

# Froude数とShields数の間の関数関係を考慮した デューン-平坦床遷移過程の解析

Analysis of the Dune-Flat Bed Transition with the  
Functional Relationship between the Froude and Shields Numbers considered

泉 典洋<sup>1</sup>・山口里実<sup>2</sup>

Norihiro IZUMI and Satomi YAMAGUCHI

<sup>1</sup> 北海道大学 大学院工学研究科 教授

<sup>2</sup> 北海道大学 大学院工学研究科 日本学術振興会特別研究員

## 要 旨

水位-流量曲線に見られるヒステリシス現象や単一水理条件下における河床形態の多価性がデューン-平坦床遷移時に生じる亜臨界分岐に起因する可能性を、著者らは弱非線形解析を用いて明らかにしている（以降、前報と呼ぶ）。

本研究は、前報で用いられていた近似解法を用いずに同様の解析を行うと同時に、フルード数とシールズ数の依存関係を適切に導入し分岐パラメータとしてのフルード数を再定義することにより、実験結果の意味を再評価し理論の再検証を行ったものである。

解析の結果、河床勾配が小さく流速係数が大きい領域において、デューン-平坦床遷移は亜臨界分岐で特徴付けられることが明らかとなった。また流速係数が大きい領域における河床形態の多価性について実験結果は解析結果を裏付けることが示された。

《キーワード：デューン；非線形安定解析；線形安定解析；分岐；摂動法》

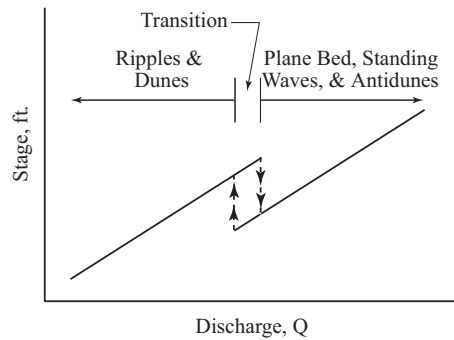


図-1 河床形態の変化によって水位-流量曲線に生じるヒステリシス．Simons and Richardson<sup>1)</sup>の図を再構成．

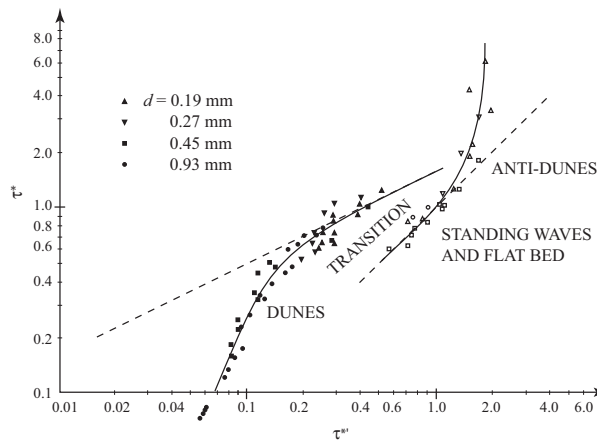


図-2 無次元の全剪断力  $\tau^*$  と有効剪断力  $\tau'^*$  の関係．Engelund<sup>2)</sup>の図を再構成．Engelund によれば，混乱を避けるために 'TRANSITION' 領域のデータは省略されていることに注意．

## 1. はじめに

河道の洪水疎通能力を正しく見積もることは河川工学上の重要な課題であり，これまでも数多くの研究が行われてきた．ところが土砂で構成された河床（移動床）の流水抵抗を正確に予測することは未だに容易ではない．移動床上には流れと河床の相互作用によって様々な規模の河床波が自律的に形成されるため，河床は水理条件の変化に応じて時々刻々と形を変える．流水抵抗は河床形態に大きな影響を受けるため，水理条件によって変化する河床形態が正確な流水抵抗の予測を困難にしているのである．

特に流量が大きく変化する状況下では河床形態は複雑な挙動を示す．流量が比較的小さいとき平坦床は不安定であり河床はデューンで覆われる．流量がある量を上回るとデューンは消滅し平坦床かアンチデューンが現れる．このような河床形態の複雑な挙動によって水位-流量曲線にはヒステリシスが生じる．Simons and Richardson<sup>1)</sup>は，流量の大きい領域ではデューンが消滅するため河床抵抗は減少し水位は低下するが，デューンから平坦床に遷移する流量よりも平坦床からデューンに遷移する流量の方が小さいため，水位-流量曲線は図-1のようなループを描くことを指摘している．

河床がデューンで覆われていると全底面剪断力の一部がデューンの形状抵抗によって受け持たれるため，土砂輸送を担う有効底面剪断力は全底面剪断力より小さくなる．Engelund<sup>2)</sup>は，Guy, Simons and Richardson<sup>3)</sup>によって行われた数多くの実験結果から有効剪断力と全剪断力との関係を記述する式を提案している．Engelund<sup>2)</sup>は，力学的相似の仮説に基づいて有効シルズ数が全シルズ数のみの関数であると仮定した．しかし図-2からもわかるように，デューン-平坦床遷移時においては，全剪断力は有効剪断力の多価関数となる（Engelund は遷移領域のデータを無視している）．これは少なくとも異なる二通りの河床形態が一つの物理条件下において現れ得ることを示している．

著者らは前報<sup>4)</sup>において，このような水位-流量曲線に見られるヒステリシスや有効底面剪断力と全底面剪断力の間に見られる多価関係の原因がデューン-平坦床遷移時における解の多価性にあるとの考え

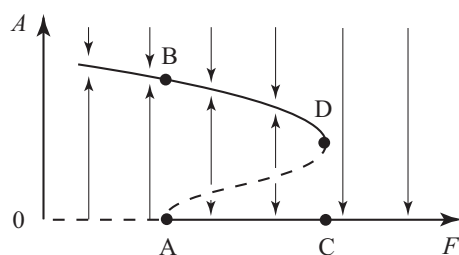


図-3 デューン-平坦床遷移時に見られる亜臨界分岐。

から，多重尺度法と増幅率展開法を用いた弱非線形解析を行うことによって，デューン-平坦床遷移が亜臨界分岐であることを理論的に示している．著者ら<sup>4)</sup>によれば，流量の増減はフルード数の増減に対応し，フルード数を分岐パラメータとして描くとデューン-平坦床遷移の分岐形態は図-3のような亜臨界分岐となる．

図-3中の縦軸は解の振幅  $A$ ，横軸はフルード数  $F$  である．フルード数が  $AB$  より小さい範囲では有限振幅を持った一つの安定解（デューン）が存在しているが， $AB$ - $CD$  間では二つの安定解，すなわち有限振幅を持った解  $BD$ （デューン）とゼロ振幅の解  $AC$ （平坦床）が存在する．さらにフルード数が増加し  $CD$  を越えるとゼロ振幅の解が唯一の安定解となる．フルード数が増加する際，解は経路  $B \rightarrow D \rightarrow C$  を辿るため，フルード数が  $CD$  を越えるまでデューンは消滅しないが，フルード数が減少する際は  $C \rightarrow A \rightarrow B$  の経路を辿り，フルード数が  $AB$  より小さくなると解は  $A$  から  $B$  にジャンプするためデューンは突然現れることになる．図-3中の  $BDCA$  のループが図-1のループに対応している．また  $AB$ - $CD$  間では二つの安定解，デューンと平坦床がいずれも存在し得るため，一つの有効剪断力に対し二つの全剪断力が存在することになる．

解析に際して著者ら<sup>4)</sup>は，底面での流速をスリップさせる定剪断層近似<sup>5),6)</sup> (constant stress layer approximation) を用いているが，その際 Fredsøe<sup>7)</sup> に倣って，放物線分布で近似される基本状態での流速分布をさらに余弦関数で近似するとともに，無次元渦動粘性係数を微小パラメータとした接合漸近展開法を用いて摂動方程式を解いている．それによって摂動方程式の線形独立な解が解析的に求められるため，高次展開における解も（非常に長くはなるが）解析的に求めることが可能となる．また彼らの解析では，限界シールズ数と局所勾配の影響を表すパラメータ  $\mu$  の値に幅があることから，フルード数とシールズ数の間の従属関係を無視している．

本研究では，前報で用いたものと同じ定剪断層近似を用いながらも，基本流速分布の余弦関数近似や接合漸近展開法を用いることなく，Chebyshev 多項式展開に基づくスペクトル法を用いて摂動方程式を解くと同時に，フルード数とシールズ数の間の従属関係を考慮することによって弱非線形安定解析を行ったものである．さらに分岐パラメータとしてのフルード数を再定義することによって，Guy et al<sup>3)</sup> の実験結果の意味を再評価し，理論との再検証を行った．

## 2. 分岐パラメータとしてのフルード数

著者らは既に前報<sup>4)</sup>において，フルード数には，実測された平均流速と水深から導かれるフルード数と，流量および河床勾配，河床材料の粒径から計算される平坦床に対応するフルード数の二通りが存在し，単位幅流量は後者と一対一に対応していることを指摘している．しかし，後者のフルード数の分岐パラメータとしての重要性については明示しておらず，後者のフルード数を用いて観測データや実験データを再評価するには至っていない．そこでここでは今一度，利根川の川俣地点における流量観測結果を用いて分岐パラメータとしてのフルード数を再定義する．

