくなる。したがって、試行錯誤的要素を極力排除し、なんらかの客観的基準によってモデル定数の最適値同定を効率よく行おうとするのが、数学的最適化手法である。

２．最適化手法 [3), 4)]

理論展開を容易に拡張できるように、モデル定数を 3 個 (k_1, k_2, k_3) とした場合の最適化を示す。

（１）目的関数

モデル定数の最適同定の評価基準としては、観測流量 q_m^* と計算流量 $q_m(K)$ との誤差二乗和平均 *MSE*（*Mean Squares Error*）の最小化が用いられている。つまり、目的関数は次式で与えられる。

$$J\left(K\right) = MSE = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{e_m\left(K\right)\right\}^2 = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{q_m^* - q_m\left(K\right)\right\}^2 \tag{1}$$

ここで、q_m^* :観測流量、$q_m(K)$:モデル定数ベクトル $K = \left[k_1 \quad k_2 \quad k_3\right]^T$ が決定されたときの計算流量、e_m :誤差、 N :流量データ数

式(1)で表される目的関数 $J(K)$ を最小にする最適値 k_1, k_2 及び k_3 を繰り返し計算法によって探索する。今、反復計算過程における次のステップでのモデル定数の値、現ステップでの値を k_1, k_2 及び k_3 とすると、次式で表わされる。

$$k_1 + \Delta k_1 \quad , \quad k_2 + \Delta k_2 \quad , \quad k_3 + \Delta k_3 \tag{2}$$

現ステップでモデル定数値を既知となっているから、次のステップでの値を計算するためにはモデル定数の補正項ベクトル $\Delta K = [\Delta k_1 \quad \Delta k_2 \quad \Delta k_3]^T$ をいかに効率よく算定するかが最適化手法の主要課題となる。そこで、最適化計算における繰返し計算を終了させる条件は、次の収束条件を満たした時点とする。

$$\left|\frac{\Delta k_1}{k_1}\right| < \varepsilon \quad , \quad \left|\frac{\Delta k_2}{k_2}\right| < \varepsilon \quad , \quad \left|\frac{\Delta k_3}{k_3}\right| < \varepsilon \tag{3}$$

ここで、ε は収束許容限界値（通常 10^{-3}～10^{-4} ）である。

（２）一階ニュートン法

誤差項 $e_m(K + \Delta K)$ をモデル定数ベクトル $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T$ の近傍で一次テーラー級数展開すると、

次式が得られる。

$$e_m\left(K+\Delta K\right)=e_m\left(K\right)+\frac{\partial e_m\left(K\right)}{\partial K}\Delta K \tag{4}$$

ここで、式(1)より計算流出高 q_m に関する一次微係数ベクトル $U_m(K)$ は次式で定義される。

$$U_m\left(K\right)=\frac{\partial q_m}{\partial K}=-\frac{\partial e_m}{\partial K}$$
$$\begin{bmatrix} u_{1m} \\ u_{2m} \\ u_{3m} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \partial q_m/\partial k_1 \\ \partial q_m/\partial k_2 \\ \partial q_m/\partial k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\partial e_m/\partial k_1 \\ -\partial e_m/\partial k_2 \\ -\partial e_m/\partial k_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

式(4)を式(1)に代入し、ΔK で微分すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{m=1}^{N}\left\{\left[e_m\left(K\right)-u_{1m}\Delta k_1-u_{2m}\Delta k_2-u_{3m}\Delta k_3\right]\left[-u_{1m}\right]\right\}=0 \\ \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{m=1}^{N}\left\{\left[e_m\left(K\right)-u_{1m}\Delta k_1-u_{2m}\Delta k_2-u_{3m}\Delta k_3\right]\left[-u_{2m}\right]\right\}=0 \\ \dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{m=1}^{N}\left\{\left[e_m\left(K\right)-u_{1m}\Delta k_1-u_{2m}\Delta k_2-u_{3m}\Delta k_3\right]\left[-u_{3m}\right]\right\}=0 \end{cases} \tag{6}$$

式(6)を行列表示すると、次式で得られる。

$$\begin{bmatrix} \left[u_1^2\right] & \left[u_1u_2\right] & \left[u_1u_3\right] \\ \left[u_2u_1\right] & \left[u_2^2\right] & \left[u_2u_3\right] \\ \left[u_3u_1\right] & \left[u_3u_2\right] & \left[u_3^2\right] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left[eu_1\right] \\ \left[eu_2\right] \\ \left[eu_3\right] \end{bmatrix} \tag{7}$$

ここで、

$$\begin{cases} \left[u_iu_j\right]=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{m=1}^{N}u_{mi}u_{mj} & \left(i,j=1,2,3\right) \\ \left[eu_i\right]=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{m=1}^{N}e_mu_{mi} & \left(i=1,2,3\right) \end{cases} \tag{8}$$

式(7)を ΔK について解けば、モデル定数更新値を逐次算定することができる。式(7)の解法には**成分回帰分析法**が有効である [1), 3)]。つまり、ΔK は次式で計算される。

$$\begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left[u_1^2\right] & \left[u_1u_2\right] & \left[u_1u_3\right] \\ \left[u_2u_1\right] & \left[u_2^2\right] & \left[u_2u_3\right] \\ \left[u_3u_1\right] & \left[u_3u_2\right] & \left[u_3^2\right] \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \left[eu_1\right] \\ \left[eu_2\right] \\ \left[eu_3\right] \end{bmatrix} \tag{9}$$

（３）ダビドン法

目的関数 $J(K+\Delta K)$ をモデル定数ベクトル K の近傍で二次テーラー級数展開すると、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
J\left(K+\Delta K\right) = J\left(K\right) &+ \frac{\partial J\left(K\right)}{\partial k_1}\Delta k_1 + \frac{\partial J\left(K\right)}{\partial k_2}\Delta k_2 + \frac{\partial J\left(K\right)}{\partial k_3}\Delta k_3 \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_1^2}\Delta k_1^2 + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_2^2}\Delta k_2^2 + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_3^2}\Delta k_3^2\right\} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_1 \partial k_2}\right)\Delta k_1 \Delta k_2 + \left(\frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_1 \partial k_3}\right)\Delta k_1 \Delta k_3 + \left(\frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_2 \partial k_3}\right)\Delta k_2 \Delta k_3
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ここで、次式を定義する。

$$
\begin{aligned}
&g_1 = \frac{\partial J\left(K\right)}{\partial k_1} \quad , \quad g_2 = \frac{\partial J\left(K\right)}{\partial k_2} \quad , \quad g_3 = \frac{\partial J\left(K\right)}{\partial k_3} \\
&G_{11} = \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_1^2} \quad , \quad G_{12} = \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_1 \partial k_2} \quad , \quad G_{13} = \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_1 \partial k_3} \\
&G_{21} = \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_2 \partial k_1} \quad , \quad G_{22} = \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_2^2} \quad , \quad G_{23} = \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_2 \partial k_3} \\
&G_{31} = \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_3 \partial k_1} \quad , \quad G_{32} = \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_3 \partial k_2} \quad , \quad G_{33} = \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_3^2}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

式(10)を ΔK で微分し、式(11)を用いると次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J\left(K+\Delta K\right)}{\partial\left(\Delta k_1\right)} &= \frac{\partial J\left(K\right)}{\partial k_1} + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_1^2}\Delta k_1 + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_1 \partial k_2}\Delta k_2 + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_1 \partial k_3}\Delta k_3 \\
&= g_1 + G_{11}\Delta k_1 + G_{12}\Delta k_2 + G_{13}\Delta k_3 \\
\frac{\partial J\left(K+\Delta K\right)}{\partial\left(\Delta k_2\right)} &= \frac{\partial J\left(K\right)}{\partial k_2} + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_2 \partial k_1}\Delta k_1 + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_2^2}\Delta k_2 + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_2 \partial k_3}\Delta k_3 \\
&= g_2 + G_{21}\Delta k_1 + G_{22}\Delta k_2 + G_{23}\Delta k_3 \\
\frac{\partial J\left(K+\Delta K\right)}{\partial\left(\Delta k_3\right)} &= \frac{\partial J\left(K\right)}{\partial k_3} + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_3 \partial k_1}\Delta k_1 + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_3 \partial k_2}\Delta k_2 + \frac{\partial^2 J\left(K\right)}{\partial k_3^2}\Delta k_3 \\
&= g_3 + G_{31}\Delta k_1 + G_{32}\Delta k_2 + G_{33}\Delta k_3
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ここで、式(1)より計算流出高 q_m に関する一次微係数ベクトル $U_m(K)$ 及び二次微係数行列 $W_m(K)$ は次式で定義される。

$$
U_m\left(K\right) = \begin{bmatrix} u_{1m} \\ u_{2m} \\ u_{3m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial q_m / \partial k_1 \\ \partial q_m / \partial k_2 \\ \partial q_m / \partial k_3 \end{bmatrix}
$$

$$W_m(K)=\begin{bmatrix} w_{11m} & w_{12m} & w_{13m} \\ w_{21m} & w_{22m} & w_{23m} \\ w_{31m} & w_{32m} & w_{33m} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \partial^2 q_m/\partial k_1^2 & \partial^2 q_m/\partial k_1\partial k_2 & \partial^2 q_m/\partial k_1\partial k_3 \\ \partial^2 q_m/\partial k_2\partial k_1 & \partial^2 q_m/\partial k_2^2 & \partial^2 q_m/\partial k_2\partial k_3 \\ \partial^2 q_m/\partial k_3\partial k_1 & \partial^2 q_m/\partial k_3\partial k_2 & \partial^2 q_m/\partial k_3^2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$W_m(K)$ は二次微係数からなるヘシアン行列で、対称行列である。
式(13)を用いれば、目的関数の一次微係数 $g_1 \sim g_3$ 及び二次微係数 $G_{11} \sim G_{33}$ は、次式で算定される。

$$\begin{cases} g_1=-\dfrac{2}{N}\sum\limits_{m=1}^{N}\left(q_m^*-q_m\right)\dfrac{\partial q_m}{\partial k_1}=-\dfrac{2}{N}\sum\limits_{m=1}^{N}\left(q_m^*-q_m\right)u_{1m} \\ g_2=-\dfrac{2}{N}\sum\limits_{m=1}^{N}\left(q_m^*-q_m\right)\dfrac{\partial q_m}{\partial k_2}=-\dfrac{2}{N}\sum\limits_{m=1}^{N}\left(q_m^*-q_m\right)u_{2m} \\ g_3=-\dfrac{2}{N}\sum\limits_{m=1}^{N}\left(q_m^*-q_m\right)\dfrac{\partial q_m}{\partial k_3}=-\dfrac{2}{N}\sum\limits_{m=1}^{N}\left(q_m^*-q_m\right)u_{3m} \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} G_{11}&=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_1^2}-\left(\frac{\partial q_m}{\partial k_1}\right)^2\right\} \\ &=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)w_{11m}-u_{1m}^2\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{12}&=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_1\partial k_2}-\left(\frac{\partial q_m}{\partial k_1}\right)\left(\frac{\partial q_m}{\partial k_2}\right)\right\} \\ &=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)w_{12m}-u_{1m}u_{2m}\right\} \\ G_{13}&=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_1\partial k_3}-\left(\frac{\partial q_m}{\partial k_1}\right)\left(\frac{\partial q_m}{\partial k_3}\right)\right\} \\ &=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)w_{13m}-u_{1m}u_{3m}\right\} \\ G_{21}&=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_2\partial k_1}-\frac{\partial q_m}{\partial k_2}\frac{\partial q_m}{\partial k_1}\right\} \\ &=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)w_{21m}-u_{2m}u_{1m}\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} G_{22}&=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_2^2}-\left(\frac{\partial q_m}{\partial k_2}\right)^2\right\} \\ &=-\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^*-q_m\right)w_{22m}-u_{2m}^2\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

$$G_{23} = -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^* - q_m\right)\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_2 \partial k_3} - \left(\frac{\partial q_m}{\partial k_2}\right)\left(\frac{\partial q_m}{\partial k_3}\right)\right\}$$
$$= -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^* - q_m\right)w_{23m} - u_{2m}u_{3m}\right\}$$
$$G_{31} = -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^* - q_m\right)\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_3 \partial k_1} - \frac{\partial q_m}{\partial k_3}\frac{\partial q_m}{\partial k_1}\right\}$$
$$= -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^* - q_m\right)w_{31m} - u_{3m}u_{1m}\right\}$$
$$G_{32} = -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^* - q_m\right)\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_3 \partial k_2} - \left(\frac{\partial q_m}{\partial k_3}\right)\left(\frac{\partial q_m}{\partial k_2}\right)\right\} \tag{17}$$
$$= -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^* - q_m\right)w_{32m} - u_{3m}u_{2m}\right\}$$
$$G_{33} = -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^* - q_m\right)\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_3^2} - \left(\frac{\partial q_m}{\partial k_3}\right)^2\right\}$$
$$= -\frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\left\{\left(q_m^* - q_m\right)w_{33m} - u_{3m}^2\right\}$$

ここで、ヘシアン行列の性質により、$G_{12} = G_{21}$, $G_{13} = G_{31}$, $G_{23} = G_{32}$ となることに注意する。
式(12)を行列表示すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{18}$$

したがって、モデル定数補正項ベクトル ΔK は次式で計算される。

$$\begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

以上、述べた最適化手法には一次微係数 $\partial q_m / \partial k_i$ と二次微係数 $\partial^2 q_m / \partial k_i \partial k_j$ が必要となる。そのため、微係数 $\partial q_m / \partial k_i$ と $\partial^2 q_m / \partial k_i \partial k_j$ をいかに効率よく算定するかが最適化手法の鍵となる。

(4) モデル定数の規準化

同定すべきモデル定数の個数が多くなるにつれて、最適化計算過程も複雑となることは容易に想像できる。モデル定数が相互に関連し合っている場合、探索回数が多くなることもよく知られている。最適化のもう一つの問題点は、モデル定数のオーダーの違いである。例えば、菅原のタンクモデルにおいては、モデル定数間で1～10^{-5} のオーダーの開きがある。モデル定数のオーダーが極端に異なると、

応答面が偏平化し、真値に近づかなかったりするような困難が指摘されている。この問題点を克服する手段として、モデル定数をそれぞれある初期値で規準化する方法が考えられている。

今、同定すべきモデル定数 k_i をとし、その初期値を k_{0i} とすれば、規準化モデル定数 z_i は次式で与えられる。

$$z_i = \frac{k_i}{k_{0i}} \tag{20}$$

この変数変換による誤差項 e_m の z_i に関する微係数は次式で算定される。

$$\frac{\partial e_m}{\partial z_i} = \frac{\partial e_m}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial z_i} = k_{0i}\frac{\partial e_m}{\partial k_i} = -k_{0i}\frac{\partial q_m}{\partial k_i} \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 e_m}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j}\left(k_{0i}\frac{\partial e_m}{\partial k_i}\right) = k_{0i}\frac{\partial^2 e_m}{\partial k_i \partial k_j}\frac{\partial k_j}{\partial z_j} = -k_{0i}k_{0j}\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_i \partial k_j} \tag{22}$$

目的関数 J の z_i に関する微係数は次式で算定される。

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = \frac{\partial J}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial z_i} = k_{0i}\frac{\partial J}{\partial k_i} \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j}\left(k_{0i}\frac{\partial J}{\partial k_i}\right) = k_{0i}\frac{\partial^2 J}{\partial k_i \partial k_j}\frac{\partial k_j}{\partial z_j} = k_{0i}k_{0j}\frac{\partial^2 J}{\partial k_i \partial k_j} \tag{24}$$

３．有効雨量を用いた貯留関数法（一般化貯留関数モデル）[2), 5), 6), 7), 8), 9)]

実際の洪水解析にあたって、実務者はしばしば次に示すような課題に直面する場合が多い。すなわち、一洪水に適合が良かったモデル定数を他の洪水に適用すると、適合度が良くないという例が起こる。この課題は流出に関わるどの因子が計算精度にどのように影響を及ぼすかを定量的に評価できないことに起因していると考えられる。

洪水流出解析に長年に亘って多用されてきた木村の貯留関数法は、そのモデル定数の意味を物理的に評価しようとすれば、種々の問題に直面する。1 点目は、モデル定数値と流出特性を規定する斜面長、勾配、粗度などの流域特性値ないしは降雨特性値との関係が明確でないことがあげられる。とくに、流量資料の入手できない流域を対象として、集中定数系流出モデルを用いようとするとき、上述の集中定数系モデルのもつ欠点は致命的と言わざるを得ない。2 点目は、洪水流出解析における降雨波形の取扱いである。すなわち、雨量強度によりモデル定数が変化することはしばしば経験することであり、中小規模程度の流量資料に基づいて同定されたモデル定数を計画降雨波形のように、きわめて雨量強度の大きい降雨にまで適用することは困難である。

一般化貯留関数モデルは、モデル定数の物理的意味が明確な分布定数系の流出モデルである Kinematic Wave 法（しばしば等価粗度法とも呼ばれる）を集中定数系の流出モデルに集中化した貯留関数法であり、そのモデル定数は流域特性値と降雨特性値で定量的に関係づけられている[5)]。

以下に基礎式を示す。

$$\begin{cases} s = k_{11} q^{p_1} + k_{12} \dfrac{d}{dt}\left(q^{p_2}\right) \\ \dfrac{ds}{dt} = r - q \end{cases} \tag{25}$$

ここで、s ：貯留高[mm]、r ：有効雨量[mm/h]、q ：直接流出高[mm/h]、k_{11}, k_{12}, p_1, p_2 ：モデル定数

モデル定数k_{11}, k_{12}, p_1及びp_2は、表面流にマニング則を想定して、Kinematic Wave 法を集中定数系に変換することによって、次式で表わされる関数形もしくは固定値で与えられる[5)]。

$$\begin{aligned} k_{11} &= 2.8235 f_c A^{0.24} & p_1 &= 0.6 \\ k_{12} &= 0.2835 k_{11}^2 \left(\bar{r}\right)^{-0.2648} & p_2 &= 0.4648 \\ & & f_c &= \left(n/\sqrt{i}\right)^{0.6} \end{aligned} \tag{26}$$

ここで、A ：流域面積[km^2]、$\bar{r}$ ：平均有効雨量強度[mm/h]、n ：等価粗度[s/m$^{1/3}$]、i ：平均斜面勾配、f_c ：フリクション・ファクター

3.1 モデル定数k_{11}とk_{12}による二次元同時探索[4)]

式(26)に表わされるモデル定数の関数関係を無視し、モデル定数k_{11}, k_{12}の二次元同時探索による最適化を行う。

（1） 数値解法[6)]

式(25)を解くために、次式の変数変換を行う。

$$x_1 = q^{p_2} \quad , \quad x_2 = \frac{d}{dt}\left(q^{p_2}\right) \tag{27}$$

式(25)の貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_2\right) = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2\left(x_1, x_2, k_{11}, k_{12}\right) = -\dfrac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2} - \dfrac{k_{11}}{k_{12}} \dfrac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} x_2 + \dfrac{r}{k_{12}} \end{cases} \tag{28}$$

式(28)を線形近似した結果は、次式で表される。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + D \tag{30}$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$
\begin{cases}
a_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-2}x_2 - \dfrac{1}{k_{12}}\dfrac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1} \\
a_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1} \\
d = \dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-1}x_2 + \dfrac{1}{k_{12}}\left(\dfrac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2} + \dfrac{r}{k_{12}}
\end{cases} \tag{32}
$$

m を任意のタイムステップとして、式(29)及び式(30)を離散表示すると、次式となる。

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}_m \tag{33}
$$

$$
X_{m+1} = \Phi X_m + \Gamma D_m \tag{34}
$$

ここで、ϕ_1～ϕ_4 および γ_1～γ_4 の係数は、次式で計算される。

$$
\begin{cases}
\phi_1 = 1 + \dfrac{1}{2}a_1T^2 + \dfrac{1}{6}a_1a_2T^3 + \dfrac{1}{24}a_1a_3T^4 \\
\phi_2 = T\left(1 + \dfrac{1}{2}a_2T + \dfrac{1}{6}a_3T^2 + \dfrac{1}{24}a_2a_4T^3\right) \\
\phi_3 = a_1\left(1 + \dfrac{1}{2}a_1T^2 + \dfrac{1}{6}a_1a_2T^3 + \dfrac{1}{24}a_1a_3T^4\right) \\
\phi_4 = 1 + a_2T + \dfrac{1}{2}a_3T^2 + \dfrac{1}{6}a_2a_4T^3 + \dfrac{1}{24}\left(a_1a_3 + a_2^2a_4\right)T^4
\end{cases} \tag{35}
$$

$$
\begin{cases}
\gamma_1 = T\left(1 + \dfrac{1}{6}a_1T^2 + \dfrac{1}{24}a_1a_2T^3\right) \\
\gamma_2 = T^2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}a_2T + \dfrac{1}{24}a_3T^2\right) \\
\gamma_3 = a_1T^2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}a_2T + \dfrac{1}{24}a_3T^2\right) \\
\gamma_4 = T\left(1 + \dfrac{1}{2}a_2T + \dfrac{1}{6}a_3T^2 + \dfrac{1}{24}a_2a_4T^3\right)
\end{cases} \tag{36}
$$

$$
a_3 = a_1 + a_2^2 \qquad , \qquad a_4 = a_1 + a_3 \tag{37}
$$

ここで、$T(\leq 1)$ ：計算時間間隔

式(33)を要素展開すると、次式で表わされる。

$$
\begin{aligned}
(x_1)_{m+1} &= \phi_1(x_1)_m + \phi_2(x_2)_m + \gamma_2(d)_m \\
(x_2)_{m+1} &= \phi_3(x_1)_m + \phi_4(x_2)_m + \gamma_4(d)_m
\end{aligned} \tag{38}
$$