図-4は利根川の川俣において，1959年8月の洪水時に観察された水位と流速係数の関係を示したものである<sup>8)</sup>．横軸は径深  $\tilde{R}$  であり，縦軸は次式で定義される流速係数  $\varphi$  を表している．

$$\varphi = \frac{\tilde{u}_a}{\tilde{u}_f} = 6.0 + 2.5 \ln \left( \frac{\tilde{R}}{\tilde{k}_s} \right) \quad (1)$$

ここで  $\tilde{u}_a$  および  $\tilde{u}_f$  はそれぞれ平均流速および摩擦速度， $\tilde{k}_s$  は等価粗度高さである．図からわかるように，最初は 25 cm であった等価粗度  $\tilde{k}_s$  は径深  $\tilde{R}$  が 5 m を超えると突然 1 mm に減少したものの， $\tilde{R}$  が 5

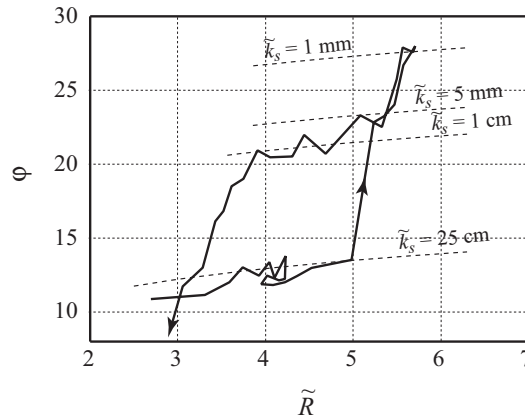


図-4 洪水時，流速係数  $\phi$  と径深  $\tilde{R}$  の間に観察されたヒステリシス．1959年8月．利根川，川俣地点．文献8)の図を再構成．

m から 4 m まで減少する間， $\tilde{k}_s = 5 \text{ mm} - 1 \text{ cm}$  の範囲にとどまっており， $\tilde{R}$  が 3 m まで減少して初めて元の  $\tilde{k}_s = 25 \text{ cm}$  に戻っている．このようなヒステリシスが見られる原因は，水位上昇時には  $\tilde{R} = 5 \text{ m}$  においてデューンから平坦床へ遷移したが，水位下降期に平坦床からデューンに遷移したのは  $\tilde{R} = 4 \text{ m}$  であったためと考えられる．

線形安定解析では，平坦床に対し微小な擾乱を与えることによって基本状態である平坦床の安定性を調べる．その際，平坦床の安定性を支配するパラメータとして用いるのは，デューンが生じる前の平坦床に対応するフルード数である．平坦床の場合，粗度は河床を構成する砂の粒径のみに依存する．したがって径深を水深で近似すると，平坦床に対する流速係数は次式で表される．

$$\Phi = \frac{\tilde{U}_a}{\tilde{U}_f} = 6.0 + 2.5 \ln \left( \frac{\tilde{D}}{m \tilde{d}_s} \right) \quad (2)$$

ここで  $\Phi$  および  $\tilde{U}_a$ ， $\tilde{U}_f$ ， $\tilde{D}$  はそれぞれデューンの発生する前の平坦床に対応する速度係数および平均流速，摩擦速度，水深である．また  $\tilde{d}_s$  は砂の粒径， $m$  は等価粗度高さと砂の粒径 ( $m = \tilde{k}_s / \tilde{d}_s$ ) の比である． $m$  の値については様々な値が報告されているが，それらは概ね 1-5 の範囲にある．ここでは河床が完全に平坦な理想的な状態を考えているので，等価粗度  $\tilde{k}_s$  の元々の意味からすると実際の粒径に近い値を取ると予想される．そこで Kellerhals<sup>9)</sup> や Bray<sup>10)</sup> に倣って  $\tilde{k}_s = \tilde{d}_{90}$  とし， $m = \tilde{d}_{90} / \tilde{d}_{50}$  とする．ここで  $\tilde{d}_X$  は  $X\%$  粒径を表し， $\tilde{d}_s = \tilde{d}_{50}$  である．単位幅流量  $\tilde{Q}$  は次式で表される．

$$\tilde{Q} = \tilde{D} (g \tilde{D} S)^{\frac{1}{2}} \left[ 6.0 + 2.5 \ln \left( \frac{\tilde{D}}{m \tilde{d}_s} \right) \right] \quad (3)$$

ここで  $g$  は重力加速度， $S$  は平均河床勾配である．流量  $\tilde{Q}$  と河床勾配  $S$ ，砂の粒径  $\tilde{d}_s$  が与えられると上式は  $\tilde{D}$  について解くことができる．得られた  $\tilde{D}$  を用いればデューンのない平坦床に対応するフルード数  $F$  は次のように表される．

$$F = \frac{\tilde{Q}}{(g \tilde{D})^{1/2} \tilde{D}} = S^{\frac{1}{2}} \left[ 6.0 + 2.5 \ln \left( \frac{\tilde{D}}{m \tilde{d}_s} \right) \right] \quad (4)$$

式(4)より  $F$  は流量  $\tilde{Q}$  を水深  $\tilde{D}$  と摩擦速度  $\tilde{U}_f$  で無次元化したものに相当していることがわかる．河床にデューンが形成されると河床抵抗が増加するため平均流速は小さく水深は大きくなる．したがって実測値の平均流速および平均水深から求めたフルード数はデューンの形成とともに小さくなる．ところが式(4)で定義されるフルード数は， $\tilde{Q}$  および  $S$ ， $\tilde{d}_s$  が一定である限り変化しない．言い換えると，式(4)で定義される  $F$  は， $S$  および  $\tilde{d}_s$  が一定であれば河床形状に関わらず  $\tilde{Q}$  によって一意的に決まる．流量の増加が河床形態をデューンから平坦床に変化させるとすれば，弱非線形安定解析において用いるべき分岐パラメータは式(4)で定義されるフルード数であることになる．

図-5 に図-4 のデータから求められた無次元の粗度高さ  $k_s (= \tilde{k}_s / \tilde{D})$  と  $F$  の時間変化を示した． $\tilde{k}_s$  は実測された  $\tilde{u}_a$  および  $\tilde{u}_f$ ， $\tilde{R}$  を用いて式(1)から計算した値である．一方  $F$  は平均河床勾配  $S$  と粒径  $\tilde{d}_s$ ，

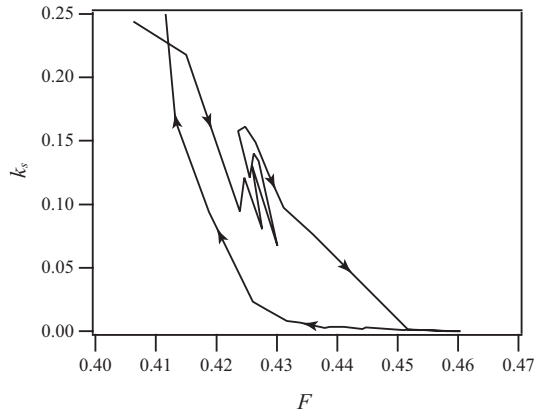


図-5 無次元粗度高さ  $k_s (= \tilde{k}_s/\tilde{D})$  と平坦床に対応するフルード数  $F$  の間に見られるヒステリシス．図-4 のデータから  $k_s$  および  $F$  を再計算しプロットし直した．矢印は時間の経過方向を示す．

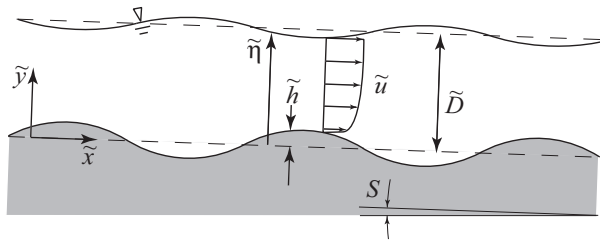


図-6 座標系．

流量  $\tilde{Q}$  を用いて式 (3) および (4) から計算されたフルード数である．デューンに覆われた河床では，粗度高さ  $\tilde{k}_s$  はデューンの波高と相関がある．したがって図-5 は， $F$  によるデューンの波高の変化を示したものであると考えられる．線形安定解析の結果によれば河床形態は平坦床に対応するフルード数  $F$  によって一意的に決まるはずである．ところが図によると  $F = 0.42-0.45$  においてデューンと平坦床の二つの河床形態が生じていることがわかる．

### 3. 定式化

#### (1) 支配方程式

図-6 で示すような波状の河床上の流れを考える．流れの運動は，二次元の Reynolds 平均された（乱流変動についてアンサンブル平均した）Navier-Stokes 方程式によって記述することができる．またここでは，流れの変化の時間スケールが河床形状変化の時間スケールに比して十分に短いことから，流れにおける非定常の効果を無視し河床形状の時間変化にのみ非定常の効果を考慮する準定常の仮定を用いる．そのとき流れは次のように表される．

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 1 + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (5)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - S^{-1} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

ここで  $x$  および  $y$  はそれぞれ流下方向および水深方向の座標， $u$  および  $v$  はそれぞれ流速の  $x$  および  $y$  方向成分， $p$  は圧力， $\tau_{ij}$  ( $i, j = x, y$ ) はレイノルズ応力テンソルである．

上式では既に次のような無次元化が行なわれている．

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{U}_f (u, v), \quad \tilde{p} = \rho \tilde{U}_f^2 p, \quad (\tilde{\tau}_{ij}, \tilde{\tau}_b) = \rho \tilde{U}_f^2 (\tau_{ij}, \tau_b) \quad (8a-c)$$

$$(\tilde{x} \tilde{y} \tilde{\eta} \tilde{h} \tilde{k}_s \tilde{d}_s) = \tilde{D}(x, y, \eta, h, k_s, d_s), \quad \tilde{t} = \frac{(1 - \lambda_p) \tilde{D}^2}{(R_s g \tilde{d}_s^3)^{1/2}} t \quad (8d, e)$$

ここで  $\tilde{\cdot}$  は次元量を意味し,  $\rho$  は水の密度,  $\tau_b$  は底面剪断力,  $\eta$  と  $h$  はそれぞれの水と底面の  $y$  方向高さ,  $\lambda_p$  は砂の空隙率,  $R_s$  は砂の水中比重 (= 1.65) である.