式(38)の漸化式により算定される変数 x_1 を式(27)に代入すると、任意の離散時刻 m における流出高 q

が解析的に算定されたことになる。

（２） 一次微係数の算定

式(27)より、 $q = x_1^{1/p_2}$ をモデル定数 k_{11} と k_{12} について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial k_{11}} = \dfrac{\partial q}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial k_{11}} = \dfrac{1}{p_2} x_1^{1/p_2 - 1} \dfrac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \\ \dfrac{\partial q}{\partial k_{12}} = \dfrac{\partial q}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial k_{12}} = \dfrac{1}{p_2} x_1^{1/p_2 - 1} \dfrac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \end{cases} \tag{39}$$

式(39)中の変数 x_1 のモデル定数 k_{11} と k_{12} に関する一次微係数、 $\partial x_1/\partial k_{11}$ と $\partial x_1/\partial k_{12}$ を算定するため、モデル定数 k_{11} と k_{12} が時間的に変化しないと仮定して、式(28)をモデル定数 k_{11} と k_{12} に関して微分すれば、一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial k_{11}}\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\right) = \dfrac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\ \dfrac{\partial}{\partial k_{12}}\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\right) = \dfrac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\ \dfrac{\partial}{\partial k_{11}}\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial k_{11}}\right) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \dfrac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \\ \dfrac{\partial}{\partial k_{12}}\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial k_{12}}\right) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \dfrac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \end{cases} \tag{40}$$

式(40)において、次の変数変換を行なう。

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \hdashline U_2 \end{bmatrix} \quad , \quad U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial k_{11} \\ \partial x_1/\partial k_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad U_2 = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_2/\partial k_{11} \\ \partial x_2/\partial k_{12} \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{bmatrix} \quad , \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_2/\partial k_{11} \\ \partial f_2/\partial k_{12} \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\dfrac{1}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} x_2 \\ b_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \dfrac{k_{11}}{k_{12}^2}\dfrac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} x_2 + \dfrac{1}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} - \dfrac{r}{k_{12}^2} \end{cases} \tag{43}$$

式(32)及び式(41)を用い、式(40)を整理すると次式が得られる。

$$
\begin{cases}
\dfrac{du_1}{dt} = u_3 \\
\dfrac{du_2}{dt} = u_4 \\
\dfrac{du_3}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_3 + b_1 \\
\dfrac{du_4}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_4 + b_2
\end{cases}
\tag{44}
$$

式(44)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \hline u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \hline u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}
\tag{45}
$$

ここで、次式を定義する。

$$
A_1 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_1 I & a_2 I \end{array}\right]
\tag{46}
$$

ここで I は (2×2) の単位行列である。
式(41)及び式(46)を用い、式(44)を整理すると、次式で表わされる。

$$
\frac{dU}{dt} = A_1 U + B
\tag{47}
$$

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} U_1 \\ \hline U_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_1 I & a_2 I \end{array}\right] \begin{bmatrix} U_1 \\ \hline U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix}
\tag{48}
$$

m を任意のタイムステップとして、式(48)を離散表示すると、次式となる。

$$
\begin{bmatrix} U_1 \\ \hline U_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \left[\begin{array}{c|c} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \hline \phi_3 I & \phi_4 I \end{array}\right] \begin{bmatrix} U_1 \\ \hline U_2 \end{bmatrix}_m + \left[\begin{array}{c|c} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \hline \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{array}\right] \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix}_m
\tag{49}
$$

式(49)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\left(U_1\right)_{m+1} &= \phi_1 \left(U_1\right)_m + \phi_2 \left(U_2\right)_m + \gamma_2 \left(B_2\right)_m \\
\left(U_2\right)_{m+1} &= \phi_3 \left(U_1\right)_m + \phi_4 \left(U_2\right)_m + \gamma_4 \left(B_2\right)_m
\end{aligned}
\tag{50}
$$

ϕ_1～ϕ_4 および γ_1～γ_4 の係数は式(35)及び式(36)で用いた係数と同じである。

式(50)の漸化式により計算される変数 u_1 及び u_2 を式(39)に代入すると、任意の離散時刻 m における流出高 q のモデル定数 k_{11} と k_{12} に関する一次微係数が解析的に算定されたことになる。

（３） 二次微係数の算定

式(39)をモデル定数k_{11}とk_{12}について微分すると、次式が得られる。

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}^2} &= \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\right)^2 + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}^2} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}\partial k_{12}} &= \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\right) + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}\partial k_{12}} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}\partial k_{11}} &= \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\right) + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}\partial k_{11}} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}^2} &= \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\right)^2 + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}^2}
\end{aligned}\right. \tag{51}$$

式(51)中の変数x_1のモデル定数k_{11}とk_{12}に関する二次微係数$\partial^2 x_1/\partial k_{11}^2$,$\partial^2 x_1/\partial k_{11}\partial k_{12}$,$\partial^2 x_1/\partial k_{12}\partial k_{11}$及び$\partial^2 x_1/\partial k_{12}^2$を算定するため、モデル定数$k_{11}$と$k_{12}$が時間的に変化しないと仮定して、式(40)をモデル定数k_{11}とk_{12}に関して微分すれば、二次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dw_1}{dt} = w_5 \quad , \quad \frac{dw_2}{dt} = w_6 \\
&\frac{dw_3}{dt} = w_7 \quad , \quad \frac{dw_4}{dt} = w_8 \\
&\frac{dw_5}{dt} = a_1 w_1 + a_2 w_5 + v_{11} \quad , \quad \frac{dw_6}{dt} = a_1 w_2 + a_2 w_6 + v_{12} \\
&\frac{dw_7}{dt} = a_1 w_3 + a_2 w_7 + v_{21} \quad , \quad \frac{dw_8}{dt} = a_1 w_4 + a_2 w_8 + v_{22}
\end{aligned}\right. \tag{52}$$

ここで、

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ \hdashline W_2 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial k_{11} & \partial u_1/\partial k_{12} \\ \partial u_2/\partial k_{11} & \partial u_2/\partial k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 x_1/\partial k_{11}^2 & \partial^2 x_1/\partial k_{11}\partial k_{12} \\ \partial^2 x_1/\partial k_{12}\partial k_{11} & \partial^2 x_1/\partial k_{12}^2 \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_3/\partial k_{11} & \partial u_3/\partial k_{12} \\ \partial u_4/\partial k_{11} & \partial u_4/\partial k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 x_2/\partial k_{11}^2 & \partial^2 x_2/\partial k_{11}\partial k_{12} \\ \partial^2 x_2/\partial k_{12}\partial k_{11} & \partial^2 x_2/\partial k_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \hdashline V_2 \end{bmatrix} \quad , \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V_2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$
\begin{aligned}
v_{11} &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_1}{\partial k_{11}} \\
v_{12} &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} \\
v_{21} &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_2}{\partial k_{11}} \\
v_{22} &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \\
&\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_2}{\partial k_{12}}
\end{aligned}
\tag{55}
$$

式(53)及び式(54)を用い、式(52)を整理すると、次式が得られる。

$$
\frac{dW}{dt} = A_1 W + V \tag{56}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} W_1 \\ \hdashline W_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I \\ \hdashline a_1 I & a_2 I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} W_1 \\ \hdashline W_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} V_1 \\ \hdashline V_2 \end{array}\right] \tag{57}
$$

ここで、行列 A_1 は式(46)と同じである。
式(41)より、新しい行列とベクトルを次式で定義する。

$$
U_* = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{bmatrix} \tag{58}
$$

式(58)を用い、式(55)を行列表示すると次式が得られる。

$$
V_2 = U_* \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \frac{\partial B_2}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial B_2}{\partial K} \tag{59}
$$

式(59)の微係数行列 $\partial A/\partial X$, $\partial A/\partial K$, $\partial B_2/\partial X$ 及び $\partial B_2/\partial K$ は、以下の行列で表される。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial A}{\partial X}=\begin{bmatrix}\partial a_1/\partial x_1 & \partial a_1/\partial x_2\\ \partial a_2/\partial x_1 & \partial a_2/\partial x_2\end{bmatrix}\\
\dfrac{\partial A}{\partial K}=\begin{bmatrix}\partial a_1/\partial k_{11} & \partial a_1/\partial k_{12}\\ \partial a_2/\partial k_{11} & \partial a_2/\partial k_{12}\end{bmatrix}\\
\dfrac{\partial B_2}{\partial X}=\left(\dfrac{\partial A}{\partial K}\right)^T=\begin{bmatrix}\partial b_1/\partial x_1 & \partial b_1/\partial x_2\\ \partial b_2/\partial x_1 & \partial b_2/\partial x_2\end{bmatrix}\\
\dfrac{\partial B_2}{\partial K}=\begin{bmatrix}\partial b_1/\partial k_{11} & \partial b_1/\partial k_{12}\\ \partial b_2/\partial k_{11} & \partial b_2/\partial k_{12}\end{bmatrix}
\end{cases}
\tag{60}
$$

式(32)より、微係数行列$\partial A/\partial X$の各要素は、次式で表わされる。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1}=-\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)\left(\dfrac{p_1}{p_2}-2\right)x_1^{p_1/p_2-3}x_2-\dfrac{1}{k_{12}}\dfrac{1}{p_2}\left(\dfrac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\\
\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2}=\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}=-\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-2}\quad,\quad \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2}=0
\end{cases}
\tag{61}
$$

式(32)より、微係数行列$\partial A/\partial K$の各要素は、次式で表わされる。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial a_1}{\partial k_{11}}=-\dfrac{1}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-2}x_2\\
\dfrac{\partial a_1}{\partial k_{12}}=\dfrac{1}{k_{12}^2}\dfrac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}+\dfrac{k_{11}}{k_{12}^2}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-2}x_2\\
\dfrac{\partial a_2}{\partial k_{11}}=-\dfrac{1}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}\quad,\quad \dfrac{\partial a_2}{\partial k_{12}}=\dfrac{k_{11}}{k_{12}^2}\dfrac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}
\end{cases}
\tag{62}
$$

式(41)より、微係数行列$\partial B_2/\partial K$の各要素は、次式で表わされる。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial b_1}{\partial k_{11}}=0\quad,\quad \dfrac{\partial b_1}{\partial k_{12}}=\dfrac{\partial b_2}{\partial k_{11}}=\dfrac{1}{k_{12}^2}\dfrac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}x_2\\
\dfrac{\partial b_2}{\partial k_{12}}=-2\dfrac{k_{11}}{k_{12}^3}\dfrac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}x_2-\dfrac{2}{k_{12}^3}x_1^{1/p_2}+\dfrac{2}{k_{12}^3}r
\end{cases}
\tag{63}
$$

mを任意のタイムステップとして、式(57)を離散表示すると、次式となる。

$$
\begin{bmatrix}W_1\\ \hdashline W_2\end{bmatrix}_{m+1}=\left[\begin{array}{c:c}\phi_1 I & \phi_2 I\\ \hdashline \phi_3 I & \phi_4 I\end{array}\right]\begin{bmatrix}W_1\\ \hdashline W_2\end{bmatrix}_m+\left[\begin{array}{c:c}\gamma_1 I & \gamma_2 I\\ \hdashline \gamma_3 I & \gamma_4 I\end{array}\right]\begin{bmatrix}V_1\\ \hdashline V_2\end{bmatrix}_m
\tag{64}
$$

式(64)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\left(W_1\right)_{m+1}&=\phi_1\left(W_1\right)_m+\phi_2\left(W_2\right)_m+\gamma_2\left(V_2\right)_m\\
\left(W_2\right)_{m+1}&=\phi_3\left(W_1\right)_m+\phi_4\left(W_2\right)_m+\gamma_4\left(V_2\right)_m
\end{aligned}
\tag{65}
$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は式(35)及び式(36)で用いた係数と同じである。

式(50)の漸化式により計算される変数 u_1 及び u_2 と、式(65)の漸化式により算定される変数 w_1, w_2, w_3 及び w_4 を式(51)に代入すると、任意の離散時刻 m における流出高 q のモデル定数 k_{11} と k_{12} に関する二次微係数が解析的に算定されたことになる。

なお、行列 W_1 と W_2 のヘシアン行列は対称行列となることから、式(65)における要素のうち、$w_2 = w_3$ 及び $w_6 = w_7$ になることに注意すべきである。

以上、一般化貯留関数モデルにおける定数 k_{11} と k_{12} に関する一次及び二次微係数が算出されたので、(i)**一階ニュートン法**、(ii)**ダビドン法**を用いた 2 種類の最適化手法が実行可能となる。

3.2 フリクション・ファクター f_c による一次元探索

式(26)において、f_c の値が同定されれば、モデル定数 k_{11} と k_{12} は一義的に決定されることになる。したがって、f_c の一次元探索を行う方法を開発する。

式(26)において、次式を定義する。

$$\begin{cases} \alpha = 2.8235 A^{0.24} \\ \beta = 0.2835 \alpha^2 \left(\overline{r}\right)^{-0.2648} \end{cases} \tag{66}$$

式(66)を用いると、式(26)のモデル定数 k_{11} と k_{12} は次式で表わされる。

$$\begin{cases} k_{11} = \alpha f_c \\ k_{12} = \beta f_c^2 \end{cases} \tag{67}$$

（1） 数値解法

数値解法については、「**3.1 モデル定数 k_{11} と k_{12} による二次元同時探索**」を参照していただきたい。

（2） 一次微係数の算定

式(27)より、$q = x_1^{1/p_2}$ をファクター f_c について微分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial q}{\partial f_c} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2 - 1} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} \tag{68}$$

式(68)中の変数 x_1 のファクター f_c に関する一次微係数 $\partial x_1 / \partial f_c$ を算定するために、ファクター f_c が時間的に変化しないと仮定して、式(28)をファクター f_c に関して微分すれば、一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial f_c}\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial f_c}\right) = \dfrac{\partial x_2}{\partial f_c} \\ \dfrac{\partial}{\partial f_c}\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial f_c}\right) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial f_c} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial f_c} + \dfrac{\partial f_2}{\partial k_{11}}\dfrac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \dfrac{\partial f_2}{\partial k_{12}}\dfrac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \end{cases} \tag{69}$$

式(69)において、次の変数変換を行なう。

$$U=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial x_1/\partial f_c\\\partial x_2/\partial f_c\end{bmatrix}\quad,\qquad B=\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}\tag{70}$$

$$b=\frac{\partial f_2}{\partial k_{11}}\frac{\partial k_{11}}{\partial f_c}+\frac{\partial f_2}{\partial k_{12}}\frac{\partial k_{12}}{\partial f_c}=b_1\frac{\partial k_{11}}{\partial f_c}+b_2\frac{\partial k_{12}}{\partial f_c}\tag{71}$$

ここで、式(71)中の微係数$b_1=\partial f_2/\partial k_{11}$及び$b_2=\partial f_2/\partial k_{12}$は式(41)において、既に算定されている。また、微係数$\partial k_{11}/\partial f_c$及び$\partial k_{12}/\partial f_c$は式(67)より次式で得られる。

$$\frac{\partial k_{11}}{\partial f_c}=\alpha\quad,\quad\frac{\partial k_{12}}{\partial f_c}=2\beta f_c\tag{72}$$

式(31)及び式(70)を用い、式(69)を整理すると次式が得られる。

$$\begin{cases}\dfrac{du_1}{dt}=u_2\\[2ex]\dfrac{du_2}{dt}=a_1u_1+a_2u_2+b\end{cases}\tag{73}$$

式(73)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\a_1&a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}\tag{74}$$

式(31)及び式(70)を用い、式(74)を整理すると、次式で表わされる。

$$\frac{dU}{dt}=AU+B\tag{75}$$

mを任意のタイムステップとして、式(74)を離散表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}_{m+1}=\begin{bmatrix}\phi_1&\phi_2\\\phi_3&\phi_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}_m+\begin{bmatrix}\gamma_1&\gamma_2\\\gamma_3&\gamma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}_m\tag{76}$$

式(76)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned}(u_1)_{m+1}&=\phi_1(u_1)_m+\phi_2(u_2)_m+\gamma_2(b)_m\\(u_2)_{m+1}&=\phi_3(u_1)_m+\phi_4(u_2)_m+\gamma_4(b)_m\end{aligned}\tag{77}$$

ϕ_1～ϕ_4およびγ_1～γ_4の係数は式(35)及び式(36)で用いた係数と同じである。

式(77)の漸化式により算定される変数u_1を式(68)に代入すると、任意の離散時刻mにおける流出高qのファクターf_cに関する一次微係数が解析的に算定されたことになる。

（３） 二次微係数の算定

式(68)をファクターf_cについて微分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 q}{\partial f_c^2} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial f_c}\right)^2 + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2}\frac{\partial^2 x_1}{\partial f_c^2} \tag{78}$$

式(78)中の変数 x_1 のファクター f_c に関する二次微係数、 $w_1 = \partial^2 x_1 / \partial f_c^2$ を算定するため、ファクター f_c が時間的に変化しないと仮定して、式(73)をファクター f_c に関して微分すれば、二次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{dw_1}{dt} = w_2 \\ \dfrac{dw_2}{dt} = a_1 w_1 + a_2 w_2 + v \end{cases} \tag{79}$$

ここで、

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial f_c \\ \partial u_2/\partial f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 x_1/\partial f_c^2 \\ \partial^2 x_2/\partial f_c^2 \end{bmatrix} \quad , \qquad V = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \tag{80}$$

$$\begin{aligned} v = &\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_c} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_c} + \frac{\partial a_1}{\partial f_c}\right)\frac{\partial x_1}{\partial f_c} \\ &+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_c} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_c} + \frac{\partial a_2}{\partial f_c}\right)\frac{\partial x_2}{\partial f_c} + \frac{\partial b}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_c} + \frac{\partial b}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_c} + \frac{\partial b}{\partial f_c} \end{aligned} \tag{81}$$

式(31)及び式(80)を用い、式(79)を行列表示すると、次式で表される。

$$\frac{dW}{dt} = AW + V \tag{82}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \tag{83}$$

式(80)の v を、行列を用いて表わすと、次式が得られる。

$$v = U^T\left(\frac{\partial A}{\partial X}U + \frac{\partial A}{\partial f_c}\right) + \frac{\partial b}{\partial X}U + \frac{\partial b}{\partial f_c} \tag{84}$$

ここで、微係数 $\partial A/\partial X$ は式(61)において既に算定されている。また、微係数行列 $\partial A/\partial f_c$ 、 $\partial b/\partial X$ 及び微係数 $\partial b/\partial f_c$ は次式で計算される。

$$\frac{\partial b}{\partial X} = \left(\frac{\partial A}{\partial f_c}\right)^T = \begin{bmatrix} \partial a_1/\partial f_c \\ \partial a_2/\partial f_c \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial f_c} = \dfrac{\partial b}{\partial x_1} = \dfrac{\partial a_1}{\partial k_{11}}\dfrac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \dfrac{\partial a_1}{\partial k_{12}}\dfrac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial f_c} = \dfrac{\partial b}{\partial x_2} = \dfrac{\partial a_2}{\partial k_{11}}\dfrac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \dfrac{\partial a_2}{\partial k_{12}}\dfrac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \end{cases} \tag{86}$$

式(86)を行列式で表わすと、次式となる。

$$\frac{\partial A}{\partial f_c}=\begin{bmatrix}\partial a_1/\partial f_c\\ \partial a_2/\partial f_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial a_1/\partial k_{11} & \partial a_1/\partial k_{12}\\ \partial a_2/\partial k_{11} & \partial a_2/\partial k_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial k_{11}/\partial f_c\\ \partial k_{12}/\partial f_c\end{bmatrix} \tag{87}$$