レイノルズ応力は Bousinesque 型の表現を使うと次のように表すことができる.

$$\tau_{xx} = 2\epsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \epsilon \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yy} = 2\epsilon \frac{\partial v}{\partial y} \quad (9a-c)$$

ここで  $\epsilon$  は無次元の渦粘性係数であり次式で表される.

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} / (U_f D) \quad (10)$$

上式中の  $\epsilon$  の見積もり方は用いる開水路乱流モデルに依存することになる.

Engelund<sup>6)</sup>は, 定剪断層近似を用いてデューンとアンチデューンの形成機構を線形安定解析によって説明することに初めて成功した. 定剪断層近似では, 河床近傍に薄い層を想定し, その中では剪断力一定, その外では渦動粘性係数  $\tilde{\epsilon}$  一定を仮定することによって, 基本流の流速分布を放物線分布で近似する. その後 Richards<sup>11)</sup>は, 実際の流速分布をより忠実に表す混合距離モデルを用いて, デューンのみならずリップルの形成まで説明することに成功している. しかし実現象との定量的な一致は必ずしも良くない. 最近では, Colombini<sup>12)</sup>がデューン形成の線形安定解析に対する混合距離モデルの適用性を精査し, 掃流砂量の見積もりに用いられる剪断力の評価位置によって河床の安定性は敏感に変化し, 剪断力を掃流層の上面で評価すると実験結果との一致が良好になることを明らかにした. 特にアンチデューンの領域では浮遊砂の影響を考慮しなくても実験データとの一致が大幅に改善される. これらの三つのモデルの中ではデューンとアンチデューンの両方で再現性の良い Colombini<sup>12)</sup>のモデルが解析には最も適切であろう. しかし混合距離モデルは複雑であるため方程式の三次展開まで考慮する弱非線形解析には不向きであり, 掃流層の厚さの見積もり方にも未だ不明な点が多い. 本論文ではデューン-平坦床遷移における非線形安定性の基本的な特性を調べることを目的とし, 前報と同様に解析が容易な定剪断層近似を用いることとする.

前述したように定剪断層近似では, 渦粘性係数は水深方向に一定であると仮定される. 同時に Engelund<sup>6)</sup>および Fredsøe<sup>7)</sup>は, 渦動粘性係数は局所的な水理条件によって決定されるものではなく, 大域的な水理条件の関数であると仮定した. そのとき線形のレベルでは渦動粘性係数は擾乱の影響を受けない. ここではその仮定を若干修正し, 渦動粘性係数に対する擾乱の影響を非線形のレベルで考慮するために, 無次元渦動粘性係数  $\epsilon$  がデューン-波長分を平均した水理量によって次のように表されるものとする.

$$\epsilon = \alpha \beta, \quad \beta = \overline{u_f(\eta - h)} \quad (11a, b)$$

ここで  $\overline{\cdot}$  はデューンの一波長平均を意味し,  $\alpha$  は定数である.  $\alpha$  の値については Engelund<sup>6)</sup>および Fredsøe<sup>7)</sup>に倣って 0.077 とする. 上式を用いるとデューンの形成による平均流速および平均水深の変化による渦動粘性係数の変化を考慮することが可能となる.

解析を進めるためには次式で定義される流関数を導入すると便利である.

$$(u, v) = \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (12)$$

流関数を用いると式 (5) および (6) は次のように書くことができる.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 1 - \alpha \beta \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \quad (13)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - S^{-1} + \alpha \beta \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \quad (14)$$

ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (15)$$

式 (13) および (14) から  $p$  を消去すると次式が得られる .

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \alpha \beta \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (16)$$

河床高さの時間変化は次の Exner 方程式によって記述できる .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q_B}{\partial x} \quad (17)$$

ここで  $q_B$  は無次元の掃流砂量であり , 次式で表される .

$$q_B = \frac{\tilde{q}_B}{(R_s g \tilde{d}_s)^{1/2} \tilde{D}} \quad (18)$$

Fredsøe は , 河床の不安定性に対する局所勾配の影響を調べ , 短波長領域において局所勾配がデューンの形成を抑制することを明らかにしている<sup>7)</sup> . 彼の解析では , Meyer, Peter-Müller 公式<sup>13)</sup> に局所勾配の影響を取り入れた次式が用いられた .

$$q_B = 8 \left\{ \theta - \theta_{th} + \mu \left( S - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\}^{\frac{3}{2}}, \quad \theta_{th} = 0.047 \quad (19)$$

ここで  $\theta$  はシールズ剪断力 ,  $\theta_{th}$  は限界シールズ剪断力 ,  $\mu$  は局所勾配の影響を表す無次元パラメータ ( $= \theta_{th} / \mu_d$ )<sup>12)</sup> ,  $\mu_d$  はクーロン動摩擦係数である . 従来の研究によると  $\mu_d$  は 0.5 程度から 0.84 の範囲にある<sup>14)</sup> . ただし  $\mu_d$  の値に応じて異なる  $\theta_{th}$  の値が用いられていることに注意しなければならない . これを考慮すると  $\mu$  は概ね 0.04 から 0.11 の範囲の値を取る . Fredsøe<sup>7)</sup> は  $\mu$  の値を 0.1 程度と推定しているが ,  $\theta_{th}$  を 0.047 としているので ,  $\mu_d = 0.47$  に相当していることになる . シールズ剪断力  $\theta$  は次のように表される .

$$\theta = \frac{\tilde{\tau}_b}{\rho R_s g \tilde{d}_s} = \theta_0 \tau_b, \quad \theta_0 = \frac{\tilde{U}_f^2}{R_s g \tilde{d}_s} = \frac{\tilde{D} S}{R_s \tilde{d}_s} = \frac{S}{R_s d_s} \quad (20a, b)$$

ここで  $\tau_b$  は前述したように無次元底面剪断力である .

## (2) 境界条件

水面における運動学的境界条件および力学的境界条件はそれぞれ次のように表される .

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } y = \eta \quad (\text{kinematic}) \quad (21)$$

$$\mathbf{e}_{ns} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } y = \eta \quad (\text{dynamic}) \quad (22)$$

$$\mathbf{e}_{ts} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } y = \eta \quad (\text{dynamic}) \quad (23)$$

ここで  $\mathbf{u}$  は流速ベクトル ( $= (u, v)$ ) ,  $\mathbf{e}_{ns}$  および  $\mathbf{e}_{ts}$  はそれぞれ水面に対する法線方向および接線方向の単位ベクトルである . 上式では , 準定常の仮定によって運動学的境界条件の非定常項は既に落とされていることに注意する必要がある . 水面に対する法線および接線方向の単位ベクトル  $\mathbf{e}_{ns}$  および  $\mathbf{e}_{ts}$  , 応力テンソル  $\mathbf{T}$  はそれぞれ次のように表される .

$$\mathbf{e}_{ts} = \frac{(1, \partial \eta / \partial x)}{[1 + (\partial \eta / \partial x)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathbf{e}_{ns} = \frac{(-\partial \eta / \partial x, 1)}{[1 + (\partial \eta / \partial x)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (24a, b)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (24c)$$

底面における運動学的境界条件は次式で表される .

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{nb} = 0 \quad \text{at } y = h \quad (\text{kinematic}) \quad (25)$$

定剪断層近似を用いる場合 , 底面における力学的境界条件として底面上でのスリップ速度が摩擦速度に比例すると仮定する<sup>6),7)</sup> . すなわち次式が成立するとする .