微係数 $\partial b/\partial f_c$ は次式で計算される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial f_c}&=\left(\frac{\partial b_1}{\partial k_{11}}\frac{\partial k_{11}}{\partial f_c}+\frac{\partial b_1}{\partial k_{12}}\frac{\partial k_{12}}{\partial f_c}\right)\frac{\partial k_{11}}{\partial f_c}+b_1\frac{\partial^2 k_{11}}{\partial f_c^2}\\ &+\left(\frac{\partial b_2}{\partial k_{11}}\frac{\partial k_{11}}{\partial f_c}+\frac{\partial b_2}{\partial k_{12}}\frac{\partial k_{12}}{\partial f_c}\right)\frac{\partial k_{12}}{\partial f_c}+b_2\frac{\partial^2 k_{12}}{\partial f_c^2}\end{aligned} \tag{88}$$

式(88)を行列式で表わすと、次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial f_c}&=\begin{bmatrix}\partial k_{11}/\partial f_c & \partial k_{12}/\partial f_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial b_1/\partial k_{11} & \partial b_1/\partial k_{12}\\ \partial b_2/\partial k_{11} & \partial b_2/\partial k_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial k_{11}/\partial f_c\\ \partial k_{12}/\partial f_c\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix}b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial^2 k_{11}/\partial f_c^2\\ \partial^2 k_{12}/\partial f_c^2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{89}$$

式(86)及び式(88)に含まれる微係数も、式(62)及び式(63)において既に算定されている。
また、微係数 $\partial^2 k_{11}/\partial f_c^2$ 及び $\partial^2 k_{12}/\partial f_c^2$ は次式で得られる。

$$\frac{\partial^2 k_{11}}{\partial f_c^2}=0 \qquad , \qquad \frac{\partial^2 k_{12}}{\partial f_c^2}=2\beta \tag{90}$$

以上を踏まえれば、v は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}v&=[u_1 \quad u_2]\begin{bmatrix}\partial a_1/\partial x_1 & \partial a_1/\partial x_2\\ \partial a_2/\partial x_1 & \partial a_2/\partial x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}\\ &+[u_1 \quad u_2]\begin{bmatrix}\partial a_1/\partial k_{11} & \partial a_1/\partial k_{12}\\ \partial a_2/\partial k_{11} & \partial a_2/\partial k_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial k_{11}/\partial f_c\\ \partial k_{12}/\partial f_c\end{bmatrix}\\ &+[\partial k_{11}/\partial f_c \quad \partial k_{12}/\partial f_c]\begin{bmatrix}\partial b_1/\partial x_1 & \partial b_1/\partial x_2\\ \partial b_2/\partial x_1 & \partial b_2/\partial x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}\\ &+[\partial k_{11}/\partial f_c \quad \partial k_{12}/\partial f_c]\begin{bmatrix}\partial b_1/\partial k_{11} & \partial b_1/\partial k_{12}\\ \partial b_2/\partial k_{11} & \partial b_2/\partial k_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial k_{11}/\partial f_c\\ \partial k_{12}/\partial f_c\end{bmatrix}+[b_1 \quad b_2]\begin{bmatrix}\partial^2 k_{11}/\partial f_c^2\\ \partial^2 k_{12}/\partial f_c^2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{91}$$

m を任意のタイムステップとして、式(83)を離散表示すると、次式で表わされることがわかる。

$$\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}_{m+1}=\begin{bmatrix}\phi_1 & \phi_2\\ \phi_3 & \phi_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}_m+\begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_3 & \gamma_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ v\end{bmatrix}_m \tag{92}$$

式(92)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\left(w_1\right)_{m+1} &= \phi_1\left(w_1\right)_m + \phi_2\left(w_2\right)_m + \gamma_2\left(v\right)_m \\
\left(w_2\right)_{m+1} &= \phi_3\left(w_1\right)_m + \phi_4\left(w_2\right)_m + \gamma_4\left(v\right)_m
\end{aligned}
\tag{93}
$$

ϕ_1～ϕ_4 およびγ_1～γ_4 の係数は式(35)及び式(36)で用いた係数と同じである。

式(77)の漸化式により算定される変数u_1と、式(93)の漸化式により算定される変数w_1を式(78)に代入すると、任意の離散時刻mにおける流出高qのファクターf_cに関する二次微係数が解析的に算定されたことになる。

以上、一般化貯留関数モデルにおける流域平均粗度（フリクション・ファクターf_c）に関しての一次及び二次微係数が算出されたので、(i)**一階ニュートン法**、(ii)**ダビドン法**を用いた 2 種類の最適化手法が実行可能となる。

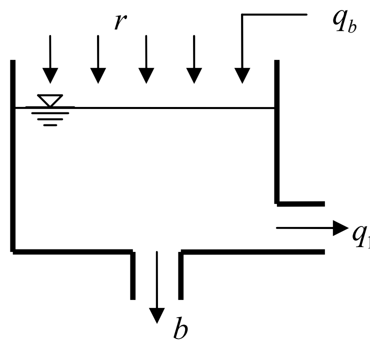
４．損失項を含む貯留関数法（1 段タンク型貯留関数モデル）[2), 9), 10), 11)]

一般化貯留関数モデルを用いて流出計算を行う場合、流出率と有効雨量を算定しなければならず、データの前処理に多くの時間を要する。すなわち、有効雨量の算出には直接流出成分と基底流出成分の分離が必要であり、その分離作業を自動的に行うことが困難な場合が多く、しかも主観的要素が入りやすい。さらに、流出率を洪水期間中、リアルタイムに求めることは非常に困難である。したがって、洪水逐次予測という観点からも、観測雨量と観測流量を直接取り込むことができる流出モデルがあれば、より実用性が高まると考えられる。

以上の現実問題を踏まえて、ここでは、貯留関数モデル自身に有効雨量を表現できるパラメータの導入を図る。有効雨量と損失雨量はコインの裏表の関係にあることから、降雨流出過程に含まれるすべての損失を 1 個のデル定数一個で代表させる。すなわち、損失機構を含む貯留関数法を開発し、実測雨量と実測流量を直接流出解析に用いる。

その結果、貯留関数モデル自身に損失項を含めることができるので、この損失パラメータの自動最適化が可能となる。また、従来の方法と異なり、流出成分分離過程における主観的判断が取り除かれる。以下に流出モデル概念図と基本方程式を示す。

$$
\begin{cases}
s = k_{11} q^{p_1} + k_{12} \dfrac{d}{dt}\left(q^{p_2}\right) \\
\dfrac{ds}{dt} = r - q - b + q_b \\
b = k_{13} q \\
q_b = q_0 e^{-\lambda t}
\end{cases}
\tag{94}
$$



ここで、s ：貯留高[mm]、r ：観測雨量[mm/h]、q ：観測流出高[mm/h]、b ：損失高[mm/h]、q_b ：基底流出高[mm/h]、q_0 ：初期流出高[mm/h]、k_{11}, k_{12} ：貯留係数、k_{13} ：損失係数、p_1, p_2 ：貯留指数、λ ：減衰係数

式(94)で示される損失項を含む貯留関数法の特徴を以下に要約して述べる。

(a) 式(94)に記述される貯留関数法は Kinematic wave 法を貯留関数法に理論的に集中化したモデル

を基本としている[5)]。

(b) 降雨流出過程における不確定なすべての損失（蒸発散・浸透・初期損失など）を損失項bでパラメタライズしている[10),11)]。

(c) 流域内の湿潤状態を考慮するため、基底流出高q_bを導入している。基底流出高q_bの導入は、解析期間内の総流出量Σqが総降雨量Σrを上回る際に計算不可能となることへの対応策でもあり、強制入力として与えることによって水収支のバランスが保たれている。なお、λはハイドログラフ減水部の標準逓減曲線から得られる流域に固有な値である。北海道内における650例の既往洪水資料を解析した結果、平均値として、$\lambda = 0.019$の値が得られている。

(d) モデル定数p_1とp_2の値は、表面流が卓越する比較的大きな出水を解析対象とする場合、マニング則を想定すると、$p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.4648$に近似できる[5)]。したがって、本報告においても上記の値に固定した。

(e) モデル定数k_{11}とk_{12}に関しても、既往研究成果[5)]に基づき、次の関係式が成立すると仮定している。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11} A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12} k_{11}^2 \left(\bar{r}\right)^{-0.2648} \\ k_{13} = c_{13} - 1 \end{cases} \tag{95}$$

ここで、A ：流域面積[km^2]、$\bar{r}$ ：平均雨量強度[mm/h]、c_{11}, c_{12}, c_{13} ：未知定数

モデル定数k_{11}は流域特性値に、k_{12}は流域、降雨特性値の双方に依存して変化するので、各定数の流出に及ぼす影響を独立に評価できないことになる。一方、係数c_{11}とc_{12}は流域・降雨特性に依存しないことが望ましく、互いに無相関であれば、それぞれの効果を独立に評価する事ができる。その結果、「損失項を含む貯留関数法」における未知定数は、c_{11}, c_{12}及びc_{13}の3個となり、その最適値を同定して、採用モデルの検証を行う。

（1） 数値解法[2),9)]

式(94)において、次式の変数変換を行う。

$$x_1 = q^{p_2} \quad , \quad x_2 = \frac{d}{dt}\left(q^{p_2}\right) \tag{96}$$

式(94)の貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_2\right) = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2\left(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}\right) = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}} \dfrac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} x_2 - \dfrac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \dfrac{1}{k_{12}}\left(r + q_b\right) \end{cases} \tag{97}$$

式(97)を線形近似した結果は、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \tag{98}$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + D \tag{99}$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} \tag{100}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-2}x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}}\frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1} \\ a_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1} \\ d &= \frac{k_{11}}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-1}x_2 + \frac{c_{13}}{k_{12}}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}}\left(r+q_b\right) \end{aligned} \tag{101}$$

m を任意のタイムステップとして、式(98)及び式(99)を離散表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}_m \tag{102}$$

$$X_{m+1} = \Phi X_m + \Gamma D_m \tag{103}$$

ここで、ϕ_1～ϕ_4 および γ_1～γ_4 の係数は式(35)及び式(36)と同様な方法で計算される。

式(102)を要素展開すると、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \left(x_1\right)_{m+1} &= \phi_1\left(x_1\right)_m + \phi_2\left(x_2\right)_m + \gamma_2\left(d\right)_m \\ \left(x_2\right)_{m+1} &= \phi_3\left(x_1\right)_m + \phi_4\left(x_2\right)_m + \gamma_4\left(d\right)_m \end{aligned} \tag{104}$$

式(104)の漸化式により計算される変数 x_1 を式(96)に代入すると、任意の離散時刻 m における計算流出高 q が解析的に算定されたことになる。

（２） 一次微係数の算定

式(96)より $q = x_1^{1/p_2}$ をモデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial c_{11}} &= \frac{\partial q}{\partial k_{11}}\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24}\frac{\partial q}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial q}{\partial c_{12}} &= \frac{\partial q}{\partial k_{12}}\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2\left(\overline{r}\right)^{-0.2648}\frac{\partial q}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial q}{\partial c_{13}} &= \frac{\partial q}{\partial c_{13}} \end{aligned} \tag{105}$$

式(106)中における流出高 q のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数 $\partial q/\partial k_{11}, \partial q/\partial k_{12}$ 及び $\partial q/\partial c_3$ は、$q = x_1^{1/p_2}$ をモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} について微分することにより、次式で得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial k_{11}} &= \frac{\partial q}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \\
\frac{\partial q}{\partial k_{12}} &= \frac{\partial q}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \\
\frac{\partial q}{\partial c_{13}} &= \frac{\partial q}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}
\end{aligned}
\tag{106}
$$

式(106)中の変数 x_1 にのモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数 $\partial x_1/\partial k_{11}, \partial x_1/\partial k_{12}$ 及び $\partial x_1/\partial c_{13}$ を算定するために、モデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} が時間的に変化しないと仮定して、式(97)をモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関して微分すれば、一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k_{11}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\
\frac{\partial}{\partial k_{12}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\
\frac{\partial}{\partial c_{13}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}\right) = \frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} \\
\frac{\partial}{\partial k_{11}}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}}\right) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \\
\frac{\partial}{\partial k_{12}}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}\right) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \\
\frac{\partial}{\partial c_{13}}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}\right) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}}
\end{aligned}
\tag{107}
$$

ここで、次の変数変換を行う。

$$
U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \hdashline U_2 \end{bmatrix} \quad , \quad U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial k_{11} \\ \partial x_1/\partial k_{12} \\ \partial x_1/\partial c_{13} \end{bmatrix} \quad , \quad U_2 = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_2/\partial k_{11} \\ \partial x_2/\partial k_{12} \\ \partial x_2/\partial c_{13} \end{bmatrix}
\tag{108}
$$

$$
B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{bmatrix} \quad , \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_2/\partial k_{11} \\ \partial f_2/\partial k_{12} \\ \partial f_2/\partial c_{13} \end{bmatrix}
\tag{109}
$$

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 \\
b_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2}\frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{c_{13}}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} - \frac{1}{k_{12}^2}\left(r + q_b\right)
\end{aligned}
\tag{110}
$$

$$b_3 = \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2}$$

式(101)及び式(108)を用いて、式(107)を整理すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_4 \quad , \quad \dfrac{du_1}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_4 + b_1 \\ \dfrac{du_2}{dt} = u_5 \quad , \quad \dfrac{du_5}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_5 + b_2 \\ \dfrac{du_3}{dt} = u_6 \quad , \quad \dfrac{du_6}{dt} = a_1 u_3 + a_2 u_6 + b_3 \end{cases} \tag{111}$$

式(111)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \hdashline u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \hdashline u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\right] \tag{112}$$

ここで、次式を定義する。

$$A_1 = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I \\ \hdashline a_1 I & a_2 I \end{array}\right] \tag{113}$$

ここで、I は (3×3) の単位行列である。
式(108)及び式(113)を用い、式(112)を整理すると、次式で表わされる。

$$\frac{dU}{dt} = A_1 U + B \tag{114}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hdashline U_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I \\ \hdashline a_1 I & a_2 I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hdashline U_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{array}\right] \tag{115}$$

m を任意のタイムステップとして、式(115)を離散表示すると、次式となる。

$$\left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hdashline U_2 \end{array}\right]_{m+1} = \left[\begin{array}{c:c} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \hdashline \phi_3 I & \phi_4 I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U_1 \\ \hdashline U_2 \end{array}\right]_m + \left[\begin{array}{c:c} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \hdashline \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{array}\right]_m \tag{116}$$

式(116)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\left(U_1\right)_{m+1} &= \phi_1\left(U_1\right)_m + \phi_2\left(U_2\right)_m + \gamma_2\left(B_2\right)_m \\
\left(U_2\right)_{m+1} &= \phi_3\left(U_1\right)_m + \phi_4\left(U_2\right)_m + \gamma_4\left(B_2\right)_m
\end{aligned}
\tag{117}
$$

ϕ_1〜ϕ_4 及び γ_1〜γ_4 の係数は式(102)中で用いた係数と同じである。

式(117)の漸化式により計算された変数 u_1, u_2 及び u_3 を式(106)に代入すると、任意の離散時刻 m における流出高 q のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数が解析的に算定されたことになる。

（３） 二次微係数の算定

式(105)をモデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} について微分すると、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{11}^2} &= \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}^2}\left(\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}}\right)^2 = A^{0.48}\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}^2} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{11}\partial c_{12}} &= \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}\partial k_{12}}\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}}\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = A^{0.24}k_{11}^2\left(\overline{r}\right)^{-0.2648}\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}\partial k_{12}} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{11}\partial c_{13}} &= \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}\partial c_{13}}\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24}\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}\partial c_{13}}
\end{aligned}
\tag{118}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{12}\partial c_{11}} &= \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}\partial k_{11}}\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}}\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24}k_{11}^2\left(\overline{r}\right)^{-0.2648}\frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}\partial k_{11}} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{12}^2} &= \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}^2}\left(\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}}\right)^2 = \left\{k_{11}^2\left(\overline{r}\right)^{-0.2648}\right\}^2\frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}^2} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{12}\partial c_{13}} &= \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}\partial c_{13}}\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2\left(\overline{r}\right)^{-0.2648}\frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}\partial c_{13}}
\end{aligned}
\tag{119}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial c_{11}} &= \frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial k_{11}}\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24}\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial k_{11}} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial c_{12}} &= \frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial k_{12}}\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2\left(\overline{r}\right)^{-0.2648}\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial k_{12}} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}^2} &= \frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}^2}
\end{aligned}
\tag{120}
$$

式(118)〜式(120)における流出高 q のパラメータ k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する二次微係数 $\partial^2 q/\partial k_{11}^2$ 〜 $\partial^2 q/\partial c_{13}^2$ は、式(106)をモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} について微分することにより、次式で得られる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}^2} &= \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\right)^2 + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}^2} \\
\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}\partial k_{12}} &= \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}\partial k_{12}}
\end{aligned}
\tag{121}
$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}\partial c_{13}}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}\partial k_{11}}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}^2} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\right)^2 + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}^2} \tag{122}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}\partial c_{13}}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}\partial k_{11}}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial k_{12}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}\partial k_{12}} \tag{123}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}^3} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}\right)^2 + \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}^2}$$

式(121),式(122)及び式(123)中の変数x_1のモデル定数k_{11}, k_{12}及びc_{13}に関する二次微係数$\partial^2 x_1 / \partial k_{11}^2$～$\partial^2 x_1 / \partial c_{13}^2$を算定するためには、モデル定数$k_{11}, k_{12}$及び$c_{13}$が時間的に変化しないと仮定して、式(107)をモデル定数k_{11}, k_{12}及びc_{13}に関して微分すれば、二次微係数に関する微分方程式が求められる。

$$\frac{dw_1}{dt} = w_{10} \quad , \quad \frac{dw_2}{dt} = w_{11} \quad , \quad \frac{dw_3}{dt} = w_{12}$$
$$\frac{dw_4}{dt} = w_{13} \quad , \quad \frac{dw_5}{dt} = w_{14} \quad , \quad \frac{dw_6}{dt} = w_{15}$$
$$\frac{dw_7}{dt} = w_{16} \quad , \quad \frac{dw_8}{dt} = w_{17} \quad , \quad \frac{dw_9}{dt} = w_{18}$$

$$\frac{dw_{10}}{dt} = a_1 w_1 + a_2 w_{10} + v_1 \quad , \frac{dw_{11}}{dt} = a_1 w_2 + a_2 w_{11} + v_2 \quad , \frac{dw_{12}}{dt} = a_1 w_3 + a_2 w_{12} + v_3$$
$$\frac{dw_{13}}{dt} = a_1 w_4 + a_2 w_{13} + v_4 \quad , \frac{dw_{14}}{dt} = a_1 w_5 + a_2 w_{14} + v_5 \quad , \frac{dw_{15}}{dt} = a_1 w_6 + a_2 w_{15} + v_6 \tag{124}$$

$$\frac{dw_{16}}{dt} = a_1 w_7 + a_2 w_{16} + v_7 \quad , \frac{dw_{17}}{dt} = a_1 w_8 + a_2 w_{17} + v_8 \quad , \frac{dw_{18}}{dt} = a_1 w_9 + a_2 w_{18} + v_9$$

ここで、

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ \hdashline W_2 \end{bmatrix}$$

$$
W_1 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial k_{11} & \partial u_1/\partial k_{12} & \partial u_1/\partial c_{13} \\ \partial u_2/\partial k_{11} & \partial u_2/\partial k_{12} & \partial u_2/\partial c_{13} \\ \partial u_3/\partial k_{11} & \partial u_3/\partial k_{12} & \partial u_3/\partial c_{13} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \partial^2 x_1/\partial k_{11}^2 & \partial^2 x_1/\partial k_{11}\partial k_{12} & \partial^2 x_1/\partial k_{11}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_1/\partial k_{12}\partial k_{11} & \partial^2 x_1/\partial k_{12}^2 & \partial^2 x_1/\partial k_{12}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_1/\partial c_{13}\partial k_{11} & \partial^2 x_1/\partial c_{13}\partial k_{12} & \partial^2 x_1/\partial c_{13}^2 \end{bmatrix} \tag{125}
$$

$$
W_2 = \begin{bmatrix} w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{16} & w_{17} & w_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_4/\partial k_{11} & \partial u_4/\partial k_{12} & \partial u_4/\partial c_3 \\ \partial u_5/\partial k_{11} & \partial u_5/\partial k_{12} & \partial u_5/\partial c_3 \\ \partial u_6/\partial k_{11} & \partial u_6/\partial k_{12} & \partial u_6/\partial c_3 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \partial^2 x_2/\partial k_{11}^2 & \partial^2 x_2/\partial k_{11}\partial k_{12} & \partial^2 x_2/\partial k_{11}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_2/\partial k_{12}\partial k_{11} & \partial^2 x_2/\partial k_{12}^2 & \partial^2 x_2/\partial k_{12}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_2/\partial c_{13}\partial k_{11} & \partial^2 x_2/\partial c_{13}\partial k_{12} & \partial^2 x_2/\partial c_{13}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \hdashline V_2 \end{bmatrix} \quad , \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V_2 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_4 & v_5 & v_6 \\ v_7 & v_8 & v_9 \end{bmatrix} \tag{126}
$$