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{tb} = K u_f \quad \text{at } y = h \quad (\text{dynamic}) \quad (26)$$

ここで  $e_{nb}$  および  $e_{tb}$  は底面に対する単位法線ベクトルおよび単位接線ベクトル， $u_f$  は摩擦速度， $K$  はスリップ速度と摩擦速度の間の比である．摩擦速度  $u_f$  は次式で定義される．

$$u_f = \tau_b^{1/2}, \quad \tau_b = [e_{tb} \cdot \mathbf{T} \cdot e_{nb}]_{y=h} \quad (27a, b)$$

また Engelund<sup>6)</sup> に倣ってパラメータ  $K$  は次式で表されるものとする．

$$K = 1.9 + 2.5 \ln \left( \frac{\tilde{D}}{md_s} \right) = 1.9 + 2.5 \ln \left( \frac{1}{md_s} \right) \quad (28)$$

底面に対する接線および法線方向の単位ベクトル  $e_{tb}$  および  $e_{nb}$  は次のように表される．

$$e_{tb} = \frac{(1, \partial h / \partial x)}{[1 + (\partial h / \partial x)^2]^{1/2}}, \quad e_{nb} = \frac{(-\partial h / \partial x, 1)}{[1 + (\partial h / \partial x)^2]^{1/2}} \quad (29a, b)$$

### (3) 変数変換

水面と底面において境界条件を適用し易くするために，Seminara, Colombini, and Parker<sup>15)</sup> によって用いられた次の変数変換を導入する．

$$\xi = x, \quad \chi = \frac{y - h(x)}{\eta(x) - h(x)} \quad (30a, b)$$

このとき  $x$  および  $y$  微分は次のように表される．

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta - h} \left[ \chi \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + (1 - \chi) \frac{\partial h}{\partial \xi} \right] \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (31a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\eta - h} \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (31b)$$

式 (30) および (31) を用いて支配方程式と境界条件中の  $x$  および  $y$  を新たな変数  $\xi$  および  $\chi$  で書き直し以降の解析を行う．

### (4) 基本解

ここで擾乱が与えられる前の基本状態における解を示す．流れは等流状態にあり， $\xi$  に関する微分は全て消え，水深  $\eta - h$  は 1 となる．そのとき式 (5) は次のようになる．

$$1 + \alpha \frac{d^2 U}{d\chi^2} = 0 \quad (32)$$

ここで  $U$  は基本状態の流下方向流速である．全ての  $\xi$  に関する微分を落とすと式 (23) および (26) はそれぞれ次のようになる．

$$U'(1) = 0, \quad U^2(0) = \alpha K^2 U'(0) \quad (33a, b)$$

式 (33) の下，式 (32) を積分することによって平坦床上の流速  $U$  が次のように得られる．

$$U(\chi) = K + \frac{1}{\alpha} \left( \chi - \frac{1}{2} \chi^2 \right) \quad (34)$$

ここで上式を  $\chi = 0$  から 1 まで積分しても適切な抵抗則を導くことはできない．Engelund<sup>5)</sup> によると定剪断層の厚さは  $0.1925\tilde{D}$  であり，層内における流速分布は以下の対数分布則によって表される．

$$U(\chi) = 8.5 + 2.5 \ln \left( \frac{\chi}{md_s} \right) \quad (35)$$

$\chi = md_s$  から 0.1925 まで式 (35) を積分し， $\chi = 0.1925$  から 1 まで式 (34) を積分すると，河床抵抗を表す関係式 (2) が得られる．さらに式 (2) から  $F$  と  $K$  (または  $\Phi$ ) の間に次のような関係があることがわかる．

$$F = S^{1/2} (K + 4.1) = S^{1/2} \Phi \quad (36)$$



基本状態では式 (6) は次のようになる .

$$-\frac{dp}{d\chi} - \frac{1}{S} = 0 \quad (37)$$

圧力が水面 ( $\chi = 1$ ) でゼロとなる ( $p = 0$ ) という条件下で上式を積分すると次式が得られる .

$$p = \frac{1 - \chi}{S} \quad (38)$$

上式が静水圧分布を表していることは言うまでもない .

#### 4. 線形安定解析

線形安定解析では , 基本解に微小擾乱を与えることによって基本解の安定性を調べる . そのために解を基本解と微小擾乱の足し合わせとして次のような形に表す .

$$(\psi, \eta, h, p) = (\psi_0(\chi), 1, 0, p_0(\chi)) + A(\hat{\psi}_1(\xi, \chi), \hat{\eta}_1(\xi), \hat{h}_1(\xi), \hat{p}_1(\xi, \chi)) \quad (39)$$

$A$  は擾乱の振幅であり , 線形安定解析では無限小であると仮定する . 式 (39) および (30) , (31) を (16) に代入すると ,  $O(A)$  において次式が得られる .

$$\hat{\mathcal{L}}^\psi \hat{\psi}_1 + \hat{\mathcal{L}}^\eta \hat{\eta}_1 + \hat{\mathcal{L}}^h \hat{h}_1 = 0 \quad (40)$$

ここで  $\hat{\mathcal{L}}^\phi$  ( $\phi = \psi, \eta, h$ ) は線形演算子であり , 具体的な形は付録 I に示した . 後に必要となる式 (13) についても線形化された形をここに示しておく .

$$\frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \xi} + \hat{\mathcal{R}}^\psi \hat{\psi}_1 + \hat{\mathcal{R}}^\eta \hat{\eta}_1 + \hat{\mathcal{R}}^h \hat{h}_1 = 0 \quad (41)$$

ここで  $\hat{\mathcal{R}}^\phi$  ( $\phi = \psi, \eta, h$ ) は線形演算子であり付録 I に示した . 導入した変数変換のために式 (40) および (41) は水面および底面高さ  $\hat{\eta}_1$  および  $\hat{h}_1$  を未知数として含むことに注意する必要がある .

式 (21)–(23) および (25) , (26) , そして Exner 方程式 (17) , 掃流砂量式 (19) より次式が得られる .

$$\hat{\psi}_1 = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 1 \quad (42)$$

$$\hat{\mathcal{W}}^\psi \hat{\psi}_1 + \hat{\mathcal{W}}^\eta \hat{\eta}_1 = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 1 \quad (43)$$

$$-\hat{p}_1 + \hat{\mathcal{P}}^\psi \hat{\psi}_1 + \hat{\mathcal{P}}^\eta \hat{\eta}_1 + \hat{\mathcal{P}}^h \hat{h}_1 = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 1 \quad (44)$$

$$\hat{\psi}_1 = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 0 \quad (45)$$

$$\hat{\mathcal{B}}^\psi \hat{\psi}_1 + \hat{\mathcal{B}}^h \hat{h}_1 = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 0 \quad (46)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^\psi \hat{\psi}_1 + \hat{\mathcal{H}}^\eta \hat{\eta}_1 + \hat{\mathcal{H}}^h \hat{h}_1 = 0 \quad \text{at} \quad \chi = 0 \quad (47)$$

ここで線形演算子  $\hat{\mathcal{W}}^\phi$  および  $\hat{\mathcal{P}}^\phi$  ,  $\hat{\mathcal{B}}^\phi$  ,  $\hat{\mathcal{H}}^\phi$  ( $\phi = \psi, \eta, h$ ) は付録 I に示してある .

擾乱の形を次のように仮定してノーマルモード解析を行う .

$$(\hat{\psi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{h}_1, \hat{p}_1) = (\psi_1(\chi), \eta_1, h_1, p_1(\chi)) \exp(\Omega t) \exp[i(k\xi - \omega t)] + \text{c.c.} \quad (48)$$

ここで c.c. は直前の項の複素共役 ,  $\Omega$  および  $\omega$  ,  $k$  はそれぞれ擾乱の成長率および角振動数 , 波数である . 式 (40) に (48) を代入すると次式が得られる .

$$\mathcal{L}^\psi(\chi) \psi_1(\chi) + \mathcal{L}^\eta(\chi) \eta_1 + \mathcal{L}^h(\chi) h_1 = 0 \quad (49)$$

$$ikp_1(\chi) + \mathcal{R}^\psi(\chi) \psi_1(\chi) + \mathcal{R}^\eta(\chi) \eta_1 + \mathcal{R}^h(\chi) h_1 = 0 \quad (50)$$

ここで  $\mathcal{L}^\phi$  および  $\mathcal{R}^\phi$  ( $\phi = \psi, \eta, h$ ) は  $\hat{\mathcal{L}}^\phi$  および  $\hat{\mathcal{R}}^\phi$  の  $\partial/\partial\xi$  を  $ik$  で ,  $\partial/\partial\chi$  を  $d/d\chi$  で置き換えたものである .

境界条件および Exner 方程式 (42)–(47) は次のようになる .

$$\psi_1(1) = 0 \quad (51)$$

$$\mathcal{W}^\psi \psi_1(1) + \mathcal{W}^\eta \eta_1 = 0 \quad (52)$$

$$-p_1(1) + \mathcal{P}^\psi \psi_1(1) + \mathcal{P}^\eta \eta_1 + \mathcal{P}^h h_1 = 0 \quad (53)$$

$$\psi_1(0) = 0 \quad (54)$$

$$\mathcal{B}^\psi \psi_1(0) + \mathcal{B}^h h_1 = 0 \quad (55)$$

$$\mathcal{H}^\psi \psi_1(0) + \mathcal{H}^\eta \eta_1 + \mathcal{H}^h h_1 = 0 \quad (56)$$

$\mathcal{W}^\phi$  および  $\mathcal{P}^\phi$ ,  $\mathcal{B}^\phi$ ,  $\mathcal{H}^\phi$  ( $\phi = \psi, \eta, h$ ) は  $\hat{\mathcal{W}}^\phi$  および  $\hat{\mathcal{P}}^\phi$ ,  $\hat{\mathcal{B}}^\phi$ ,  $\hat{\mathcal{H}}^\phi$  の  $\partial/\partial\xi$  および  $\partial/\partial t$  をそれぞれ  $ik$  および  $\omega + i\Omega$  で,  $\partial/\partial\chi$  を  $d/d\chi$  で置き換えたものである .

$p_1(1)$  に関するもう一つの条件は, 式 (50) を水面 ( $\chi = 1$ ) で評価することによって次のように得られる .

$$ikp_1(1) + \mathcal{R}^\psi(1)\psi_1(1) + \mathcal{R}^\eta(1)\eta_1 + \mathcal{R}^h(1)h_1 = 0 \quad (57)$$

式 (53) および (57) から  $p_1(1)$  を消去して次式が得られる .

$$\mathcal{G}^\psi \psi_1(1) + \mathcal{G}^\eta \eta_1 + \mathcal{G}^h h_1 = 0 \quad (58)$$

ここで  $\mathcal{G}^\psi = \mathcal{R}^\psi(1) + ik\mathcal{P}^\psi$ ,  $\mathcal{G}^\eta = \mathcal{R}^\eta(1) + ik\mathcal{P}^\eta$ ,  $\mathcal{G}^h = \mathcal{R}^h(1) + ik\mathcal{P}^h$  である .