W_1とW_2はともに(3×3)の二次微係数からなるヘシアン行列で、対称行列である。

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\
&\quad + \frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_1}{\partial k_{11}} \\
v_2 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\
&\quad + \frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} \\
v_3 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_1}{\partial c_{13}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_2}{\partial c_{13}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\
&\quad + \frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_1}{\partial c_{13}}
\end{aligned} \tag{127}
$$

$$
\begin{aligned}
v_4 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\
&\quad + \frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_2}{\partial k_{11}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_5 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\
&\quad + \frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_2}{\partial k_{12}} \\
v_6 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_1}{\partial c_{13}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_2}{\partial c_{13}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\
&\quad + \frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_2}{\partial c_{13}}
\end{aligned}
\tag{128}
$$

$$
\begin{aligned}
v_7 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} \\
&\quad + \frac{\partial b_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_3}{\partial k_{11}} \\
v_8 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} \\
&\quad + \frac{\partial b_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_3}{\partial k_{12}} \\
v_9 &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_1}{\partial c_{13}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_2}{\partial c_{13}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} \\
&\quad + \frac{\partial b_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_3}{\partial c_{13}}
\end{aligned}
\tag{129}
$$

式(125)と式(126)を用い、式(124)を整理すると、次式が得られる。

$$
\frac{dW}{dt} = A_1 W + V \tag{130}
$$

$$
\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} W_1 \\ \hline W_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_1 I & a_2 I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} W_1 \\ \hline W_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} V_1 \\ \hline V_2 \end{array}\right] \tag{131}
$$

ここで、行列 A は式(113)の A と同じである。
式(108)より、新しい行列とベクトルを次式で定義する。

$$
U_* = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_4 \\ u_2 & u_5 \\ u_3 & u_6 \end{bmatrix} \tag{132}
$$

式(132)を用い、式(127),式(128)及び式(129)を行列表示すると次式が得られる。

$$V_2 = U_* \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \frac{\partial B_2}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial B_2}{\partial K} \tag{133}$$

式(133)の微係数行列 $\partial A/\partial X$, $\partial A/\partial K$, $\partial B_2/\partial X$ 及び $\partial B_2/\partial K$ は、以下の行列で表される。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \partial a_1/\partial x_1 & \partial a_1/\partial x_2 \\ \partial a_2/\partial x_1 & \partial a_2/\partial x_2 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial A}{\partial K} &= \begin{bmatrix} \partial a_1/\partial k_{11} & \partial a_1/\partial k_{12} & \partial a_1/\partial c_{13} \\ \partial a_2/\partial k_{11} & \partial a_2/\partial k_{12} & \partial a_2/\partial c_{13} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial B_2}{\partial X} &= \left(\frac{\partial A}{\partial K} \right)^T = \begin{bmatrix} \partial b_1/\partial x_1 & \partial b_1/\partial x_2 \\ \partial b_2/\partial x_1 & \partial b_2/\partial x_2 \\ \partial b_3/\partial x_1 & \partial b_3/\partial x_2 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial B_2}{\partial K} &= \begin{bmatrix} \partial b_1/\partial k_{11} & \partial b_1/\partial k_{12} & \partial b_1/\partial c_{13} \\ \partial b_2/\partial k_{11} & \partial b_2/\partial k_{12} & \partial b_2/\partial c_{13} \\ \partial b_3/\partial k_{11} & \partial b_3/\partial k_{12} & \partial b_3/\partial c_{13} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{134}$$

式(101)より、微係数行列 $\partial A/\partial X$ の各要素は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}} \dfrac{p_1}{p_2} \left(\dfrac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left(\dfrac{p_1}{p_2} - 2 \right) x_1^{p_1/p_2 - 3} x_2 - \dfrac{c_{13}}{k_{12}} \dfrac{1}{p_2} \left(\dfrac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2 - 2} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}} \dfrac{p_1}{p_2} \left(\dfrac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2 - 2} \quad , \quad \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{135}$$

式(101)より、微係数行列 $\partial A/\partial K$ の各要素は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_1}{\partial k_{11}} = -\dfrac{1}{k_{12}} \dfrac{p_1}{p_2} \left(\dfrac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2 - 2} x_2 \quad , \quad \dfrac{\partial a_1}{\partial k_{12}} = \dfrac{k_{11}}{k_{12}^2} \dfrac{p_1}{p_2} \left(\dfrac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2 - 2} x_2 + \dfrac{c_{13}}{k_{12}^2} \dfrac{1}{p_2} x_1^{1/p_2 - 1} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial c_{13}} = -\dfrac{1}{k_{12}} \dfrac{1}{p_2} x_1^{1/p_2 - 1} \quad , \quad \dfrac{\partial a_2}{\partial k_{11}} = -\dfrac{1}{k_{12}} \dfrac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} \\ \dfrac{\partial a_2}{\partial k_{12}} = \dfrac{k_{11}}{k_{12}^2} \dfrac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} \quad , \quad \dfrac{\partial a_2}{\partial c_{13}} = 0 \end{cases} \tag{136}$$

式(110)より、微係数行列 $\partial B_2/\partial K$ の各要素は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_1}{\partial k_{11}} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial b_1}{\partial k_{12}} = \dfrac{\partial b_2}{\partial k_{11}} = \dfrac{1}{k_{12}^2} \dfrac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} x_2 \quad , \quad \dfrac{\partial b_1}{\partial c_{13}} = \dfrac{\partial b_3}{\partial k_{11}} = 0 \\ \dfrac{\partial b_2}{\partial k_{12}} = -2 \dfrac{k_{11}}{k_{12}^3} \dfrac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} x_2 - 2 \dfrac{c_{13}}{k_{12}^3} x_1^{1/p_2} + \dfrac{2}{k_{12}^3} (r - q_b) \\ \dfrac{\partial b_2}{\partial c_{13}} = \dfrac{\partial b_3}{\partial k_{12}} = \dfrac{1}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} \quad , \quad \dfrac{\partial b_3}{\partial c_{13}} = 0 \end{cases} \tag{137}$$

m を任意のタイムステップとして、式(131)を離散表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ \hdashline W_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \left[\begin{array}{c:c} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \hdashline \phi_3 I & \phi_4 I \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_1 \\ \hdashline W_2 \end{bmatrix}_m + \left[\begin{array}{c:c} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \hdashline \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{array}\right] \begin{bmatrix} V_1 \\ \hdashline V_2 \end{bmatrix}_m \tag{138}$$

式(138)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(W_1\right)_{m+1} &= \phi_1\left(W_1\right)_m + \phi_2\left(W_2\right)_m + \gamma_2\left(V_2\right)_m \\ \left(W_2\right)_{m+1} &= \phi_3\left(W_1\right)_m + \phi_4\left(W_2\right)_m + \gamma_4\left(V_2\right)_m \end{aligned} \tag{139}$$

ϕ_1～ϕ_4 及び γ_1～γ_4 の係数は式(102)中で用いた係数と同じである。

式(117)の漸化式により計算される変数 u_1, u_2 及び u_3 と、式(139)の漸化式により計算される変数 w_1 ～ w_9 を式(121)～式(123)に代入すると、任意の離散時刻 m における流出高 q のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する二次微係数が解析的に算定されたことになる。

なお、行列 W_1 と W_2 のヘシアン行列は対称行列となることから、式(139)における要素のうち、$w_2 = w_4$, $w_3 = w_7$, $w_6 = w_8$, $w_{11} = w_{13}$, $w_{12} = w_{16}$ 及び $w_{15} = w_{17}$ になることに注意すべきである。

以上の理論展開により、1 段タンク型貯留関数モデルにおけるパラメータ c_{11}, c_{12} 及び c_{13} についての一次及び二次微係数が算出されたので、(i)**一階ニュートン法**、(ii)**ダビドン法**を用いた 2 種類の最適化手法が実行可能となる。

５．地下水流出を含む貯留関数法（2 段タンク型貯留関数モデル）[9), 12), 13), 14), 15), 16)]

1 段タンク型貯留関数モデルは、降雨流出過程における浸透・蒸発散・初期損失・葉面貯留などの短期流出に含まれない降雨成分を「損失項」として貯留関数に取り入れ、主観的な事前作業である有効雨量の算出を必要としないので客観性に優れている。

しかしながら、1 段タンク型貯留関数モデルによる解析を行った結果、再現が不十分である事例がいくつか見られた。その再現の特徴としては、以下の点が挙げられる。

(a) ピーク流量が低く再現される。
(b) 減衰部の再現形状が観測値と合わない。

また、数多くの洪水例を解析した経験によると、計算洪水ハイドログラフの再現性がよくない事例は以下の場合が多い。

(a) 火山灰土壌のような浸透性が高い流域では、損失及び遅れて流出してくる成分を正しく表現できるようなモデル構成でなければ、洪水ハイドログラフ全体の形状特性、とくに、低減曲線部の再現がよくない。
(b) 長期にわたって断続的な降雨が続き、流域の保水能力が小さくなっている場合、その影響を正確に評価することができなければ、その後の集中豪雨に対する出水特性がうまく再現できない。

1 段タンク型貯留関数モデルにおいては、上述の浸透により遅れる流出成分の再現が不十分である

ことから再現性が悪い洪水例があったと考えられる。

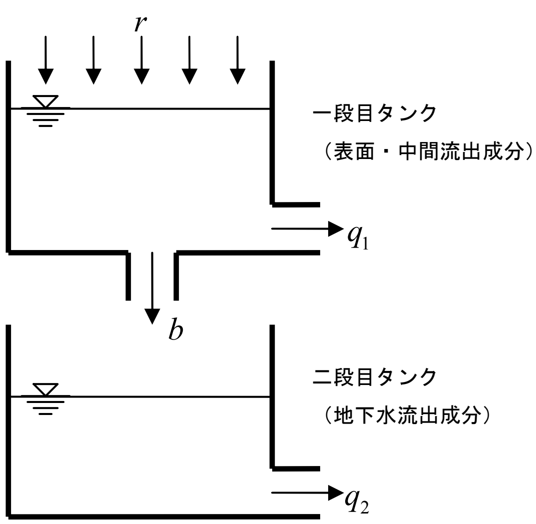
従来の貯留関数法は有効雨量を用いるために、「表面・中間流出成分」の解析に主眼をおいた手法と言える。また、1 段タンク型貯留関数モデルは、実測雨量を直接用いるために損失を考慮したが、上述した洪水事例に含まれるような問題点を解決するためには、「地下水流出成分」を表現できるモデルが必要となってくる。

基本高水の再検討には、貯留関数法を用いている実務者（技術者）が圧倒的に多い。すなわち、貯留関数法は実務者にとってはなじみやすい。一方、地下水流出成分が考慮されるタンクモデルや「フィルター成分分離法」は研究者レベルでは数多く適用され、研究成果も多いが、基本高水での検討例は少ない。

一般に、全流量は 2 ないし 3 個の流出成分に分離されることが知られている。したがって、本章では研究と実務の溝を埋め、理解しやすい貯留関数モデルを構築するために、流出成分を「表面・中間流出成分」と「地下水流出成分」とに分離し、比較的早く流出する「表面・中間流出成分」については 1 段目タンクで表現し、浸透により遅く流出する「地下水流出成分」については 2 段目タンクを設けて表現する 2 段タンク型貯留関数モデルを提案する。

流出成分の分離法として、日野・長谷部[17),18)]が提案している「フィルター成分分離法」を用いて表面・中間流出成分と地下水流出成分に分離するため、客観性が維持される。その結果、流出特性の違いを考慮して、全流出量を 2 成分に分離して解析することで、洪水ハイドログラフ再現性の向上を図ることが可能となる。また、地下水流出成分の未知定数を最適化手法に用いることなく決定できるので、計算負担を増大させない特徴を有している。

右図に示されるように、一段目タンクを非線形貯留関数モデルで表現すると、次式が得られる。



$$\begin{cases} s_1 = k_{11} q_1^{p_1} + k_{12} \dfrac{d}{dt}\left(q_1^{p_2}\right) \\ \dfrac{ds_1}{dt} = r - q_1 - b \end{cases} \tag{140}$$

ここで、s_1 ：一段目タンク貯留高[mm]、r ：観測雨量[mm/h]、q_1 ：表面・中間流出高[mm/h]、b ：一段目タンクから二段目タンクへの浸透供給量[mm/h]、k_{11}, k_{12} ：貯留係数、k_{13} ：浸透係数、p_1, p_2 ：貯留指数

一段目タンクの損失項 b は浸透供給量として、すべて二段目タンクへの入力とした。また、p_1 と p_2 については表面流にマニング則を想定すると、 $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.4648$ に近似できることが知られている[5)]。モデル定数 k_{11} と k_{12} については、既往研究成果から次の関数形を仮定する[5)]。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11} A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12} k_{11}^2 \left(\overline{r}\right)^{-0.2648} \\ k_{13} = c_{13} - 1 \end{cases} \tag{141}$$

ここで、A ：流域面積[km^2]、$\bar{r}$ ：平均雨量強度[mm/h]、c_{11}, c_{12} ：未知定数
上図に示されるように、二段目タンクの地下水流出成分を次式の線形貯留関数モデルで表現した。

$$\begin{cases} s_2 = k_{21}q_2 + k_{22}\dfrac{d}{dt}\left(q_2\right) \\ \dfrac{ds_2}{dt} = b - q_2 \end{cases} \tag{142}$$

ここで、s_2 ：二段目タンク貯留高[mm]、k_{21}, k_{22} ：貯留係数、q_2 ：地下水流出高[mm/h]

日野・長谷部はフィルター成分分離法による地下水流出成分を線形方程式で表現可能であるとし、次式で表現した [17),18)]。

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + c_1\frac{dq_2}{dt} + c_0 q_2 = c_0 q \tag{143}$$

ここで、q_2 ：地下水流出成分、q ：全流出成分
c_0 と c_1 は次式で与えられる。

$$c_0 = \left(\frac{\delta}{T_c}\right)^2 \quad , \quad c_1 = \frac{\delta^2}{T_c} \tag{144}$$

ここに、T_c はハイドログラフの低減部より決定される定数であり、減衰係数 δ は通常 2.0～3.0 の値となるが、本報告では $\delta = 2.1$ に設定する。

式(142)に示される地下水流出成分の未知定数は k_{21} と k_{22} の 2 つであり、これらの定数は以下の方法により算出される。

貯留関数による地下水流出成分を表わす式(142)は、以下のように変形される。

$$k_{21}\frac{dq_2}{dt} + k_{22}\frac{d^2q_2}{dt^2} = b - q_2 \tag{145}$$

すなわち、次式が得られる。

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{k_{21}}{k_{22}}\frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{k_{22}}q_2 = \frac{1}{k_{22}}b \tag{146}$$

フィルター成分分離法による線形方程式(143)と貯留関数法による線形方程式(146)は同じ表現になっており、全流出量が浸透供給量に置き換わっているだけである。

二式の関係を調べるために、式(146)に式(141)を代入すると、式(147)が得られる。

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{k_{21}}{k_{22}}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\left(1 + k_{13}\right)}{k_{22}}q_2 = \frac{k_{13}}{k_{22}}q \tag{147}$$

既往洪水の解析結果によれば、$k_{22} >> 1$ であることから、$1/k_{22} \approx 0$ とみなすことができる。したがって、近似的に次式が成り立つと考えられる。

$$\frac{\left(1 + k_{13}\right)}{k_{22}} = \frac{1}{k_{22}} + \frac{k_{13}}{k_{22}} \approx \frac{k_{13}}{k_{22}} \tag{148}$$

以上の仮定をもとに、式(143)と式(147)が等価であるとするとき、定数間に次の関係式が成立する。

$$\begin{cases} \dfrac{k_{21}}{k_{22}} = c_1 \\ \dfrac{\left(1+k_{13}\right)}{k_{22}} \approx \dfrac{k_{13}}{k_{22}} = c_0 \end{cases} \tag{149}$$

すなわち、地下水流出成分のモデル定数k_{21}とk_{22}は、式(144)に示される確定値c_0, c_1と一段目タンクの未知浸透係数k_{13}を用いて、次式で与えられることがわかる。

$$\begin{cases} k_{21} = c_1 k_{22} = k_{13}\dfrac{c_1}{c_0} = \left(c_{13} - 1\right)\dfrac{c_1}{c_0} \\ k_{22} = \dfrac{k_{13}}{c_0} = \dfrac{c_{13} - 1}{c_0} \end{cases} \tag{150}$$

式(151)で表されるように、一段目（表面・中間流出成分）の流出高q_1と二段目（地下水流出成分）流出高q_2を合計して全流出高qとする。

$$q = q_1 + q_2 \tag{151}$$

（１） 数値解法

まず、表面・中間流出成分を算定するために、式(140)において、次式の変数変換を行う。

$$x_1 = q_1^{p_2} \qquad , \qquad x_2 = \frac{d}{dt}\left(q_1^{p_2}\right) \tag{152}$$

式(140)で表される貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\left(x_2\right) = x_{12} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2\left(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}\right) = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}x_2 - \dfrac{c_{13}}{k_{12}}x_1^{1/p_2} + \dfrac{r}{k_{12}} \end{cases} \tag{153}$$

式(153)を線形近似した結果は、次式で表される。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \tag{154}$$

$$\frac{dX_1}{dt} = A_1 X_1 + D_1 \tag{155}$$

ここで、

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad , \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \tag{156}$$

$$
\begin{cases}
a_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-2}x_2 - \dfrac{c_{13}}{k_{12}}\dfrac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1} \\
a_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1} \\
d_1 = \dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-1}x_2 + \dfrac{c_{13}}{k_{12}}\left(\dfrac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2} + \dfrac{r}{k_{12}}
\end{cases}
\tag{157}
$$

m を任意のタイムステップとして、式(154)及び式(155)を離散表示すると、次式となる。

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix}_m
\tag{158}
$$

$$
\left(X_1\right)_{m+1} = \Phi_1\left(X_1\right)_m + \Gamma_1\left(D_1\right)_m
\tag{159}
$$

ここで、ϕ_1～ϕ_4 および γ_1～γ_4 の係数は式(35)及び式(36)と同様な方法で計算される。

式(158)を要素展開すると、次式で表わされる。

$$
\begin{aligned}
\left(x_1\right)_{m+1} &= \phi_1\left(x_1\right)_m + \phi_2\left(x_2\right)_m + \gamma_2\left(d_1\right)_m \\
\left(x_2\right)_{m+1} &= \phi_3\left(x_1\right)_m + \phi_4\left(x_2\right)_m + \gamma_4\left(d_1\right)_m
\end{aligned}
\tag{160}
$$

式(160)の漸化式により計算された変数 x_1 を式(152)に代入すると、任意の離散時刻 m における表面・中間流出成分 q_1 が解析的に算定されたことになる。

次に地下水流出成分を算定するために、式(142)において、次式の変数変換を行う。

$$
x_3 = q_2 \qquad , \qquad x_4 = \frac{dq_2}{dt}
\tag{161}
$$

式(142)で表される貯留関数モデルは次のシステム方程式で表される。

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_3}{dt} = f_3\left(x_4\right) = x_4 \\
\dfrac{dx_4}{dt} = f_4\left(x_3, x_4, c_{13}, k_{21}, k_{22}, q_1\right) = -\dfrac{1}{k_{22}}x_3 - \dfrac{k_{21}}{k_{22}}x_4 + \dfrac{c_{13}-1}{k_{22}}q_1
\end{cases}
\tag{162}
$$

ここで、式(150)より、式(162)のモデル定数を変換すると、次式で表わされる。

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_3}{dt} = f_3\left(x_4\right) = x_4 \\
\dfrac{dx_4}{dt} = f_4\left(x_3, x_4, c_{13}, q_1\right) = -\dfrac{c_0}{c_{13}-1}x_3 - c_1 x_4 + c_0 q_1
\end{cases}
\tag{163}
$$