方程式 (49) は, 境界条件 (51) および (52), (54), (55), (58), Exner 方程式 (56) の下で Chebyshev 多項式を用いたスペクトルコロケーション法を用いて解く .

流れ関数  $\psi_1$  を Chebyshev 多項式を用いて次のように展開する .

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^N a_n T_n(\zeta) \quad (59)$$

ここで  $T_n$  は  $n$  次の Chebyshev 多項式,  $\zeta$  は範囲  $[-1, 1]$  で定義される Chebyshev 多項式の変数である . 物理領域  $\chi = [0, 1]$  は次式を用いて領域  $\zeta = [-1, 1]$  に変換される .

$$\zeta = 2\chi - 1 \quad (60)$$

式 (59) および (60) を式 (49) に代入すると  $N + 3$  個の未知数  $a_0, a_1, \dots, a_N, \eta_1, h_1$  を含む式が得られる . この式は  $\zeta$  の関数であるので,  $N - 3$  個のコロケーションポイント  $\zeta_j = \cos(j\pi/N)$  ( $j = 2, 3, \dots, N - 2$ ) で評価すると  $N - 3$  個の代数方程式が得られる . 境界条件と Exner 方程式, 計六つの条件式からは  $N + 3$  個の未知数を含む 6 個の代数方程式が得られる . これら  $N + 3$  個の未知数を含む計  $N + 3$  個の代数方程式は次のように書ける .

$$\mathbf{L}\mathbf{a} = 0 \quad (61)$$

ここで  $\mathbf{a}$  は  $N + 3$  次元ベクトルであり, 次のような形をしている .

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_N, \eta_1, h_1)^T \quad (62)$$

また  $\mathbf{L}$  は  $(N + 3) \times (N + 3)$  のマトリックスであり, 次式で表される .

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} T_0(1) & \cdots & T_N(1) & 0 & 0 \\ \check{\mathcal{W}}^\psi T_0(1) & \cdots & \check{\mathcal{W}}^\psi T_N(1) & \check{\mathcal{W}}^\eta & 0 \\ \check{\mathcal{G}}^\psi T_0(1) & \cdots & \check{\mathcal{G}}^\psi T_N(1) & \check{\mathcal{G}}^\eta & \check{\mathcal{G}}^h \\ \check{\mathcal{L}}^\psi T_0(\zeta_2) & \cdots & \check{\mathcal{L}}^\psi T_N(\zeta_2) & \check{\mathcal{L}}^\eta(\zeta_2) & \check{\mathcal{L}}^h(\zeta_2) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \check{\mathcal{L}}^\psi T_0(\zeta_{N-2}) & \cdots & \check{\mathcal{L}}^\psi T_1(\zeta_{N-2}) & \check{\mathcal{L}}^\eta(\zeta_{N-2}) & \check{\mathcal{L}}^h(\zeta_{N-2}) \\ T_0(-1) & \cdots & T_N(-1) & 0 & 0 \\ \check{\mathcal{B}}^\psi T_0(-1) & \cdots & \check{\mathcal{B}}^\psi T_N(-1) & 0 & \check{\mathcal{B}}^h \\ \check{\mathcal{H}}^\psi T_0(-1) & \cdots & \check{\mathcal{H}}^\psi T_N(-1) & \check{\mathcal{H}}^\eta & \check{\mathcal{H}}^h \end{pmatrix} \quad (63)$$

ここで  $\sim$  は式 (60) を用いて変数  $\chi$  を  $\zeta$  に変換した演算子を表している．行列  $\mathbf{L}$  では最初の三つの行として水面における三つの境界条件 (51) および (52), (58) が用いられている．また最後の三つの行として底面における境界条件 (54) および (55) と Exner 方程式 (56) が用いられている．式 (61) が自明でない解をもつためには次の可解条件を満足する必要がある．

$$|\mathbf{L}| = 0 \quad (64)$$

行列  $\mathbf{L}$  の構成要素は  $\omega + i\Omega$  および  $k, S, K, \mu, \theta_0$  の関数であるが，そのうちシールス数  $\theta_0$  は (20a) および (28) より  $K$  と次のような関係を持つことがわかる．

$$K = 1.9 + 2.5 \ln \left( \frac{R_s \theta_0}{mS} \right) \quad (65)$$

また  $F$  は  $K$  (または  $\Phi$ ) と  $S$  によって式 (36) のように表される．したがって一旦  $S$  が与えられると  $K$  は  $F$  だけの関数となり次のように表すことができる．

$$K = \frac{F}{S^{1/2}} - 4.1 \quad (66)$$

したがって式 (64) は次のような一般関数形で表される．

$$\omega + i\Omega = f_S(k, F; S, \mu, m) \quad (67)$$

$K$  が与えられた場合  $S$  は次のように表される．

$$S = \left( \frac{F}{K + 4.1} \right)^2 \quad (68)$$

そのとき式 (64) は次のような一般関数形に書くことができる．

$$\omega + i\Omega = f_K(k, F; K, \mu, m) \quad (69)$$

図-7 と図-8 は式 (64) から導かれる  $\Omega$  を  $(k, F)$ -平面上に示したものである．実線と点線はそれぞれ正と負の  $\Omega$  を表しており，太い実線は  $\Omega$  がゼロとなる中立曲線である．ここで式 (59) 中の  $N$  は，十分な精度が得られるように 25 とした． $N = 24$  と 25 とした場合の  $\Omega$  の値の差は，図中右上隅周辺以外の領域で  $1.0 \times 10^{-6}$  より小さく，臨界フルード数付近における計算結果は十分な精度を有している．

いずれの図にも右上と左下に二つの不安定領域が存在しているが，これら二つの領域はそれぞれアンチデューンとデューンの領域に対応している．ただし定剪断層近似を用いた理論では，浮遊砂を考慮しないとアンチデューンを良好に再現できないことが知られており，ここでもアンチデューンの領域における理論と実験の一致は良くない．前述したように本研究ではデューンの領域のみに注目することとする．

図-7(a) および (b) にそれぞれ  $\Phi = 22$  および 18 ( $K = 17.9$  と 13.9) とした場合の，成長率  $\Omega$  を  $k$  と  $F$  の関数として示した． $\mu$  および  $m$  の値はそれぞれ 0.1 および 1.7 としてある．図からわかるように  $\Phi$  が小さくなると全体的に  $\Omega$  の大きさは小さくなる．そのため局所勾配による重力の影響が顕著となる波数  $k$  が大きい領域では  $\Omega$  が正となる不安定領域が消滅することになる．

$S$  を与えることによって同様の図を描くことが可能である．図-8(a) および (b) はそれぞれ  $S = 0.001$  および 0.002 の場合の  $\Omega$  のコンタを示したものである． $S$  の増加は  $\Phi$  の減少とほぼ同様の影響を  $\Omega$  に対して与えることがわかる．

$\Omega$  が正となり平坦床が不安定となるフルード数  $F$  の上限値を臨界フルード数  $F_c$  として定義する．図によると臨界フルード数は有限な  $k$  でピークを持つことがわかる．図-7 および図-8 に示したケースでは， $k$  が 0.336 から 0.376 の範囲にあるとき，臨界フルード数  $F_c$  は 0.804 から 0.852 の範囲で最大値を取る．次節以降では最大臨界フルード数近傍における解の挙動および非線形安定性を弱非線形解析の手法を用いて調べる．

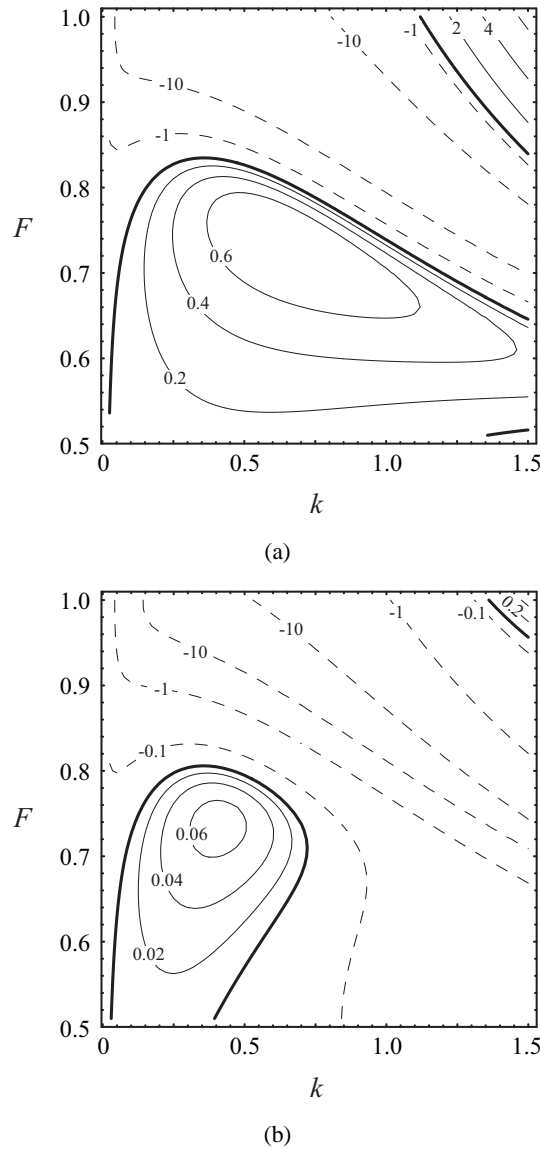


図-7 流速係数  $\Phi$  を与えた場合のフルード数  $F$  と波数  $k$  成長率  $\Omega$ : (a)  $\Phi = 22, m = 1.7, \mu = 0.1$ , (b)  $\Phi = 18, m = 1.7, \mu = 0.1$ .

## 5. 弱非線形安定解析

### (1) 漸近展開

弱非線形解析の目的は中立曲線のごく近傍における解の挙動を調べることである．そこでフルード数  $F$  が臨界フルード数  $F_c$  からわずかにずれている場合を考え，フルード数を次のように展開する．

$$F = F_c - \nu^2 F_c \quad (70)$$

ここで不安定性は  $F < F_c$  で起こるので， $\nu^2$  の前の符号はマイナスとしている．前述したように， $F$  は  $S$  と  $K$  の組合せによって表すことができる．したがって  $F$  の増大は  $S$  あるいは  $K$  の増加として表すことができる．ある河道における流量の時間変化を考えるような場合，平均河床勾配  $S$  は変化しないと考えてよいであろう．そのとき与えられた  $S$  に対して  $K$  は次のように展開される．

$$K = \left( \frac{F_c}{S^{1/2}} - 4.1 \right) - \nu^2 \left( \frac{F_c}{S^{1/2}} \right) \quad (71)$$

異なる水路における様々な河床形態について論じる場合は，ある与えられた  $K$  の下で  $S$  を変化させることも考え得る．そのとき  $S$  は次のように展開できる．

$$S = \left( \frac{F_c}{K + 4.1} \right)^2 - 2\nu^2 \left( \frac{F_c}{K + 4.1} \right)^2 \quad (72)$$

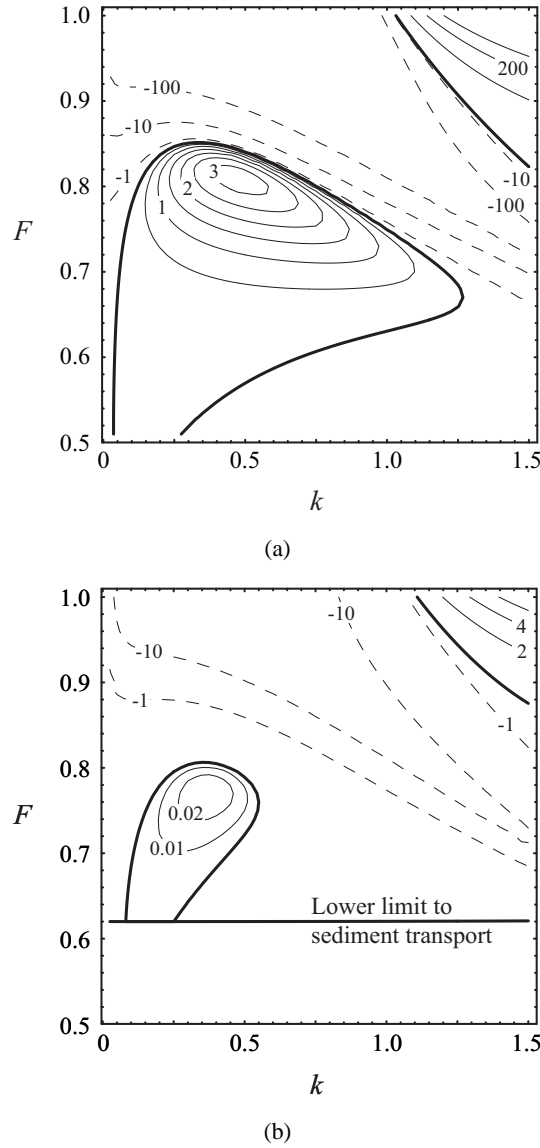


図-8 平均河床勾配  $S$  を与えた場合のフルード数  $F$  と波数  $k$  による増幅率  $\Omega$  の変化 . (a)  $S = 0.001$  ,  $m = 1.7$  ,  $\mu = 0.1$  , (b)  $S = 0.002$  ,  $m = 1.7$  ,  $\mu = 0.1$  .

Stuart<sup>16)</sup>に倣い多重尺度法を用いて‘遅い’時間スケール  $T$  を導入する .

$$T = \nu^2 t, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \nu^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad (73a, b)$$

以上の展開に合わせて全ての従属変数を次のように展開する .

$$(\psi(\xi, \chi), \eta(\xi), h(\xi), p(\xi, \chi)) = (\psi_0(\chi), 1, 0, p_0(\chi)) + \sum_{i=1}^3 \nu^i (\hat{\psi}_i(\xi, \chi), \hat{\eta}_i(\xi), \hat{h}_i(\xi), \hat{p}_i(\xi, \chi)) + O(\nu^4) \quad (74)$$

式 (70)–(74) を (13)–(29) に代入し ,  $\nu$  を微小パラメータとして展開し整理すると ,  $\nu$  のそれぞれのオーダーにおいて次のような結果が得られる .

## (2) $O(\nu)$

$O(\nu)$  では , 線形安定解析で得られたものと同様の微分方程式系が得られる . その微分方程式系は式 (40)–(47) において  $F$  を  $F_c$  に置き換えたものとなる .

基本擾乱の形を線形安定解析の場合と同様に次のように仮定する．

$$(\hat{\psi}_1(\chi), \hat{\eta}_1, \hat{h}_1, \hat{p}_1(\chi)) = A(T)(\psi_{11}(\chi), \eta_{11}, h_{11}, p_{11}(\chi))E(\xi, t) + \text{c.c.} \quad (75)$$

ここで

$$E(\xi, t) = \exp[i(k\xi - \omega_c t)] \quad (76)$$

であり， $\omega_c$  は臨界フルード数  $F_c$  に対応する角振動数である．得られた微分方程式系に式 (75) を代入し， $p_{11}(1)$  を消去すると次のような微分方程式系が得られる．

$$\mathcal{L}_1^\psi(\chi)\psi_{11}(\chi) + \mathcal{L}_1^\eta(\chi)h_{11} + \mathcal{L}_1^h(\chi)\eta_{11} = 0 \quad (77)$$

$$\psi_{11}(1) = 0 \quad (78)$$

$$\mathcal{W}_1^\psi\psi_{11}(1) + \mathcal{W}_1^\eta\eta_{11} = 0 \quad (79)$$

$$\mathcal{G}_1^\psi\psi_{11}(1) + \mathcal{G}_1^\eta\eta_{11} + \mathcal{G}_1^h h_{11} = 0 \quad (80)$$

$$\psi_{11}(0) = 0 \quad (81)$$

$$\mathcal{B}_1^\psi\psi_{11}(0) + \mathcal{B}_1^h h_{11} = 0 \quad (82)$$

$$\mathcal{H}_1^\psi\psi_{11}(0) + \mathcal{H}_1^\eta\eta_{11} + \mathcal{H}_1^h h_{11} = 0 \quad (83)$$

ここで  $\mathcal{L}_n^\phi$  および  $\mathcal{W}_n^\phi, \mathcal{G}_n^\phi, \mathcal{B}_n^\phi, \mathcal{H}_n^\phi$  ( $\phi = \psi, \eta, h$ ) は，それぞれ  $\mathcal{L}^\phi$  および  $\mathcal{W}^\phi, \mathcal{G}^\phi, \mathcal{B}^\phi, \mathcal{H}^\phi$  において  $(F, \omega + i\Omega, k)$  を  $(F_c, \omega_c, nk)$  で置き換えた線形演算子を表している．

### (3) $O(\nu^2)$

$O(\nu^2)$  での微分方程式系は  $O(\nu)$  における式 (75) の二次のオーダーの非線形項を含む．それを考慮に入れると式 (16) および (13) は次のようになる．

$$\hat{\mathcal{L}}_c^\psi(\chi)\hat{\psi}_2(\chi) + \hat{\mathcal{L}}_c^\eta(\chi)\hat{\eta}_2 + \hat{\mathcal{L}}_c^h(\chi)\hat{h}_2 = A^2 E^2 N_{22}(\chi) + \text{c.c.} + AA^* N_{20}(\chi) \quad (84)$$

$$\frac{\partial \hat{p}_2}{\partial \xi} + \hat{\mathcal{R}}_c^\psi(\chi)\hat{\psi}_2(\chi) + \hat{\mathcal{R}}_c^\eta(\chi)\hat{\eta}_2 + \hat{\mathcal{R}}_c^h(\chi)\hat{h}_2 = A^2 E^2 Q_{22}(\chi) + \text{c.c.} + AA^* Q_{20}(\chi) \quad (85)$$