式(163)を行列表示すると、次式で表される。

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix}
\tag{164}
$$

$$\frac{dX_2}{dt} = A_2 X_2 + D_2 \tag{165}$$

ここで、

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{166}$$

$$a_3 = -\frac{c_0}{c_{13} - 1} \quad , \quad a_4 = -c_1 \quad , \quad d_2 = c_0 q_1 \tag{167}$$

ここで、式(167)から判るように地下水流出成分の算定には表面・中間流出成分 q_1 が必要となる。

m を任意のタイムステップとして、式(164)及び式(165)を離散表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_5 & \phi_6 \\ \phi_7 & \phi_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_5 & \gamma_6 \\ \gamma_7 & \gamma_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix}_m \tag{168}$$

$$\left(X_2\right)_{m+1} = \Phi_2 \left(X_2\right)_m + \Gamma_2 \left(D_2\right)_m \tag{169}$$

ここで、ϕ_5～ϕ_8 および γ_5～γ_8 の係数は式(35)及び式(36)と同様な方法で計算される。

式(168)を要素展開すると、次式で表される。

$$\begin{aligned} \left(x_3\right)_{m+1} &= \phi_5 \left(x_3\right)_m + \phi_6 \left(x_4\right)_m + \gamma_6 \left(d_2\right)_m \\ \left(x_4\right)_{m+1} &= \phi_7 \left(x_3\right)_m + \phi_8 \left(x_4\right)_m + \gamma_8 \left(d_2\right)_m \end{aligned} \tag{170}$$

式(170)の漸化式により計算された変数 x_3 を式(161)に代入すると、任意の離散時刻 m における計算地下水流出成分 q_2 が解析的に算定されたことになる。

以上の理論展開により、表面・中間流出成分 q_1 と地下水流出成分 q_2 が求められたため、全流出成分 q の算出が可能となる。

（２） 一次微係数の算定

本モデルの特徴として、全流出成分に対するモデル定数の最適化を図ることがあげられる。このため、モデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} についての全流出成分の微係数を求めることが必要となる。

式(151)より、全流出成分 q の一次微係数ベクトルは次式で表わされる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial c_{11}} = \dfrac{\partial q_1}{\partial c_{11}} + \dfrac{\partial q_2}{\partial c_{11}} = \left(\dfrac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \dfrac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \dfrac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24} \left(\dfrac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \dfrac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \\ \dfrac{\partial q}{\partial c_{12}} = \dfrac{\partial q_1}{\partial c_{12}} + \dfrac{\partial q_2}{\partial c_{12}} = \left(\dfrac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \dfrac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \dfrac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 \left(\overline{r} \right)^{-0.2648} \left(\dfrac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \dfrac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \\ \dfrac{\partial q}{\partial c_{13}} = \dfrac{\partial q_1}{\partial c_{13}} + \dfrac{\partial q_2}{\partial c_{13}} \end{cases} \tag{171}$$

まず、表面・中間流出成分の一次微係数の算定を行う。式(171)中の表面・中間流出成分 q_1 のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数 $\partial q_1 / \partial k_{11}, \partial q_1 / \partial k_{12}$ 及び $\partial q_1 / \partial c_{13}$ は、$q_1 = x_1^{1/p_2}$ をモデル定数 k_{11}, k_{12}

及びc_{13}について微分することにより、次式で得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial k_{11}} = \dfrac{\partial q_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial k_{11}} = \dfrac{1}{p_2} x_1^{1/p_2 - 1} \dfrac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial k_{12}} = \dfrac{\partial q_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial k_{12}} = \dfrac{1}{p_2} x_1^{1/p_2 - 1} \dfrac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial c_{13}} = \dfrac{\partial q_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial c_{13}} = \dfrac{1}{p_2} x_1^{1/p_2 - 1} \dfrac{\partial x_1}{\partial c_{13}} \end{cases} \tag{172}$$

式(172)中の変数x_1のモデル定数k_{11}, k_{12}及びc_{13}に関する一次微係数$\partial x_1/\partial k_{11}, \partial x_1/\partial k_{12}$及び$\partial x_1/\partial c_{13}$を算定するために、モデル定数$k_{11}, k_{12}$及び$c_{13}$が時間的に変化しないと仮定して、式(153)をモデル定数k_{11}, k_{12}及びc_{13}に関して微分すれば、表面・中間流出成分の一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial k_{11}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\ &\frac{\partial}{\partial k_{12}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\ &\frac{\partial}{\partial c_{13}}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}\right) = \frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} \\ &\frac{\partial}{\partial k_{11}}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}}\right) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \\ &\frac{\partial}{\partial k_{12}}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}\right) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \\ &\frac{\partial}{\partial c_{13}}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}\right) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} \end{aligned} \tag{173}$$

ここで、次の変数変換を行なう。

$$U_1 = \begin{bmatrix} U_{11} \\ \hdashline U_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad U_{11} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial k_{11} \\ \partial x_1/\partial k_{12} \\ \partial x_1/\partial c_{13} \end{bmatrix} \quad , \quad U_{12} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_2/\partial k_{11} \\ \partial x_2/\partial k_{12} \\ \partial x_2/\partial c_{13} \end{bmatrix} \tag{174}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ \hdashline B_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{12} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_2/\partial k_{11} \\ \partial f_2/\partial k_{12} \\ \partial f_2/\partial c_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} x_2 \\ b_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2}\frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2 - 1} x_2 + \frac{c_{13}}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} - \frac{r}{k_{12}^2} \end{aligned} \tag{175}$$

$$b_3 = \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2}$$

式(157)及び式(174)を用いて、式(173)を整理すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_4 \quad , \quad \dfrac{du_4}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_4 + b_1 \\ \dfrac{du_2}{dt} = u_5 \quad , \quad \dfrac{du_5}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_5 + b_2 \\ \dfrac{du_3}{dt} = u_6 \quad , \quad \dfrac{du_6}{dt} = a_1 u_3 + a_2 u_6 + b_3 \end{cases} \tag{176}$$

式(176)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \hline u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \hline u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{177}$$

ここで、次式を定義する。

$$A_2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_1 I & a_2 I \end{array}\right] \tag{178}$$

ここで、I は (3×3) の単位行列である。

式(174)及び式(178)を用い、式(177)を整理すると、次式で表わされる。

$$\frac{dU_1}{dt} = A_2 U_1 + B_1 \tag{179}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} U_{11} \\ \hline U_{12} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_1 I & a_2 I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U_{11} \\ \hline U_{12} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{12} \end{array}\right] \tag{180}$$

m を任意のタイムステップとして、式(180)を離散表示すると、次式となる。

$$\left[\begin{array}{c} U_{11} \\ \hline U_{12} \end{array}\right]_{m+1} = \left[\begin{array}{c|c} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \hline \phi_3 I & \phi_4 I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U_{11} \\ \hline U_{12} \end{array}\right]_m + \left[\begin{array}{c|c} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \hline \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_{11} \\ \hline B_{12} \end{array}\right]_m \tag{181}$$

式(181)を要素展開すると、次式で表される。

$$\begin{aligned} \left(U_{11}\right)_{m+1} &= \phi_1 \left(U_{11}\right)_m + \phi_2 \left(U_{12}\right)_m + \gamma_2 \left(B_{12}\right)_m \\ \left(U_{12}\right)_{m+1} &= \phi_3 \left(U_{11}\right)_m + \phi_4 \left(U_{12}\right)_m + \gamma_4 \left(B_{12}\right)_m \end{aligned} \tag{182}$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ 及び $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は式(158)で用いた値と同じである。

式(182)の漸化式により計算された変数 u_1, u_2 及び u_3 を式(172)に代入すると、任意の離散時刻 m における表面・中間流出成分 q_1 のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数が解析的に算定されたことになる。

同様に、地下水流出成分の一次微係数の算定を行う。式(171)中の微係数 $\partial q_2/\partial k_{11}$, $\partial q_2/\partial k_{12}$ 及び $\partial q_2/\partial c_{13}$ は、式(161)の変数変換より次式で得られる。

$$\frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} = \frac{\partial x_3}{\partial k_{11}} \quad , \quad \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} = \frac{\partial x_3}{\partial k_{12}} \quad , \quad \frac{\partial q_2}{\partial c_{13}} = \frac{\partial x_3}{\partial c_{13}} \tag{183}$$

式(183)中の変数 x_3 のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数 $\partial x_3/\partial k_{11}, \partial x_3/\partial k_{12}$ 及び $\partial x_3/\partial c_{13}$ を算定するために、モデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} が時間的に変化しないと仮定して、式(163)をモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関して微分すれば、地下水流出成分の一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k_{11}}\left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_3}{\partial k_{11}}\right) = \frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} \\
\frac{\partial}{\partial k_{12}}\left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_3}{\partial k_{12}}\right) = \frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} \\
\frac{\partial}{\partial c_{13}}\left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_3}{\partial c_{13}}\right) = \frac{\partial x_4}{\partial c_{13}} \\
\frac{\partial}{\partial k_{11}}\left(\frac{\partial x_4}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_4}{\partial k_{11}}\right) = a_3\frac{\partial x_3}{\partial k_{11}} + a_4\frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} + \frac{\partial f_4}{\partial k_{11}} \\
\frac{\partial}{\partial k_{12}}\left(\frac{\partial x_4}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_4}{\partial k_{12}}\right) = a_3\frac{\partial x_3}{\partial k_{12}} + a_4\frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} + \frac{\partial f_4}{\partial k_{12}} \\
\frac{\partial}{\partial c_{13}}\left(\frac{\partial x_4}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_4}{\partial c_{13}}\right) = a_3\frac{\partial x_3}{\partial c_{13}} + a_4\frac{\partial x_4}{\partial c_{13}} + \frac{\partial f_4}{\partial c_{13}}
\end{aligned} \tag{184}$$

ここで、次の変数変換を行なう。

$$U_2 = \begin{bmatrix} U_{21} \\ \hdashline U_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad U_{21} = \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_3/\partial k_{11} \\ \partial x_3/\partial k_{12} \\ \partial x_3/\partial c_{13} \end{bmatrix} \quad , \quad U_{22} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_4/\partial k_{11} \\ \partial x_4/\partial k_{12} \\ \partial x_4/\partial c_{13} \end{bmatrix} \tag{185}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ \hdashline B_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{22} = \begin{bmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_4/\partial k_{11} \\ \partial f_4/\partial k_{12} \\ \partial f_4/\partial c_{13} \end{bmatrix} \tag{186}$$

式(185)中の強制入力項は次式で計算される。

$$\frac{\partial f_4}{\partial k_{11}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} \quad , \quad \frac{\partial f_4}{\partial k_{12}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} \quad , \quad \frac{\partial f_4}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial f_4}{\partial c_{13}} \tag{187}$$

ここで、式(187)の微係数は以下で表される。

$$\frac{\partial f_4}{\partial q_1} = c_0 \quad , \quad \frac{\partial f_4}{\partial c_{13}} = \frac{c_0}{(c_{13}-1)^2} x_3 \tag{188}$$

式(187)で表される地下水流出成分 q_2 の一次微係数に関する強制入力項の算定にあたっては、表面・中間流出成分 q_1 のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数 $\partial q_1/\partial k_{11}$, $\partial q_1/\partial k_{12}$ 及び $\partial q_1/\partial c_{13}$ が必要となることに注意する。

式(167)及び式(185)を用いて、式(184)を整理すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{du_7}{dt} = u_{10} \quad , \quad \dfrac{du_{10}}{dt} = a_3 u_7 + a_4 u_{10} + b_4 \\ \dfrac{du_8}{dt} = u_{11} \quad , \quad \dfrac{du_{11}}{dt} = a_3 u_8 + a_4 u_{11} + b_5 \\ \dfrac{du_9}{dt} = u_{12} \quad , \quad \dfrac{du_{12}}{dt} = a_3 u_9 + a_4 u_{12} + b_6 \end{cases} \tag{189}$$

式(189)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ \hline u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ \hline u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{array}\right] \tag{190}$$

ここで、次式を定義する。

$$A_3 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_3 I & a_4 I \end{array}\right] \tag{191}$$

ここで、I は (3×3) の単位行列である。

式(185)及び式(191)を用い、式(190)を整理すると、次式で表わされる。

$$\frac{dU_2}{dt} = A_3 U_2 + B_2 \tag{192}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c} U_{21} \\ \hline U_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_3 I & a_4 I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} U_{21} \\ \hline U_{22} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_{21} \\ \hline B_{22} \end{array}\right] \tag{193}$$

m を任意のタイムステップとして、式(193)を離散表示すると、次式となる。

$$\left[\begin{array}{c} U_{21} \\ \hline U_{22} \end{array}\right]_{m+1} = \left[\begin{array}{c|c} \phi_5 I & \phi_6 I \\ \hline \phi_7 I & \phi_8 I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} U_{21} \\ \hline U_{22} \end{array}\right]_m + \left[\begin{array}{c|c} \gamma_5 I & \gamma_6 I \\ \hline \gamma_7 I & \gamma_8 I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} B_{21} \\ \hline B_{22} \end{array}\right]_m \tag{194}$$

式(195)を要素展開すると、次式で表される。

$$
\begin{aligned}
(U_{21})_{m+1} &= \phi_5 (U_{21})_m + \phi_6 (U_{22})_m + \gamma_6 (B_{22})_m \\
(U_{22})_{m+1} &= \phi_7 (U_{21})_m + \phi_8 (U_{22})_m + \gamma_8 (B_{22})_m
\end{aligned}
\tag{195}
$$

ϕ_5～ϕ_8 及び γ_5～γ_8 の係数は式(168)中で用いた係数と同じである。

式(195)の漸化式により計算された変数 u_7, u_8 及び u_9 を式(183)に代入すると、任意の離散時刻 m における地下水流出成分 q_2 のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数が解析的に算定されたことになる。

以上の理論展開により、表面・中間流出成分 q_1 のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数 $\partial q_1/\partial k_{11}$, $\partial q_1/\partial k_{12}$, $\partial q_1/\partial c_{13}$ 、及び地下水流出成分 q_2 の一次微係数 $\partial q_2/\partial k_{11}$, $\partial q_2/\partial k_{12}$, $\partial q_2/\partial c_{13}$ が計算されたので、それらの一次微係数を式(171)に代入することにより、全流出成分 q のモデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数 $\partial q/\partial c_{11}$, $\partial q/\partial c_{12}$, $\partial q/\partial c_{13}$ の算定が可能となる。

（３） 二次微係数の算定

一次微係数と同様に、式(171)をモデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} で微分すると、全流出成分の二次微係数は次式で表わされる。

$$
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{11}^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{11}^2} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}^2}\right)\left(\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}}\right)^2 = A^{0.48}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}^2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{11}\partial c_{12}} &= \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{11}\partial c_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{11}\partial c_{12}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}\partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}\partial k_{12}}\right)\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}}\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = A^{0.24} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}\partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}\partial k_{12}}\right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{11}\partial c_{13}} &= \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{11}\partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{11}\partial c_{13}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}\partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}\partial c_{13}}\right)\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}\partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}\partial c_{13}}\right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{12}\partial c_{11}} &= \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{12}\partial c_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{12}\partial c_{11}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}\partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}\partial k_{11}}\right)\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}}\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}\partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}\partial k_{11}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{12}^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{12}^2} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}^2}\right)\left(\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}}\right)^2 = \left\{k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648}\right\}^2\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}^2}\right) \tag{196}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{12}\partial c_{13}} &= \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{12}\partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{12}\partial c_{13}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}\partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}\partial c_{13}}\right)\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}\partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}\partial c_{13}}\right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial c_{11}} &= \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}\partial c_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}\partial c_{11}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}\partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}\partial k_{11}}\right)\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}\partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}\partial k_{11}}\right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}\partial c_{12}} &= \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}\partial c_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}\partial c_{12}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}\partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}\partial k_{12}}\right)\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648}\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}\partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}\partial k_{12}}\right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}^2} &= \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}^2}
\end{aligned}
$$

一次微係数の算定方法と同様に、まず、表面・中間流出成分の二次微係数の算定を行う。式(196)中の表面・中間流出成分 q_1 のモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関する一次微係数 $\partial^2 q_1/\partial k_{11}^2$ ～ $\partial^2 q_1/\partial c_{13}^2$ は、式

(172)をモデル定数k_{11}, k_{12}及びc_{13}について微分することにより、次式で得られる。

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\right)^2 = \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}^2} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}\partial k_{12}} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}\partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}\partial k_{12}} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}\partial c_{13}} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}\partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}\partial c_{13}} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}\partial k_{11}} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}\partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}\partial k_{11}} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\right)^2 = \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}^2} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\right)^2 \tag{197}$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}\partial c_{13}} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}\partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}\partial c_{13}} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}\partial k_{11}} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}\partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}\partial k_{11}} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}\partial k_{12}} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}\partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}\partial k_{12}} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}^3} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}\right)^2 = \frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}^2} + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}\right)^2$$

式(197)中の変数x_1のモデル定数k_{11}, k_{12}及びc_{13}に関する二次微係数$\partial^2 x_1/\partial k_{11}^2 \sim \partial^2 x_1/\partial c_{13}^2$を算定するためには、モデル定数$k_{11}, k_{12}$及び$c_{13}$が時間的に変化しないと仮定して、式(173)をモデル定数k_{11}, k_{12}及びc_{13}に関して微分すれば、表面・中間流出成分q_1の二次微係数に関する微分方程式が求められる。

$$\left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{dw_1}{dt} = w_{10} , & \dfrac{dw_2}{dt} = w_{11} , & \dfrac{dw_3}{dt} = w_{12} \\
\dfrac{dw_4}{dt} = w_{13} , & \dfrac{dw_5}{dt} = w_{14} , & \dfrac{dw_6}{dt} = w_{15} \\
\dfrac{dw_7}{dt} = w_{16} , & \dfrac{dw_8}{dt} = w_{17} , & \dfrac{dw_9}{dt} = w_{18} \\
\dfrac{dw_{10}}{dt} = a_1 w_1 + a_2 w_{10} + v_1 & , \dfrac{dw_{11}}{dt} = a_1 w_2 + a_2 w_{11} + v_2 & , \dfrac{dw_{12}}{dt} = a_1 w_3 + a_2 w_{12} + v_3 \\
\dfrac{dw_{13}}{dt} = a_1 w_4 + a_2 w_{13} + v_4 & , \dfrac{dw_{14}}{dt} = a_1 w_5 + a_2 w_{14} + v_5 & , \dfrac{dw_{15}}{dt} = a_1 w_6 + a_2 w_{15} + v_6 \\
\dfrac{dw_{16}}{dt} = a_1 w_7 + a_2 w_{16} + v_7 & , \dfrac{dw_{17}}{dt} = a_1 w_8 + a_2 w_{17} + v_8 & , \dfrac{dw_{18}}{dt} = a_1 w_9 + a_2 w_{18} + v_9
\end{array}\right. \tag{198}$$

ここで、

$$W_1 = \begin{bmatrix} W_{11} \\ \hdashline W_{12} \end{bmatrix}$$

$$W_{11} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial k_{11} & \partial u_1/\partial k_{12} & \partial u_1/\partial c_{13} \\ \partial u_2/\partial k_{11} & \partial u_2/\partial k_{12} & \partial u_2/\partial c_{13} \\ \partial u_3/\partial k_{11} & \partial u_3/\partial k_{12} & \partial u_3/\partial c_{13} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \partial^2 x_1/\partial k_{11}^2 & \partial^2 x_1/\partial k_{11}\partial k_{12} & \partial^2 x_1/\partial k_{11}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_1/\partial k_{12}\partial k_{11} & \partial^2 x_1/\partial k_{12}^2 & \partial^2 x_1/\partial k_{12}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_1/\partial c_{13}\partial k_{11} & \partial^2 x_1/\partial c_{13}\partial k_{12} & \partial^2 x_1/\partial c_{13}^2 \end{bmatrix}$$

$$W_{12} = \begin{bmatrix} w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{16} & w_{17} & w_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_4/\partial k_{11} & \partial u_4/\partial k_{12} & \partial u_4/\partial c_{13} \\ \partial u_5/\partial k_{11} & \partial u_5/\partial k_{12} & \partial u_5/\partial c_{13} \\ \partial u_6/\partial k_{11} & \partial u_6/\partial k_{12} & \partial u_6/\partial c_{13} \end{bmatrix} \tag{199}$$
$$= \begin{bmatrix} \partial^2 x_2/\partial k_{11}^2 & \partial^2 x_2/\partial k_{11}\partial k_{12} & \partial^2 x_2/\partial k_{11}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_2/\partial k_{12}\partial k_{11} & \partial^2 x_2/\partial k_{12}^2 & \partial^2 x_2/\partial k_{12}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_2/\partial c_{13}\partial k_{11} & \partial^2 x_2/\partial c_{13}\partial k_{12} & \partial^2 x_2/\partial c_{13}^2 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_{11} \\ \hdashline V_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad V_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V_{12} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_4 & v_5 & v_6 \\ v_7 & v_8 & v_9 \end{bmatrix} \tag{200}$$

W_{11} と W_{12} はともに (3×3) の二次微係数からなるヘシアン行列で、対称行列である。

$$v_1 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}}$$
$$+ \frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_1}{\partial k_{11}}$$

$$v_2 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \tag{201}$$
$$+ \frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}}$$

$$v_3 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_1}{\partial c_{13}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial a_2}{\partial c_{13}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}}$$
$$+ \frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_1}{\partial c_{13}}$$

$$v_4 = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}$$
$$+ \frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_2}{\partial k_{11}}$$

$$v_5=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}+\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}+\frac{\partial a_1}{\partial k_{12}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}+\frac{\partial a_2}{\partial k_{12}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}$$
$$+\frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}+\frac{\partial b_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}+\frac{\partial b_2}{\partial k_{12}} \tag{202}$$

$$v_6=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_1}{\partial c_{13}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_2}{\partial c_{13}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}$$
$$+\frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}+\frac{\partial b_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}+\frac{\partial b_2}{\partial c_{13}}$$

$$v_7=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}+\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}}+\frac{\partial a_1}{\partial k_{11}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}}+\frac{\partial a_2}{\partial k_{11}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}$$
$$+\frac{\partial b_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}+\frac{\partial b_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}}+\frac{\partial b_3}{\partial k_{11}}$$

$$v_8=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}+\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}+\frac{\partial a_1}{\partial k_{12}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}+\frac{\partial a_2}{\partial k_{12}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}$$
$$+\frac{\partial b_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}+\frac{\partial b_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}}+\frac{\partial b_3}{\partial k_{12}} \tag{203}$$

$$v_9=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_1}{\partial c_{13}}\right)\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_2}{\partial c_{13}}\right)\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}$$
$$+\frac{\partial b_3}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}}+\frac{\partial b_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}}+\frac{\partial b_3}{\partial c_{13}}$$

式(178)と式(199)を用い、式(198)を整理すると、次式が得られる。

$$\frac{dW_1}{dt}=A_1W_1+V_1 \tag{204}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c}W_{11}\\ \hline W_{12}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}0 & I\\ \hline a_1I & a_2I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}W_{11}\\ \hline W_{12}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}V_{11}\\ \hline V_{12}\end{array}\right] \tag{205}$$

ここで、行列 A_1 は式(178)の A_1 と同じである。

式(174)より、新しい行列とベクトルを次式で定義する。

$$U_{1*}=\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1 & u_4\\ u_2 & u_5\\ u_3 & u_6\end{bmatrix} \tag{206}$$

式(206)を用い、式(202)を行列表示すると、次式が得られる。

$$V_{12}=U_{1*}\frac{\partial A_1}{\partial X_1}U_{1*}^T+U_{1*}\frac{\partial A_1}{\partial K}+\frac{\partial B_{12}}{\partial X_1}U_{1*}^T+\frac{\partial B_{12}}{\partial K} \tag{207}$$

式(207)の微係数行列$\partial A_1/\partial X_1$,$\partial A_1/\partial K$,$\partial B_{12}/\partial X_1$ 及び$\partial B_{12}/\partial K$ は、以下の行列で表される。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A_1}{\partial X_1}=\begin{bmatrix}\partial a_1/\partial x_1 & \partial a_1/\partial x_2\\ \partial a_2/\partial x_1 & \partial a_2/\partial x_2\end{bmatrix}\\
&\frac{\partial A_1}{\partial K}=\begin{bmatrix}\partial a_1/\partial k_{11} & \partial a_1/\partial k_{12} & \partial a_1/\partial c_{13}\\ \partial a_2/\partial k_{11} & \partial a_2/\partial k_{12} & \partial a_2/\partial c_{13}\end{bmatrix}\\
&\frac{\partial B_{12}}{\partial X_1}=\left(\frac{\partial A_1}{\partial K}\right)^T=\begin{bmatrix}\partial b_1/\partial x_1 & \partial b_1/\partial x_2\\ \partial b_2/\partial x_1 & \partial b_2/\partial x_2\\ \partial b_3/\partial x_1 & \partial b_3/\partial x_2\end{bmatrix}\\
&\frac{\partial B_{12}}{\partial K}=\begin{bmatrix}\partial b_1/\partial k_{11} & \partial b_1/\partial k_{12} & \partial b_1/\partial c_{13}\\ \partial b_2/\partial k_{11} & \partial b_2/\partial k_{12} & \partial b_2/\partial c_{13}\\ \partial b_3/\partial k_{11} & \partial b_3/\partial k_{12} & \partial b_3/\partial c_{13}\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{208}
$$

式(157)より、微係数行列$\partial A_1/\partial X_1$ の各要素は次式で表わされる。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1}=-\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)\left(\dfrac{p_1}{p_2}-2\right)x_1^{p_1/p_2-3}x_2-\dfrac{c_{13}}{k_{12}}\dfrac{1}{p_2}\left(\dfrac{1}{p_2}-1\right)x_1^{1/p_2-2}\\
\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2}=\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}=-\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-2}\quad,\quad\dfrac{\partial a_2}{\partial x_{12}}=0
\end{cases}
\tag{209}
$$

式(157)より、微係数行列$\partial A_1/\partial K$ の各要素は次式で表わされる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial a_1}{\partial k_{11}}=\frac{\partial b_1}{\partial x_1}=-\frac{1}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-2}x_2\\
&\frac{\partial a_1}{\partial k_{12}}=\frac{\partial b_2}{\partial x_1}=\frac{c_{13}}{k_{12}^2}\frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}+\frac{k_{11}}{k_{12}^2}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_1}{p_2}-1\right)x_1^{p_1/p_2-2}x_2\\
&\frac{\partial a_1}{\partial c_{13}}=\frac{\partial b_3}{\partial x_1}=-\frac{1}{k_{12}}\frac{1}{p_2}x_1^{1/p_2-1}\quad,\quad\frac{\partial a_2}{\partial k_{11}}=\frac{\partial b_1}{\partial x_2}=-\frac{1}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}\\
&\frac{\partial a_2}{\partial k_{12}}=\frac{\partial b_2}{\partial x_2}=\frac{k_{11}}{k_{12}^2}\frac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}\quad,\quad\frac{\partial a_2}{\partial c_{13}}=\frac{\partial b_3}{\partial x_2}=0
\end{aligned}
\tag{210}
$$

式(175)より、微係数行列$\partial B_{12}/\partial K$ の各要素は次式で表わされる。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial b_1}{\partial k_{11}}=0\quad,\quad\dfrac{\partial b_1}{\partial k_{12}}=\dfrac{\partial b_2}{\partial k_{11}}=\dfrac{1}{k_{12}^2}\dfrac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}x_2\quad,\quad\dfrac{\partial b_1}{\partial c_{13}}=\dfrac{\partial b_3}{\partial k_{11}}=0\\
\dfrac{\partial b_2}{\partial k_{12}}=-2\dfrac{k_{11}}{k_{12}^3}\dfrac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}x_2-\dfrac{2}{k_{12}^3}x_1^{1/p_2}+\dfrac{2}{k_{12}^3}r\\
\dfrac{\partial b_2}{\partial c_{13}}=\dfrac{\partial b_3}{\partial k_{12}}=\dfrac{1}{k_{12}^2}x_1^{1/p_2}\quad,\quad\dfrac{\partial b_3}{\partial c_{13}}=0
\end{cases}
\tag{211}
$$

mを任意のタイムステップとして、式(205)を離散表示すると、次式となる。

$$\left[\begin{array}{c} W_{11} \\ \hline W_{12} \end{array}\right]_{m+1} = \left[\begin{array}{c|c} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \hline \phi_3 I & \phi_4 I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} W_{11} \\ \hline W_{12} \end{array}\right]_m + \left[\begin{array}{c|c} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \hline \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} V_{11} \\ \hline V_{12} \end{array}\right]_m \tag{212}$$

式(212)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(W_{11}\right)_{m+1} &= \phi_1\left(W_{11}\right)_m + \phi_2\left(W_{12}\right)_m + \gamma_2\left(V_{12}\right)_m \\ \left(W_{12}\right)_{m+1} &= \phi_3\left(W_{11}\right)_m + \phi_4\left(W_{12}\right)_m + \gamma_4\left(V_{12}\right)_m \end{aligned} \tag{213}$$

ϕ_1～ϕ_4 及びγ_1～γ_4 の係数は式(158)で用いた値と同じである。

式(213)の漸化式により算定される変数u_1, u_2 及びu_3 と、式(213)により算定される変数w_1 ～ w_9 を式(197)に代入すると、任意の離散時刻m における表面・中間流出成分q_1 の二次微係数が解析的に算定されたことになる。

なお、行列W_{11} とW_{12} のヘシアン行列は対称行列となることから、式(213)における要素のうち、$w_2 = w_4$, $w_3 = w_7$, $w_6 = w_8$, $w_{11} = w_{13}$, $w_{12} = w_{16}$ 及び$w_{15} = w_{17}$ になることに注意すべきである。

次に、地下水流出成分の二次微係数の算定を行う。式(196)中の地下水流出成分q_2 のモデル定数k_{11}, k_{12} 及びc_{13} に関する二次微係数$\partial^2 q_2 / \partial k_{11}^2$ ～ $\partial^2 q_2 / \partial c_{13}^2$ は、式(183)をモデル定数k_{11}, k_{12} 及びc_{13} について微分することにより、次式で得られる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}^2} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial k_{11}^2} \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}\partial k_{12}} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial k_{11}\partial k_{12}} \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}\partial c_{13}} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial k_{11}\partial c_{13}} \\ \dfrac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}\partial k_{11}} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial k_{12}\partial k_{11}} \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}^2} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial k_{12}^2} \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}\partial c_{13}} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial k_{12}\partial c_{13}} \\ \dfrac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}\partial k_{11}} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial c_{13}\partial k_{11}} \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}\partial k_{12}} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial c_{13}\partial k_{12}} \quad , \quad \dfrac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}^3} = \dfrac{\partial^2 x_3}{\partial c_{13}^2} \end{cases} \tag{214}$$

式(214)中の変数x_3 のモデル定数k_{11}, k_{12} 及びc_{13} に関する二次微係数$\partial^2 x_3 / \partial k_{11}^2$ ～ $\partial^2 x_3 / \partial c_{13}^2$ を算定するためには、モデル定数k_{11}, k_{12} 及びc_{13} が時間的に変化しないと仮定して、式(184)をモデル定数k_{11}, k_{12} 及びc_{13} に関して微分すれば、地下水流出成分q_2 の二次微係数に関する微分方程式が求められる。

$$\begin{cases} \dfrac{dw_{19}}{dt} = w_{28} \quad , \quad \dfrac{dw_{20}}{dt} = w_{29} \quad , \quad \dfrac{dw_{21}}{dt} = w_{30} \\ \dfrac{dw_{22}}{dt} = w_{31} \quad , \quad \dfrac{dw_{23}}{dt} = w_{32} \quad , \quad \dfrac{dw_{24}}{dt} = w_{33} \\ \dfrac{dw_{25}}{dt} = w_{34} \quad , \quad \dfrac{dw_{26}}{dt} = w_{35} \quad , \quad \dfrac{dw_{27}}{dt} = w_{36} \\ \dfrac{dw_{28}}{dt} = a_3 w_{19} + a_4 w_{28} + v_{10} \quad , \dfrac{dw_{29}}{dt} = a_3 w_{20} + a_4 w_{29} + v_{11} \quad , \dfrac{dw_{30}}{dt} = a_3 w_{21} + a_4 w_{30} + v_{12} \\ \dfrac{dw_{31}}{dt} = a_3 w_{22} + a_4 w_{31} + v_{13} \quad , \dfrac{dw_{32}}{dt} = a_3 w_{23} + a_4 w_{32} + v_{14} \quad , \dfrac{dw_{33}}{dt} = a_3 w_{24} + a_4 w_{33} + v_{15} \\ \dfrac{dw_{34}}{dt} = a_3 w_{25} + a_4 w_{34} + v_{16} \quad , \dfrac{dw_{35}}{dt} = a_3 w_{26} + a_4 w_{35} + v_{17} \quad , \dfrac{dw_{36}}{dt} = a_3 w_{27} + a_4 w_{36} + v_{18} \end{cases} \tag{215}$$

ここで、

$$W_2 = \left[\frac{W_{21}}{W_{22}}\right]$$

$$W_{21} = \begin{bmatrix} w_{19} & w_{20} & w_{21} \\ w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{25} & w_{26} & w_{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_7/\partial k_{11} & \partial u_7/\partial k_{12} & \partial u_7/\partial c_{13} \\ \partial u_8/\partial k_{11} & \partial u_8/\partial k_{12} & \partial u_8/\partial c_{13} \\ \partial u_9/\partial k_{11} & \partial u_9/\partial k_{12} & \partial u_9/\partial c_{13} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \partial^2 x_3/\partial k_{11}^2 & \partial^2 x_3/\partial k_{11}\partial k_{12} & \partial^2 x_3/\partial k_{11}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_3/\partial k_{12}\partial k_{11} & \partial^2 x_3/\partial k_{12}^2 & \partial^2 x_3/\partial k_{12}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_3/\partial c_{13}\partial k_{11} & \partial^2 x_3/\partial c_{13}\partial k_{12} & \partial^2 x_3/\partial c_{13}^2 \end{bmatrix}$$

$$W_{22} = \begin{bmatrix} w_{28} & w_{29} & w_{30} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \\ w_{34} & w_{35} & w_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_{10}/\partial k_{11} & \partial u_{10}/\partial k_{12} & \partial u_{10}/\partial c_{13} \\ \partial u_{11}/\partial k_{11} & \partial u_{11}/\partial k_{12} & \partial u_{11}/\partial c_{13} \\ \partial u_{12}/\partial k_{11} & \partial u_{12}/\partial k_{12} & \partial u_{12}/\partial c_{13} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \partial^2 x_4/\partial k_{11}^2 & \partial^2 x_4/\partial k_{11}\partial k_{12} & \partial^2 x_4/\partial k_{11}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_4/\partial k_{12}\partial k_{11} & \partial^2 x_4/\partial k_{12}^2 & \partial^2 x_4/\partial k_{12}\partial c_{13} \\ \partial^2 x_4/\partial c_{13}\partial kc_{11} & \partial^2 x_4/\partial c_{13}\partial k_{12} & \partial^2 x_4/\partial c_{13}^2 \end{bmatrix} \tag{216}$$

$$V_2 = \left[\frac{V_{21}}{V_{22}}\right] \quad , \quad V_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V_{22} = \begin{bmatrix} v_{10} & v_{11} & v_{12} \\ v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ v_{16} & v_{17} & v_{18} \end{bmatrix} \tag{217}$$

W_{21} と W_{22} はともに (3×3) の二次微係数からなるヘシアン行列で、対称行列である。

$$\begin{aligned} v_{10} &= \frac{\partial a_3}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_3}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_4}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_4}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_4}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_4}{\partial k_{11}} \\ v_{11} &= \frac{\partial a_3}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_3}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_4}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_4}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_4}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_4}{\partial k_{12}} \\ v_{12} &= \frac{\partial a_3}{\partial c_{13}}\frac{\partial x_3}{\partial k_{11}} + \frac{\partial a_4}{\partial c_{13}}\frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_4}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_4}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_4}{\partial c_{13}} \end{aligned} \tag{218}$$

$$\begin{aligned} v_{13} &= \frac{\partial a_3}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_3}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_4}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_5}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_5}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b_5}{\partial k_{11}} \\ v_{14} &= \frac{\partial a_3}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_3}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_4}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_5}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_5}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_5}{\partial k_{12}} \\ v_{15} &= \frac{\partial a_3}{\partial c_{13}}\frac{\partial x_3}{\partial k_{12}} + \frac{\partial a_4}{\partial c_{13}}\frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} + \frac{\partial b_5}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_5}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial c_{13}} + \frac{\partial b_5}{\partial c_{13}} \end{aligned} \tag{219}$$

$$v_{16}=\frac{\partial a_3}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_3}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_4}{\partial k_{11}}\frac{\partial x_4}{\partial c_{13}}+\frac{\partial b_6}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial k_{11}}+\frac{\partial b_6}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial k_{11}}+\frac{\partial b_6}{\partial k_{11}}$$

$$v_{17}=\frac{\partial a_3}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_3}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_4}{\partial k_{12}}\frac{\partial x_4}{\partial c_{13}}+\frac{\partial b_6}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial k_{12}}+\frac{\partial b_6}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial k_{12}}+\frac{\partial b_6}{\partial k_{12}} \tag{220}$$

$$v_{18}=\frac{\partial a_3}{\partial c_{13}}\frac{\partial x_3}{\partial c_{13}}+\frac{\partial a_4}{\partial c_{13}}\frac{\partial x_4}{\partial c_{13}}+\frac{\partial b_6}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial c_{13}}+\frac{\partial b_6}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial c_{13}}+\frac{\partial b_6}{\partial c_{13}}$$

式(191)と式(216)を用い、式(215)を整理すると、次式が得られる。

$$\frac{dW_2}{dt}=A_3W_2+V_2 \tag{221}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c}W_{21}\\ \hline W_{22}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}0 & I\\ \hline a_3I & a_4I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}W_{21}\\ \hline W_{22}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}V_{21}\\ \hline V_{22}\end{array}\right] \tag{222}$$

式(185)より、新しい行列とベクトルを次式で定義する。

$$U_{2*}=\begin{bmatrix}U_{21} & U_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_7 & u_{10}\\ u_8 & u_{11}\\ u_9 & u_{12}\end{bmatrix} \tag{223}$$

式(223)を用い、式(218),式(219)及び式(220)を行列表示すると、次式が得られる。

$$V_{22}=U_{2*}\frac{\partial A_2}{\partial K}+\frac{\partial B_{22}}{\partial X_2}U_{2*}^T+\frac{\partial B_{22}}{\partial K} \tag{224}$$

式(224)の微係数行列 $\partial A_2/\partial K$,$\partial B_{22}/\partial X_2$ 及び $\partial B_{22}/\partial K$ は、以下の行列で表される。

$$\frac{\partial A_2}{\partial K}=\begin{bmatrix}\partial a_3/\partial k_{11} & \partial a_3/\partial k_{12} & \partial a_3/\partial c_{13}\\ \partial a_4/\partial k_{11} & \partial a_4/\partial k_{12} & \partial a_4/\partial c_{13}\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B_{22}}{\partial X_2}=\left(\frac{\partial A_2}{\partial K}\right)^T=\begin{bmatrix}\partial b_4/\partial x_3 & \partial b_4/\partial x_4\\ \partial b_5/\partial x_3 & \partial b_5/\partial x_4\\ \partial b_6/\partial x_3 & \partial b_6/\partial x_4\end{bmatrix} \tag{225}$$

$$\frac{\partial B_{22}}{\partial K}=\begin{bmatrix}\partial b_4/\partial k_{11} & \partial b_4/\partial k_{12} & \partial b_4/\partial c_{13}\\ \partial b_5/\partial k_{11} & \partial b_5/\partial k_{12} & \partial b_5/\partial c_{13}\\ \partial b_6/\partial k_{11} & \partial b_6/\partial k_{12} & \partial b_6/\partial c_{13}\end{bmatrix}$$

式(167)より、微係数行列 $\partial A_2/\partial K$ の各要素は次式で表わされる。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial a_3}{\partial k_{11}}=0 \quad , \quad \dfrac{\partial a_3}{\partial k_{12}}=0 \quad , \quad \dfrac{\partial a_3}{\partial c_{13}}=\dfrac{c_0}{\left(c_{13}-1\right)^2}\\ \dfrac{\partial a_4}{\partial k_{11}}=0 \quad , \quad \dfrac{\partial a_4}{\partial k_{12}}=0 \quad , \quad \dfrac{\partial a_4}{\partial c_{13}}=0\end{cases} \tag{226}$$