ここで上付きの  $*$  はその項自体の複素共役， $\hat{\mathcal{L}}_c^\phi$  および  $\hat{\mathcal{R}}_c^\phi$  ( $\phi = \psi, \eta, h$ ) はそれぞれ  $\hat{\mathcal{L}}^\phi$  および  $\hat{\mathcal{R}}^\phi$  の  $F$  を  $F_c$  で置き換えた線形演算子， $N_{22}$  および  $N_{20}, Q_{22}, Q_{20}$  は  $O(\nu)$  の項から構成される非線形項である．境界条件 (21)–(29) および Exner 方程式 (17) から次式が得られる．

$$\hat{\psi}_2(1) = 0 \quad (86)$$

$$\hat{\mathcal{W}}_c^\psi\hat{\psi}_2(1) + \hat{\mathcal{W}}_c^\eta\hat{\eta}_2 = A^2 E^2 I_{22} + \text{c.c.} + AA^* I_{20} \quad (87)$$

$$\hat{p}_2(1) + \hat{\mathcal{P}}_c^\psi\hat{\psi}_2(1) + \hat{\mathcal{P}}_c^\eta\hat{\eta}_2 + \hat{\mathcal{P}}_c^h\hat{h}_2 = A^2 E^2 S_{22} + \text{c.c.} + AA^* S_{20} \quad (88)$$

$$\hat{\psi}_2(0) = 0 \quad (89)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_c^\psi\hat{\psi}_2(0) + \hat{\mathcal{B}}_c^h\hat{h}_2 = A^2 E^2 M_{22} + \text{c.c.} + AA^* M_{20} \quad (90)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_c^\psi\hat{\psi}_2(0) + \hat{\mathcal{H}}_c^\eta\hat{\eta}_2 + \hat{\mathcal{H}}_c^h\hat{h}_2 = A^2 E^2 Z_{22} + \text{c.c.} + AA^* Z_{20} \quad (91)$$

ここで  $\hat{\mathcal{W}}_c^\phi$  および  $\hat{\mathcal{P}}_c^\phi, \hat{\mathcal{B}}_c^\phi, \hat{\mathcal{H}}_c^\phi$  ( $\phi = \psi, \eta, h$ ) は，それぞれ  $\hat{\mathcal{W}}^\phi$  および  $\hat{\mathcal{P}}^\phi, \hat{\mathcal{B}}^\phi, \hat{\mathcal{H}}^\phi$  の  $F$  を  $F_c$  で置き換えた線形演算子， $I_{22}$  および  $I_{20}, S_{22}, S_{20}, M_{22}, M_{20}, Z_{22}, Z_{20}$  は  $O(\nu)$  の項から構成される非線形項である．

微分方程式系 (84)–(91) は次の形の解を持つ．

$$\begin{aligned} (\hat{\psi}_2, \hat{\eta}_2, \hat{h}_2, \hat{p}_2) &= A^2(T)(\psi_{22}(\chi), \eta_{22}, h_{22}, p_{22}(\chi))E^2(\xi, t) + \text{c.c.} \\ &+ A(T)A^*(T)(\psi_{20}(\chi), \eta_{20}, h_{20}, p_{20}(\chi)) \\ &+ (\psi_{00}(\chi), 0, 0, p_{00}(\chi)) \end{aligned} \quad (92)$$

ここで式 (92) 中の右辺の最後の項  $\psi_{00}$  あるいは  $p_{00}$  はフルード数を  $F_c - v^2 F_c$  と展開したために必要となる修正である． $K$  を式 (71) のように展開する場合，式 (34) で表される  $U$  は  $-v^2 F_c / S^{1/2}$  だけ修正されなければならない． $-\psi' = U$  の関係を考慮すると次式が要求されることがわかる．

$$\psi_{00}(\chi) = \frac{F_c}{S^{1/2}} \chi \quad (93)$$

ここで任意の積分定数は落としてある． $S$  が展開されるときは基本状態における圧力分布 (38) に修正が必要となる．圧力を  $p = p_0 + v^2 p_{00}$  と展開し，式 (72) とともに式 (38) に代入すると， $O(v^2)$  において次式が得られる．

$$p_{00} = 2 \left( \frac{K + 4.1}{F_c} \right)^2 (1 - \chi) \quad (94)$$

式 (92) を (84)–(91) に代入し， $p_{22}(1)$  を消去すると， $A^2 E^2$  を持つ項によって構成される次式を得る．

$$\mathcal{L}_2^\psi(\chi) \psi_{22}(\chi) + \mathcal{L}_2^\eta(\chi) \eta_{22} + \mathcal{L}_2^h(\chi) h_{22} = \mathcal{N}_{22}(\chi) \quad (95)$$

$$\psi_{22}(1) = 0 \quad (96)$$

$$\mathcal{W}_2^\psi \psi_{22}(1) + \mathcal{W}_2^\eta \eta_{22} = \mathcal{I}_{22} \quad (97)$$

$$\mathcal{G}_2^\psi \psi_{22}(1) + \mathcal{G}_2^\eta \eta_{22} + \mathcal{G}_2^h h_{22} = \mathcal{J}_{22} \quad (98)$$

$$\psi_{22}(0) = 0 \quad (99)$$

$$\mathcal{B}_2^\psi \psi_{22}(0) + \mathcal{B}_2^h h_{22} = \mathcal{M}_{22} \quad (100)$$

$$\mathcal{H}_2^\psi \psi_{22}(0) + \mathcal{H}_2^\eta \eta_{22} + \mathcal{H}_2^h h_{22} = \mathcal{Z}_{22} \quad (101)$$

ここで  $\mathcal{J}_{ij} = \mathcal{Q}_{ij}(1) + ikS_{ij}$  ( $(i, j) = (2, 2), (3, 1)$ ) である． $\psi_{20}$  を得るためには，四階の微分方程式 (84) ではなく三階の微分方程式 (85) を用いるのが便利である．式 (85) に (92) を代入すると  $AA^*$  を有する項から成る次の方程式を得る．

$$\mathcal{R}_0^\psi(\chi) \psi_{20}(\chi) + \mathcal{R}_0^\eta(\chi) \eta_{20} + \mathcal{R}_0^h(\chi) h_{20} = \mathcal{Q}_{20}(\chi) \quad (102)$$

式 (102) に対する境界条件は次式で表される．

$$\mathcal{W}_0^\psi \psi_{20}(1) = \mathcal{I}_{20} \quad (103)$$

$$\mathcal{B}_0^\psi \psi_{20}(0) = \mathcal{M}_{20} \quad (104)$$

微分方程式 (102) を解くにはさらに以下の 3 つの条件が必要となる．フルード数に与えられる摂動による変化を除けば流量は一定でなければならない．したがって次式が要求される．

$$-\int_0^1 \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \chi} d\chi = -\psi_{20}(1) + \psi_{20}(0) = 0 \quad (105)$$

$\psi_{20}$  は任意の積分定数を含むため，一般性を失うことなく任意の位置での  $\psi_{20}$  の値をゼロとして差し支えない．したがって次式が得られる．

$$\psi_{20}(0) = 0 \quad (106)$$

さらに平均河床高が一定となる条件から次式が得られる．

$$h_{20} = 0 \quad (107)$$

微分方程式 (102) は境界条件 (103)–(107) の下で解かれることになる．

実際に  $O(v^2)$  における解を得るためには非線形項  $\mathcal{N}_{22}$  および  $\mathcal{I}_{22}$ ， $\mathcal{J}_{22}$ ， $\mathcal{M}_{22}$ ， $\mathcal{Z}_{22}$ ， $\mathcal{Q}_{20}$ ， $\mathcal{I}_{20}$ ， $\mathcal{M}_{20}$  を明示的な形で得ることが必要となる．本解析では Mathematica Ver. 4.2 を用いて得ているが，ここではスペースの関係上省略する．

(4)  $O(\nu^3)$

$O(\nu^3)$  では式 (16) および (13) は次のようになる .

$$\hat{\mathcal{L}}_c^\psi \hat{\psi}_3 + \hat{\mathcal{L}}_c^\eta \hat{\eta}_3 + \hat{\mathcal{L}}_c^h \hat{h}_3 = A^3 E^3 \mathcal{N}_{33}(\chi) + \text{c.c.} + \left[ A^2 A^* \mathcal{N}_{31}^{(1)}(\chi) + A \mathcal{N}_{31}^{(2)}(\chi) \right] E + \text{c.c.} \quad (108)$$

$$\frac{\partial \hat{p}_3}{\partial \xi} + \hat{\mathcal{R}}_c^\psi \hat{\psi}_3 + \hat{\mathcal{R}}_c^\eta \hat{\eta}_3 + \hat{\mathcal{R}}_c^h \hat{h}_3 = A^3 E^3 \mathcal{Q}_{33}(\chi) + \text{c.c.} + \left[ A^2 A^* \mathcal{Q}_{31}^{(1)}(\chi) + A \mathcal{Q}_{31}^{(2)}(\chi) \right] E + \text{c.c.} \quad (109)$$

上式に関連した境界条件と Exner 方程式は次のようになる .