式(187)より、微係数行列$\partial B_{22}/\partial K$の各要素は次式で表わされる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial b_4}{\partial k_{11}}=\frac{\partial f_4}{\partial q_1}\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} \quad , \quad \frac{\partial b_4}{\partial k_{12}}=\frac{\partial f_4}{\partial q_1}\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}\partial k_{12}} \quad , \quad \frac{\partial b_4}{\partial c_{13}}=\frac{\partial f_4}{\partial q_1}\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}\partial c_{13}} \\
&\frac{\partial b_5}{\partial k_{11}}=\frac{\partial b_4}{\partial k_{12}} \quad , \quad \frac{\partial b_5}{\partial k_{12}}=\frac{\partial f_4}{\partial q_1}\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} \quad , \quad \frac{\partial b_5}{\partial c_{13}}=\frac{\partial f_4}{\partial q_1}\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}\partial c_{13}} \\
&\frac{\partial b_6}{\partial k_{11}}=\frac{\partial b_4}{\partial c_{13}} \quad , \quad \frac{\partial b_6}{\partial k_{12}}=\frac{\partial b_5}{\partial c_{13}} \quad , \quad \frac{\partial b_6}{\partial c_{13}}=\frac{\partial f_4}{\partial q_1}\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}^2}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial c_{13}^2}
\end{aligned} \tag{227}
$$

式(227)中の微係数は式(188)より、次式で表される。

$$
\frac{\partial f_4}{\partial q_1}=c_0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f_4}{\partial c_{13}^2}=-2\frac{c_0}{\left(c_{13}-1\right)^3}x_3 \tag{228}
$$

式(227)で表される、地下水流出成分q_2の二次微係数に関する強制入力項には、表面・中間流出成分q_1の二次微係数$\partial^2 q_1/\partial k_{11}^2$ ～$\partial^2 q_1/\partial c_{13}^2$が必要となることに注意する。
mを任意のタイムステップとして、式(222)を離散表示すると、次式となる。

$$
\begin{bmatrix} W_{21} \\ \hline W_{22} \end{bmatrix}_{m+1}=\left[\begin{array}{c|c} \phi_5 I & \phi_6 I \\ \hline \phi_7 I & \phi_8 I \end{array}\right]\begin{bmatrix} W_{21} \\ \hline W_{22} \end{bmatrix}_{m}+\left[\begin{array}{c|c} \gamma_5 I & \gamma_6 I \\ \hline \gamma_7 I & \gamma_8 I \end{array}\right]\begin{bmatrix} V_{21} \\ \hline V_{22} \end{bmatrix}_{m} \tag{229}
$$

式(229)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\left(W_{21}\right)_{m+1}&=\phi_5\left(W_{21}\right)_m+\phi_6\left(W_{22}\right)_m+\gamma_6\left(V_{22}\right)_m \\
\left(W_{22}\right)_{m+1}&=\phi_7\left(W_{21}\right)_m+\phi_8\left(W_{22}\right)_m+\gamma_8\left(V_{22}\right)_m
\end{aligned} \tag{230}
$$

ϕ_5～ϕ_8及びγ_5～γ_8の係数は式(168)中で用いた係数と同じである。

式(230)の漸化式により計算される変数w_{10}～w_{18}を式(214)に代入すると、任意の離散時刻mにおける地下水流出成分q_2の二次微係数が解析的に算定されたことになる。

以上の理論展開により、表面・中間流出成分q_1のモデル定数k_{11}, k_{12}及びc_{13}に関する二次微係数$\partial^2 q_1/\partial k_{11}^2$ ～$\partial^2 q_1/\partial c_{13}^2$及び地下水流出成分$q_2$のモデル定数$k_{11}$, k_{12}及びc_{13}に関する二次微係数$\partial^2 q_2/\partial k_{11}^2$ ～$\partial^2 q_2/\partial c_{13}^2$が計算されたため、それらの微係数を式(196)に代入することにより、全流出成分qのモデル定数c_{11}, c_{12}及びc_{13}に関する二次微係数$\partial^2 q/\partial c_{11}^2$ ～$\partial^2 q/\partial c_{13}^2$の算定が可能となる。

以上、2 段タンク型貯留関数モデルにおけるパラメータc_{11}, c_{12}及びc_{13}についての一次及び二次微係数が算出されたので、(i)**一階ニュートン法**、(ii)**ダビドン法**を用いた 2 種類の最適化手法が実行可能となる。

６．河道追跡モデルの概要 [2)]

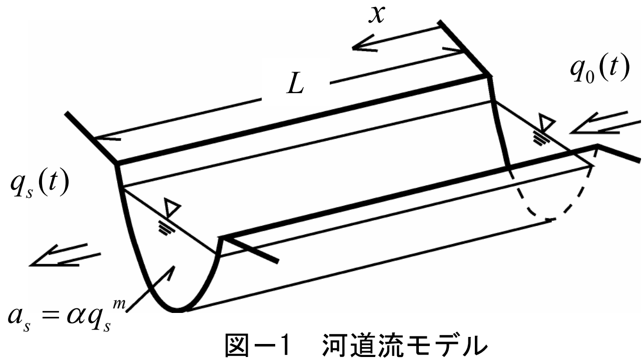
流域面積が小さい時は斜面系流出が卓越して、河道系での遅れ時間を無視できると考えられるため、流域全体を**単一流域モデル**として洪水流出解析を行う場合が多い。しかも、比較的小さいダム流域などの山地河川流域の流出解析に貯留関数法が広範に用いられてきた。しかしながら、流域面積が大きくな

ると、河道における降雨の遅れなどの河道効果が無視できなくなる。このとき、流域流出解析と河道追跡を組込む**複合流域モデル**の構築が必要となる。

河道追跡モデルとして、横流入量がない場合のKinematic wave解を貯留関数解に集中化した基礎式は、以下に示されるシステム方程式で表される（**図－1**参照）。

$$\begin{cases} \dfrac{ds_s}{dt} = q_0 - q_s \\ s_s = k_3 q_s^{p_3} + k_4 \dfrac{d}{dt}\left(q_s^{p_4}\right) \end{cases} \tag{231}$$

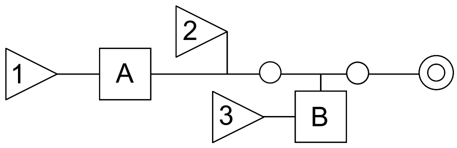
$$a_s = \alpha q_s^m \tag{232}$$



図－1　河道流モデル

ここに、t： 時間(s), s_s ：河道貯留量(m^3), q_0 ：河道流入量(m^3/s), q_s ：河道流出量(m^3/s), a_s ：河道断面積(m^2), k_3, k_4, p_3, p_4 ：モデル定数, α, m ：河道定数

式(231)の貯留関数モデルは分割流域での流出解析で用いられた基本式と同一形式である。また、安定した数値解を得る目的と最適化計算時間の短縮化を図るために、上式の計算を無次元領域で行う。なお、河道追跡モデルでは、6 個のパラメータの設定が必要となるが、これらの定数はすべて**既知**となる。計算手法の詳細は参考文献 2) を参照されたい。**図－2** に複合流域モデルの概念を示す。



図－2 複合流域モデルの概念図（流域・河道ネットワーク例）

図－2の△は分割流域を表し、分割流域では降雨量を入力値として流域流出計算を行い、流域流出量が出力される。□は河道を表し、流域からの出力や河道の出力等の合計した値が入力値となり、河道での洪水追跡計算を行えば、河道流出量が算出される。○は合流点を表し、流域および河道からの流出量の合計値が入力値となると同時に出力値ともなる。概念的には、入力地点と出力地点は同じ地点とする。◎は観測基準点を表している。

3種類の貯留関数法を用いて、**複合流域**における洪水流出計算を行う場合、次の方法に準拠した。

① モデル定数、流出率、減衰係数及び分離時定数等は、全分割流域において同一の値をとるものとする。

② 分割流域の基底流量は、検証地点での面積比率を乗じて設定する。すなわち、検証地点まで表面流出だけを計算・追跡して最後に基底流量を加算して全流量とするのではなく、最初に各流域に基底流量を面積比で配分しておき、各分割流域の流量を全流量で計算して河道追跡を行う方法を採用する。

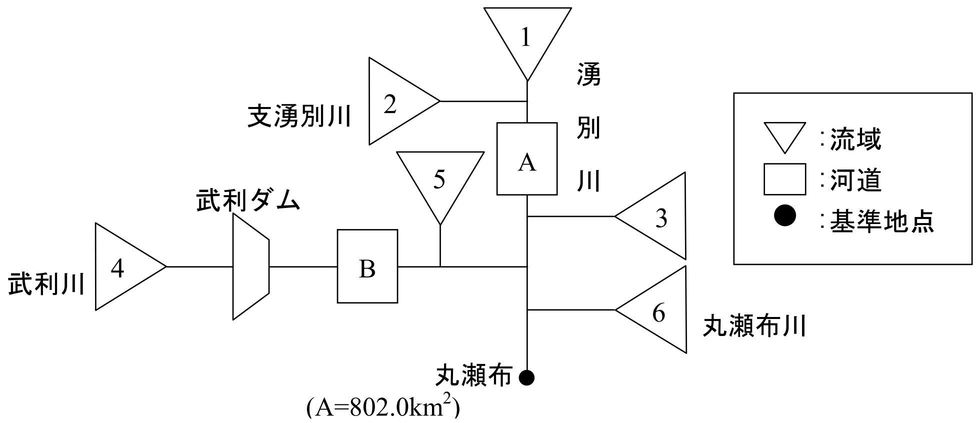
③ モデル定数最適化の評価関数として、誤差二乗和平均 (MSE) を採用して、再現ハイドログラフの精度比較を行う。

７．既往洪水データを用いた再現計算例(1)

解析例として、一級河川・湧別川の丸瀬布地点(流域面積 $A = 802.0\text{km}^2$)における平成 13 年(2001 年)9 月 10 日の洪水を選定した。解析洪水例の特性を要約して**表ー1** に示す。また、流域・河道網図を**図ー3** に、分割流域面積及び河道の諸元をそれぞれ、**表ー2** と**表ー3** に示す。湧別川水系における既往 32 洪水例の平均値を参考にして [9]、1 段タンク型モデルでは、減衰係数 $\lambda = 0.014$ の値を用いた。また、2 段タンク型モデルでは、分離時定数 $T_c = 75.8$ 、減衰係数 $\delta = 2.1$ とした。

表ー1　解析洪水データの洪水特性

	ピーク流量 (m^3/s)	比流量 ($m^3/s/km^2$)	平均雨量強度 (mm/h)	流出率
丸瀬布	645.81	0.81	2.74	0.64



図ー3　　流域・河道網　(湧別川・丸瀬布)

表ー2　分割流域面積

流域	流域面積(km^2)
1	130.17
2	143.80
3	82.94
4	280.31
5	44.18
6	120.60
合計	802.00

表ー3　河道諸元

河道	河道長(km)	$a_s = \alpha q_s^m$	
		α	m
A	20.5	1.3834	0.6765
B	7.3	1.5532	0.6642

これまでに 3 種類の貯留関数型流出モデルに関する最適過程を詳細に述べてきた。すなわち、

(a)「有効雨量を用いた貯留関数法（一般化貯留関数モデル)」

(b)「損失項を含む貯留関数法（1 段タンク型貯留関数モデル)」

(c)「地下水流出成分を含む貯留関数法（2 段タンク型貯留関数モデル)」

解析対象洪水に上記の流出モデルを適用して、以下のケースに関してモデル定数の最適同定した結果を示す。

ケース①　単一流域モデル

丸瀬布地点より上流を**単一流域**として、**一階ニュートン法**（一次微係数利用）と**ダビドン法**（一次微係数と二次微係数利用）の 2 種類の最適化手法を適用して、解析結果の比較を行う。

ケース② 複合流域モデル

丸瀬布地点より上流を**複合流域**として、**一階ニュートン法**を用いてモデル定数の最適化を行い、**単一流域**解析結果と比較する。

また、式(1)に定義されている目的関数である *MSE* だけでなく、種々の流出モデルの差異による解析結果を比較するために、下記の精度評価指標を併せて記載する。

カイ二乗基準

$$KAI2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{q_{oi} - q_{ci}}{\sqrt{q_{oi}}}\right)^2 \quad \text{[mm/h]} \tag{233}$$

ハイドログラフ相対誤差

$$J_{re} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left|q_{oi} - q_{ci}\right|}{q_{oi}} \tag{234}$$

平均２乗誤差の平方根（*Root Mean Squares Error*）

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(q_{oi} - q_{ci}\right)^2} \quad \text{[mm/h]} \tag{235}$$

ピーク流量に対する誤差指標

$$E = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{q_{oi} - q_{ci}}{q_{op}}\right)^2 \tag{236}$$

ハイドロ波形の誤差

$$E_w = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{q_{oi} - q_{ci}}{q_{oi}}\right)^2 \tag{237}$$

流出ボリューム誤差

$$E_v = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_{oi} - \sum_{i=1}^{N} q_{ci}}{\sum_{i=1}^{N} q_{oi}} \tag{238}$$

ピーク流量誤差

$$E_p = \frac{q_{op} - q_{cp}}{q_{op}} \tag{239}$$

ここに、q_{oi}：観測流出高[mm/h]、q_{ci}：計算流出高[mm/h]、q_{op}：観測ピーク流出高[mm/h]、q_{cp}：計算ピーク流出高[mm/h]、N：データ数

解析結果　ケース①　単一流域モデル

3 種類の貯留関数型流出モデルについて、最適化手法の違い（**一階ニュートン法**と**ダビドン法**）によるモデル定数及び評価指標の解析結果を**表－4** に示す。

3 種の貯留関数モデルともに、最適化手法の違いによるモデル定数の最適値に差異は認められない。また、8 種の誤差評価指標についても同様に、最適化手法の違いによる差異は見られない。

表－4　流出モデル及び最適化手法の違いにおける評価指標の差異
（単一流域解析）

単一流域	有効雨量を用いた貯留関数法		損失項を含む貯留関数法		地下水流出を含む貯留関数法	
最適化手法	ニュートン法	ダビドン法	ニュートン法	ダビドン法	ニュートン法	ダビドン法
流域	単一流域		単一流域		単一流域	
収束回数	9	7	7	7	10	6
k_{11}	24.892	24.886	56.628	56.628	40.745	40.745
k_{12}	150.264	150.196	120.320	120.320	307.642	307.642
c_{11}	―	―	11.377	11.377	8.186	8.186
c_{12}	―	―	0.049	0.049	0.242	0.242
c_{13}	―	―	1.171	1.171	1.970	1.971
f_c	1.771	1.771	―	―	―	―
$RMSE$ (mm/h)	0.200	0.200	0.129	0.129	0.127	0.127
$KAI2$ (mm/h)	0.076	0.076	0.020	0.020	0.031	0.031
J_{pe}	0.014	0.014	0.142	0.142	0.049	0.049
J_{re}	0.255	0.255	0.185	0.185	0.200	0.200
E_w	0.117	0.117	0.086	0.086	0.082	0.082
E	0.005	0.005	0.002	0.002	0.002	0.002
E_v	0.059	0.058	0.025	0.025	−0.064	−0.063
E_p	−0.014	−0.014	0.142	0.142	0.049	0.049

（注） 初期値は $f_c = 1.5$, $c_{11} = 9.0$, $c_{12} = 0.15$, $c_{13} = 1.5$ とした。ただし、地下水流出を含む貯留関数法にダビドン法を適用した場合、初期値を $c_{11} = 10.0$, $c_{12} = 0.15$, $c_{13} = 1.5$ とすると、発散した。

解析結果　ケース②　複合流域モデル

湧別川・丸瀬布における各種貯留関数モデルの**単一流域・複合流域**計算によるモデル定数及び評価指標の解析結果を**表－5** に、実測・計算ハイドログラフの比較を**図－4** に示す。

表－5 及び**図－4** に示されるように、3 種の貯留関数モデルに関しては、単一流域解析と複合流域解析の違いによる最適化精度指標、モデル定数の最適値及びハイドログラフに顕著な差異は認められない。しかしながら、分割流域毎の降雨分布や河道貯留の影響を再現した複合流域解析の方が単一流域モデルに比べて、ハイドログラフの相対誤差（J_{re}）、流出波形誤差（E_w）及び流出ボリューム誤差（E_v）の値が小さい。また、単一流域解析に比べて、複合流域解析では河道貯留効果の影響を受けるために、

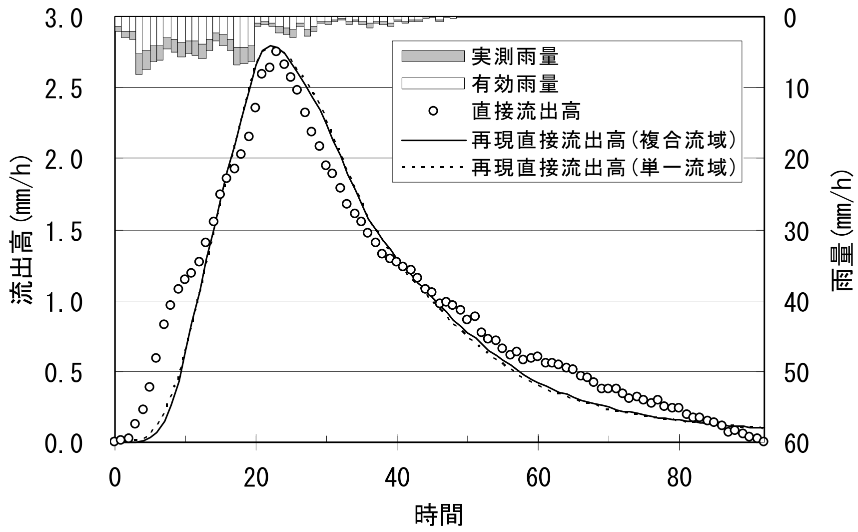
モデル定数 f_c , c_{11} が大きくなっている。c_{12} 及び c_{13} の値に関しては、単一・複合流域モデルにおいて大きな差異は見られない。

3 種の貯留関数モデルの結果を比較すると、単一・複合流域解析ともに、ピーク流量近傍での再現性は一般化貯留関数モデルと 2 段タンク型モデルが良く、流出ボリュームの再現性は 1 段タンク型及び 2 段タンク型モデルが良好であるといえる。

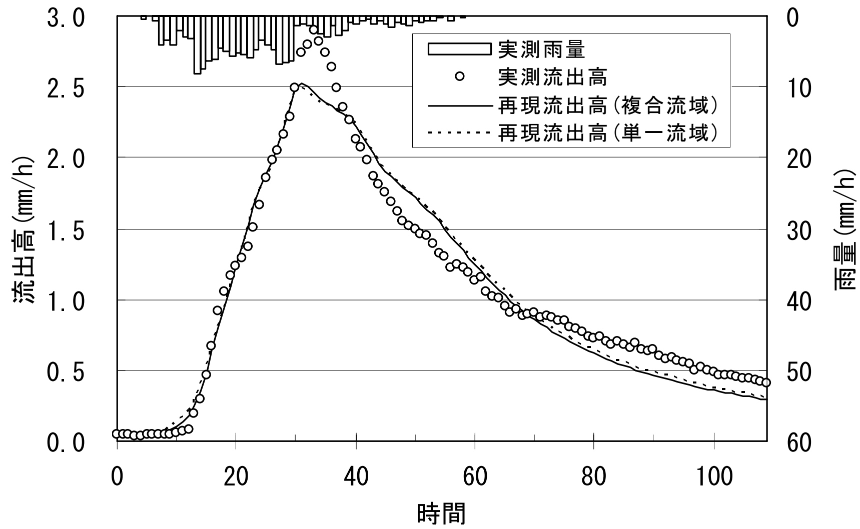
表－5　流出モデル及び最適化手法の違いにおける評価指標の差異
（複合流域解析）

	有効雨量を用いた貯留関数法		損失項を含む貯留関数法		地下水流出を含む貯留関数法	
最適化手法	一階ニュートン法		一階ニュートン法		一階ニュートン法	
流域	単一流域	複合流域	単一流域	複合流域	単一流域	複合流域
収束回数	9	7	7	6	10	9
k_{11}	24.892	35.634	56.628	81.475	40.745	57.932
k_{12}	150.264	308.559	120.320	233.824	307.642	678.457
c_{11}	—	—	11.377	16.369	8.186	11.639
c_{12}	—	—	0.049	0.046	0.242	0.264
c_{13}	—	—	1.171	1.202	1.970	2.017
f_c	1.771	2.536	—	—	—	—
$RMSE$ (mm/h)	0.200	0.200	0.129	0.141	0.127	0.120
$KAI2$ (mm/h)	0.076	0.079	0.020	0.020	0.031	0.019
J_{pe}	0.014	0.019	0.142	0.130	0.049	0.058
J_{re}	0.255	0.242	0.185	0.167	0.200	0.128
E_w	0.117	0.117	0.086	0.060	0.082	0.035
E	0.005	0.005	0.002	0.002	0.002	0.002
E_v	0.059	0.049	0.025	0.019	−0.064	−0.021
E_p	−0.014	−0.019	0.142	0.130	0.049	0.058

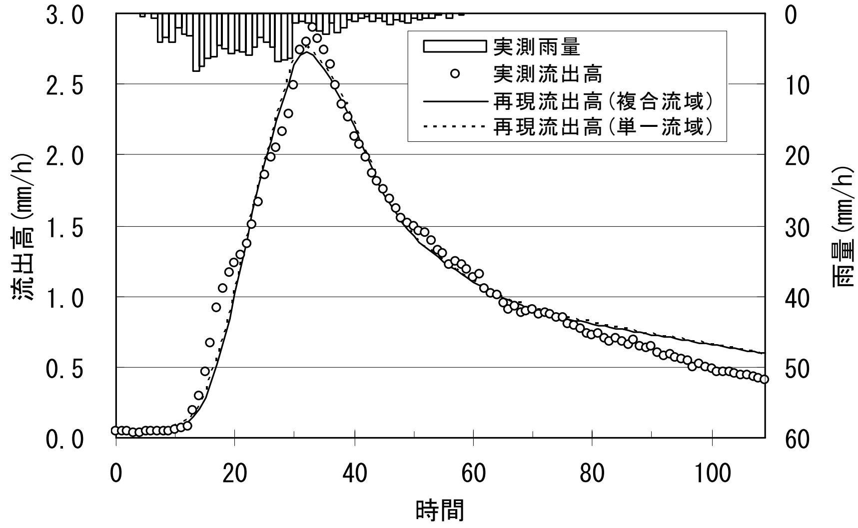
（注）初期値は全てのケースにおいて、$f_c = 1.5$, $c_{11} = 9.0$, $c_{12} = 0.15$, $c_{13} = 1.5$ を与えた。



図－4(1)　一般化貯留関数モデルによる単一・複合流域解析の比較
[湧別川・丸瀬布　　平成13年(2001年)9月10日20時～14日16時　93時間]



図－4(2)　損失項を含む貯留関数法による単一・複合流域解析の比較
[湧別川・丸瀬布　　平成13年(2001年)9月10日10時～14日23時　110時間]



図－4(3)　地下水流出を含む貯留関数法による単一・複合流域解析の比較
[湧別川・丸瀬布　　平成13年(2001年)9月10日10時～14日23時　110時間]

８．既往洪水データを用いた再現計算例(2)

もう１つの解析例として、信濃川・笠堀ダム(流域面積 $A = 70.0\mathrm{km}^2$)における比較的規模の大きな２個の洪水を選定した。これらの洪水解析例は２山以上のピークを有する洪水であることが特徴として掲げられる。解析洪水例の特性を要約して**表－6** に示す。

１段タンク型モデルでは、減衰係数 $\lambda = 0.019$ の値を用いた。２段タンク型モデルにおける分離時定数は、ハイドログラフ低減部曲線を片対数紙にプロットして、勾配がもっとも緩やかな直線部の傾きの逆数より求めた。その値を**表－6** に示す。また、減衰係数は $\delta = 2.1$ に固定した。

表－6　解析洪水データの洪水特性

笠堀ダム	ピーク流量 $(\mathrm{m^3/s})$	比流量 $(\mathrm{m^3/s/km^2})$	平均雨量強度 (mm/h)	流出率	分離時定数 T_c	減衰係数 δ
H7.7.16洪水	303.59	4.34	5.02	0.87	113.62	2.10
H7.8.1洪水	236.63	3.38	6.06	0.69	74.93	2.10

以下に、２ 解析対象洪水に上記の流出モデルを適用して、それぞれの貯留関数型流出モデルのパラメータを２種類の最適化手法、すなわち、

(a) 一階ニュートン法（一次微係数利用）

(b) ダビドン法（一次微係数と二次微係数利用）

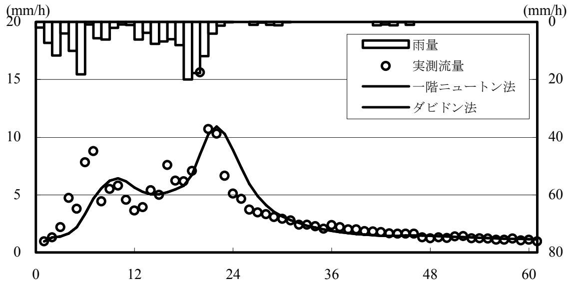
を用いて最適同定した結果を図表にて示す。

図－5 と**図－6** 中に表記される**「二次元探索」**と**「一次元探索」**による結果は、それぞれ、「3.1 モデル定数 k_{11} と k_{12} による二次元同時探索」と「3.2 フリクション・ファクター f_c による一次元探索」の手法に対応する。

また、３種の貯留型流出モデル及び２種の最適化手法の差異による解析結果を比較するために、目的関数である MSE だけでなく、前述した精度評価指標も併せて**表－7** と**表－8** に記載した。

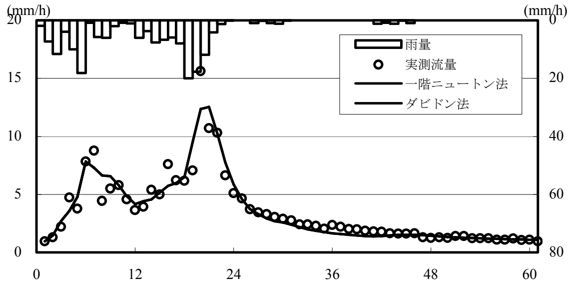
(1) 信濃川・笠堀ダムにおける平成 7 年 7 月 16 日洪水解析結果

一次元探索



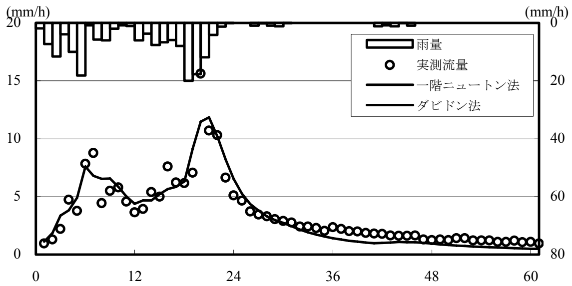
	f_c	計算回数
一階Nwtn法	1.836	13 回
ダビドン法	1.835	15 回

二次元探索



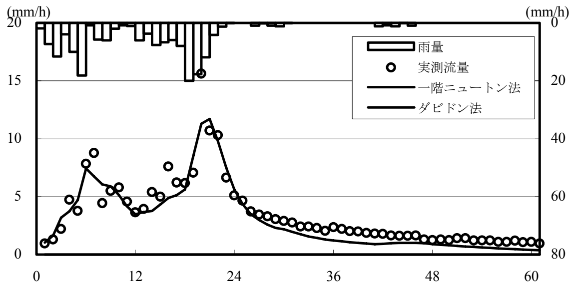
	k_{11}	k_{12}	計算回数
一階Nwtn法	10.014	4.718	2 回
ダビドン法	10.024	4.719	5 回

１段タンク型



	c_{11}	c_{12}	c_{13}	計算回数
一階Nwtn法	5.499	0.026	1.036	10 回
ダビドン法	5.499	0.026	1.036	11 回

２段タンク型



	c_{11}	c_{12}	c_{13}	計算回数
一階Nwtn法	―	―	―	発散
ダビドン法	4.601	0.055	1.089	8 回

図－5　定数解析結果及びハイドログラフ比較

表－7　流出モデル及び最適化手法の違いにおける評価指標の差異

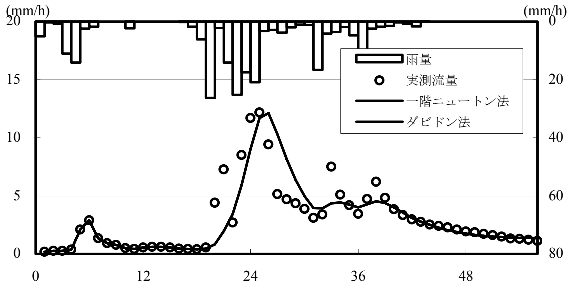
		ピーク流量	MSE	$KAI2$	J_{re}	$RMSE$	E	E_w	E_v	E_p
一次元探索	一階Nwtn法	212.451	2.645	0.385	0.196	1.626	0.011	0.074	0.020	0.300
	ダビドン法	212.457	2.644	0.385	0.196	1.626	0.011	0.074	0.020	0.300
二次元探索	一階Nwtn法	243.861	0.666	0.109	0.129	0.816	0.003	0.026	0.012	0.197
	ダビドン法	243.785	0.666	0.108	0.129	0.816	0.003	0.026	0.012	0.197
１段タンク型	一階Nwtn法	230.386	0.961	0.012	0.276	0.980	0.004	0.102	0.057	0.241
	ダビドン法	230.377	0.961	0.012	0.276	0.980	0.004	0.102	0.056	0.241
２段タンク型	一階Nwtn法	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	ダビドン法	227.889	1.048	0.266	0.310	1.024	0.004	0.126	0.154	0.249

一般化貯留関数モデルにおける一次元探索と二次元同時探索結果に大きな差異が見られる。1 段タンク型貯留関数モデルでは一階ニュートン法とダビドン法ともに同じ最適値に収束している。2 段タンク型貯留関数モデルでは一階ニュートン法が発散し、ダビドン法で収束している。

一般化貯留関数モデルの一次元探索はピーク近傍での再現性が悪い。J_{re}（ハイドログラフ相対誤差）と E_p（ピーク相対誤差）の精度指標から判断すると、一般化貯留関数モデルにおける定数の二次元同時探索によるハイドログラフの再現性は最も良い。次いで、実測・計算ハイドログラフの全体形状を見る限り、1 段タンク型貯留関数モデルによる適合度は悪いとは言えない。

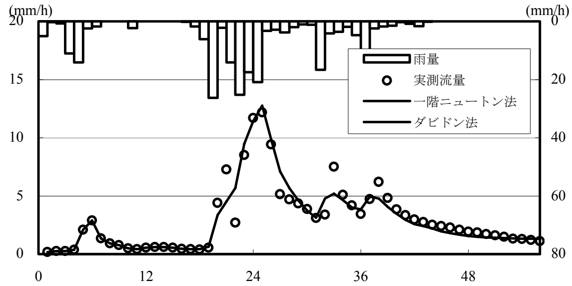
(2) 信濃川・笠堀ダムにおける平成７年８月１日洪水解析結果

一次元探索



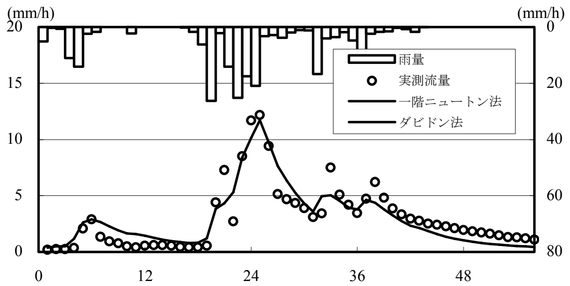
	f_c	計算回数
一階Nwtn法	1.419	14 回
ダビドン法	1.418	12 回

二次元探索



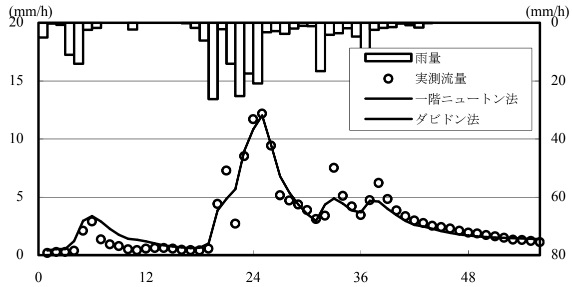
	k_{11}	k_{12}	計算回数
一階Nwtn法	―	―	発散
ダビドン法	8.825	4.430	5 回

１段タンク型



	c_{11}	c_{12}	c_{13}	計算回数
一階Nwtn法	6.149	0.036	1.344	8 回
ダビドン法	6.151	0.036	1.344	7 回

２段タンク型



	c_{11}	c_{12}	c_{13}	計算回数
一階Nwtn法	―	―	―	発散
ダビドン法	4.907	0.068	1.517	10 回

図－6　定数解析結果及びハイドログラフ比較

表－8　流出モデル及び最適化手法の違いにおける評価指標の差異

		ピーク流量	*MSE*	*KAI2*	J_{re}	*RMSE*	E	E_w	E_v	E_p
一次元探索	一階Nwtn法	235.598	2.175	0.370	0.148	1.475	0.015	0.070	0.025	0.004
	ダビドン法	235.716	2.169	0.369	0.148	1.473	0.015	0.070	0.025	0.004
二次元探索	一階Nwtn法	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	ダビドン法	248.195	0.644	0.148	0.116	0.803	0.004	0.042	0.019	-0.049
１段タンク型	一階Nwtn法	227.519	1.139	0.030	0.614	1.067	0.008	0.726	0.012	0.039
	ダビドン法	227.484	1.139	0.030	0.614	1.067	0.008	0.726	0.012	0.039
２段タンク型	一階Nwtn法	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	ダビドン法	233.812	0.744	0.372	0.436	0.862	0.005	0.489	-0.029	0.012

一般化貯留関数モデルにおける一次元探索では２つの最適化手法とも同等な収束値を得ている。二次元同時探索では、ダビドン法のみ収束している。1 段タンク型貯留関数モデルでは、一階ニュートン法とダビドン法ともにほぼ同じ最適値に収束している。2 段タンク型貯留関数モデルでは、一階ニュートン法が発散し、ダビドン法で収束する結果となった。

３種類の貯留関数モデルによるピーク流量の再現は非常に良く、E_p（ピーク相対誤差）の絶対値は最大でも 5%以下である。**図－6** に示される実測・計算ハイドログラフを比較すると、2 段タンク型貯留関数モデルによる結果が高い適合度を示している。

９．まとめ

本報告では、3 種類の貯留関数型流出モデルに 2 種類の最適化手法を適用する際の数学的論拠を中心に記述してきた。以下に、適用例から得られた結果を要約して示す。

(1) 一般に、流出モデル定数の最適化計算には、一階ニュートン法を用いれば十分であると言われてきている。しかしながら、数学的最適化の適用にあたってしばしば直面する課題は、定数の初期値の与え方で、解が発散することである。笠堀ダムにおける解析例のうち、とくに 2 段タンク型貯留関数モデルの一階ニュートン法において、最適値が得られなかったケースもあった。

(2) 一階ニュートン法で発散した場合でも、ダビドン法による最適化手法は収束しているということである。さらに、収束計算回数が減少するケースも多かった。3 種類の貯留関数モデルにおいて最適値が得られた洪水例では、一階ニュートン・ダビドン法ともに同定値はほぼ等しい値を取っている。しかしながら、丸瀬布地点の単一流域モデルにおいて、地下水流出を含む貯留関数法にダビドン法を適用した場合、初期値の違いによっては、解が収束しないこともあった。

(3) 一山洪水ハイドログラフの最適化問題では、3 個のモデル定数を有する非線形貯留関数法においても、一階ニュートン法・ダビドン法ともに最適値が得られている洪水解析例が多く、しかも同定値はほぼ等しい値を取ることを確認している。したがって、一山洪水例でのモデル定数最適化では、実用上、一階ニュートン法で十分であると考えられる。一方、洪水ハイドログラフの形状が複雑になってくると、山・谷部での曲率、すなわち、二次微係数が収束条件上、重要な要因となる。笠堀ダムの解析例に見られた多峰性ハイドログラフの最適化問題では、二次微係数を用いたダビドン法が威力を発揮すると考えられる。

(4) 洪水流出モデルの選択にあたっては、自由度の大きい、すなわち、パラメータ数が多い 1 段・2 段タンク型貯留関数モデルの目的関数値が、一般化貯留関数モデルのそれよりも小さくなる傾向にあることは自明である。たとえば、1 段タンク型モデルと 2 段タンク型モデルを比べると、2 段タンク型モデルの方の再現性が良くなることは容易に推測される。

(5) 一般化貯留関数モデルは 2 個のパラメータを持ち、従来、定数の最適化には二次元探索法が採用されてきた。しかしながら、式(26)で表わされるモデル定数関係式に注目すると、最適化定数は流域平均粗度のフリクション・ファクター f_c の 1 個のみとなる。本報告では、一次元探索と二次元探索を比較して、モデル定数が 1 個の一次元探索法においても、実用上十分な再現結果が得られることを検証した。実用性の観点からも、最適化計算過程における同定すべきモデル定数が 1 個となるため、計算が容易となる利点がある。

(6) さらに、フリクション・ファクター f_c の一次元探索法では、必ず最適値が得られ、しかも一階ニュートン法とダビドン法で同等の最適値が得られたことは注目すべきことである。f_c のみを有する一般化貯留関数モデルによる再現結果は、1 段・2 段タンク型貯留関数モデルによるそれらと遜色がないことが確認されたので、今後は数多くの洪水例に適用して、モデルの有効性を検証していく必要があると考える。

(7) **図-4** に示されるように、丸瀬布地点での解析結果では単一流域・複合流域モデルによる再現ハイドログラフには顕著な差異が見られない。丸瀬布での流域規模では、単一流域モデルでも実用上十分な予測精度で、洪水逐次予測(operational forecast)が可能となる。一方、複合流域解析においては、支川および任意の河道からの流出量が計算されることから、流量観測値が得られない中小河川での洪水ハイドログラフ推定、すなわち、PUB 問題にも対応可能なモデルと言える。

(8) 今後の課題として、複合流域解析にダビドン法を適用可能な理論展開が必要となる。また、本報告で述べた最適化手法の菅原のタンクモデルへの理論展開及び拡張も期待できる。

参考文献

1) Gupta, V.K. and Sorooshian, S. : The Automatic Calibration of Conceptual Catchment Models Using Derivative-Based Optimization Algorithms， Water Resources Research，21(4)，pp.473-485，1985.

2) (財)北海道河川防災研究センター・研究所　編集・発行：一般化貯留関数法による流域流出解析・河道洪水追跡実用計算法，152p.，2001.

3) 星　清：成分回帰分析法，土木試験所月報，No.397，pp.20-26，1986.

4) 星　清：やさしい数学的最適化手法，土木試験所月報，No.398，pp.26-35，1986.

5) 星　清・山岡勲：雨水流法と貯留関数法との相互関係，第 26 回水理講演会論文集，pp.273-278，1982.

6) 星　清：やさしい微分方程式の数値解法，土木試験所月報，No.395，pp.29-38，1986.

7) 北海道開発土木試験所・河川研究室：実用的な洪水流出計算法，北海道開発土木試験所，185p.，1987.

8) 北海道開発局開発土木研究所・若手水文学研究会：現場のための水文学，98p.，1994.

9) (財)北海道河川防災研究センター・研究所　編集・発行：単一流域を対象とした貯留関数法の精度比較，189p.，2002.

10) 佐々木靖博・星　清・井出康郎：損失項を含む総合化貯留関数法の精度評価，河川に関する論文集，土木学会，第 6 巻，pp.303-308，2000.

11) 馬場仁志・星　清・橋本識秀：損失機構を組み合わせた貯留関数モデルの総合化，水工学論文集、第 43 巻，pp.1085-1090，1999.

12) 星　清・中津川誠：地下水流出成分を含む流域・河道系における貯留関数法の同定，(財)北海道河川防災研究センター・研究所紀要，XIII，pp.253-272，2002.

13) 秋田　大輔・星　清：2 段タンク型貯留関数法の最適化比較，(財)北海道河川防災研究センター・研究所紀要，XIV，pp.249-282，2003.

14) 中津川誠・星　清・橋本識秀：成分分離に基づく流域・河道追跡のための貯留関数モデルの同定，水工学論文集，第 46 巻，pp.151-156，2002.

15) 馬場仁志・星　清：蒸発散を組み合わせた二段型貯留関数モデルの提案，河川技術に関する論文集，第 7 巻，pp.459-458，土木学会, 2001.

16) 園山裕士・星　清・橋本識秀：実用的 2 段タンク型貯留関数法の提案，土木学会北海道支部論文報告集，第 58 号，pp.336-339，2002.

17) 日野幹雄・長谷部正彦：水文流出解析，森北出版，254p.，1985.

18) 日野幹雄：確率過程水文学と私，研究討論会「20 世紀の水文・水資源学－21 世紀における発展の礎に－」，pp.17-35，土木学会水理委員会・水文・水質源学会共催，2001.