$$\hat{\psi}_3(1) = 0 \quad (110)$$

$$\hat{\mathcal{W}}_c^\psi \hat{\psi}_3(1) + \hat{\mathcal{W}}_c^\eta \hat{\eta}_3 = A^3 \mathcal{I}_{33} E^3 + \text{c.c.} + \left[ A^2 A^* \mathcal{I}_{31}^{(1)} + A \mathcal{I}_{31}^{(2)} \right] E + \text{c.c.} \quad (111)$$

$$\hat{p}_3(1) + \hat{\mathcal{P}}_c^\psi \hat{\psi}_3(1) + \hat{\mathcal{P}}_c^\eta \hat{\eta}_3 + \hat{\mathcal{P}}_c^h \hat{h}_3 = A^3 \mathcal{S}_{33} E^3 + \text{c.c.} + \left[ A^2 A^* \mathcal{S}_{31}^{(1)} + A \mathcal{S}_{31}^{(2)} \right] E + \text{c.c.} \quad (112)$$

$$\hat{\psi}_3(0) = 0 \quad (113)$$

$$\hat{\mathcal{B}}_c^\psi \hat{\psi}_3(0) + \hat{\mathcal{B}}_c^h \hat{h}_3 = A^3 \mathcal{M}_{33} E^3 + \text{c.c.} + \left[ A^2 A^* \mathcal{M}_{31}^{(1)} + A \mathcal{M}_{31}^{(2)} \right] E + \text{c.c.} \quad (114)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_c^\psi \hat{\psi}_3(0) + \hat{\mathcal{H}}_c^\eta \hat{\eta}_3 + \hat{\mathcal{H}}_c^h \hat{h}_3 = A^3 \mathcal{Z}_{33} E^3 + \text{c.c.} + \left[ A^2 A^* \mathcal{Z}_{31}^{(1)} + A \mathcal{Z}_{31}^{(2)} - h_{11} \frac{dA}{dT} \right] E + \text{c.c.} \quad (115)$$

ここで  $\mathcal{N}_{33}$  および  $\mathcal{Q}_{33}$ ,  $\mathcal{I}_{33}$ ,  $\mathcal{S}_{33}$ ,  $\mathcal{M}_{33}$ ,  $\mathcal{Z}_{33}$ ,  $\mathcal{N}_{31}^{(1)}$ ,  $\mathcal{Q}_{31}^{(1)}$ ,  $\mathcal{I}_{31}^{(1)}$ ,  $\mathcal{S}_{31}^{(1)}$ ,  $\mathcal{M}_{31}^{(1)}$ ,  $\mathcal{Z}_{31}^{(1)}$  は,  $O(\nu)$  および  $O(\nu^2)$  における項によって構成される非常に長い非線形項であり,  $\mathcal{N}_{31}^{(2)}$  および  $\mathcal{Q}_{31}^{(2)}$ ,  $\mathcal{I}_{31}^{(2)}$ ,  $\mathcal{S}_{31}^{(2)}$ ,  $\mathcal{M}_{31}^{(2)}$ ,  $\mathcal{Z}_{31}^{(2)}$  は摂動 (70) によって発生する  $O(\nu)$  の項から構成される項である .

式 (108)–(115) の非同次項の形を考慮すると, 解は  $E^3$  および  $E$  を有する項から成っていることがわかる . したがって次式で表される .

$$\left( \hat{\psi}_3, \hat{\eta}_3, \hat{h}_3, \hat{p}_3 \right) = A^3 \left( \psi_{33}(\chi), \eta_{33}, h_{33}, p_{33}(\chi) \right) E^3 + \text{c.c.} + \left( \psi_{31}(\chi, T), \eta_{31}(T), h_{31}(T), p_{31}(\chi, T) \right) E + \text{c.c.} \quad (116)$$

式 (116) を (108)–(115) に代入し,  $p_{31}(1, T)$  を消去すると,  $E$  を伴う項から次式が得られる .

$$\mathcal{L}_1^\psi(\chi) \psi_{31}(\chi, T) + \mathcal{L}_1^\eta(\chi) \eta_{31}(T) + \mathcal{L}_1^h(\chi) h_{31}(T) = A^2 A^* \mathcal{N}_{31}^{(1)}(\chi) + A \mathcal{N}_{31}^{(2)}(\chi) \quad (117)$$

$$\psi_{31}(1, T) = 0 \quad (118)$$

$$\mathcal{W}_1^\psi \psi_{31}(1, T) + \mathcal{W}_1^\eta \eta_{31}(T) = A^2 A^* \mathcal{I}_{31}^{(1)} + A \mathcal{I}_{31}^{(2)} \quad (119)$$

$$\mathcal{G}_1^\psi \psi_{31}(1, T) + \mathcal{G}_1^\eta \eta_{31}(T) + \mathcal{G}_1^h h_{31}(T) = A^2 A^* \mathcal{J}_{31}^{(1)} + A \mathcal{J}_{31}^{(2)} \quad (120)$$

$$\psi_{31}(0, T) = 0 \quad (121)$$

$$\mathcal{B}_1^\psi \psi_{31}(0, T) + \mathcal{B}_1^h h_{31}(T) = A^2 A^* \mathcal{M}_{31}^{(1)} + A \mathcal{M}_{31}^{(2)} \quad (122)$$

$$\mathcal{H}_1^\psi \psi_{31}(0, T) + \mathcal{H}_1^\eta \eta_{31}(T) + \mathcal{H}_1^h h_{31}(T) = A^2 A^* \mathcal{Z}_{31}^{(1)} + A \mathcal{Z}_{31}^{(2)} - h_{11} \frac{dA}{dT} \quad (123)$$

上式中の  $\mathcal{N}_{31}^{(1)}$  および  $\mathcal{N}_{31}^{(2)}$ ,  $\mathcal{I}_{31}^{(1)}$ ,  $\mathcal{I}_{31}^{(2)}$ ,  $\mathcal{J}_{31}^{(1)}$ ,  $\mathcal{J}_{31}^{(2)}$ ,  $\mathcal{M}_{31}^{(1)}$ ,  $\mathcal{M}_{31}^{(2)}$ ,  $\mathcal{Z}_{31}^{(1)}$ ,  $\mathcal{Z}_{31}^{(2)}$  を得る際は, Mathematica Ver. 4.2 を用いている .

(5) 数値解法

弱非線形解析によって得られた微分方程式系は, 線形安定解析の場合と同様に Chebyshev 多項式を用いたコロケーション法を用いて解く .  $\psi_{ij}$  を次のように展開する .

$$\psi_{ij} = \sum_{n=0}^N a_n^{(ij)} T_n(\zeta) \quad (124)$$

$(i, j) = (1, 1)$  として式 (124) を (77)–(83) に代入すると次の線形代数方程式系が得られる .

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{a}_{11} = \mathbf{0} \quad (125)$$

ここで  $\mathbf{L}_j$  は  $\mathbf{L}$  の  $(F, \omega + i\Omega, k)$  を  $(F_c, \omega_c, jk)$  に置き換えた演算子であり,  $\mathbf{a}_{ij}$  は次のように表される .

$$\mathbf{a}_{ij} = \left( a_0^{(ij)}, a_1^{(ij)}, \dots, a_{N-1}^{(ij)}, a_N^{(ij)}, \eta_{ij}, h_{ij} \right)^T \quad (126)$$



可解条件  $|\mathbf{L}_1| = 0$  は既に成立している．したがって式 (125) は  $\mathbf{L}_1$  の固有ベクトルを自明でない解として持つ．

$(i, j) = (2, 2)$  として式 (124) を (95)–(101) に代入すると次式が得られる．

$$\mathbf{L}_2 \mathbf{a}_{22} = \mathbf{N}_{22} \quad (127)$$

ここで  $\mathbf{N}_{22}$  は次式で与えられる．

$$\mathbf{N}_{22} = (0, \check{I}_{22}, \check{J}_{22}, \check{N}_{22}(\zeta_2), \dots, \check{N}_{22}(\zeta_{N-2}), 0, \check{M}_{22}, \check{Z}_{22})^T \quad (128)$$

$|\mathbf{L}_1| = 0$  であるので通常  $|\mathbf{L}_2|$  はゼロとならない．したがって式 (127) は容易に解ける．

$(i, j) = (2, 0)$  として式 (124) を (102)–(107) に代入すると次式が得られる．

$$\mathbf{R}_0 \mathbf{a}_{20} = \mathbf{Q}_{20} \quad (129)$$

ここで

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} T_0(1) & \cdots & T_N(1) & 0 & 0 \\ \check{W}_0^\psi T_0(1) & \cdots & \check{W}_0^\psi T_N(1) & 0 & 0 \\ \check{R}_0^\psi T_0(\zeta_1) & \cdots & \check{R}_0^\psi T_N(\zeta_1) & \check{R}_0^\eta(\zeta_1) & \check{R}_0^h(\zeta_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \check{R}_0^\psi T_0(\zeta_{N-2}) & \cdots & \check{R}_0^\psi T_N(\zeta_{N-2}) & \check{R}_0^\eta(\zeta_{N-2}) & \check{R}_0^h(\zeta_{N-2}) \\ T_0(-1) & \cdots & T_N(-1) & 0 & 0 \\ \check{B}_0^\psi T_0(-1) & \cdots & \check{B}_0^\psi T_N(-1) & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (130a)$$

$$\mathbf{Q}_{20} = (0, \check{I}_{20}, \check{Q}_{20}(\zeta_1), \dots, \check{Q}_{20}(\zeta_{N-2}), 0, \check{M}_{20}, 0)^T \quad (130b)$$

式 (129) を解くと  $\mathbf{a}_{20}$  が得られる．

式 (117)–(123) より次式が得られる．

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{a}_{31} = \mathbf{N}_{31} \quad (131)$$

ここで

$$\mathbf{N}_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^2 A^* \check{I}_{31}^{(1)} + A \check{I}_{31}^{(2)} \\ A^2 A^* \check{J}_{31}^{(1)} + A \check{J}_{31}^{(2)} \\ A^2 A^* \check{N}_{31}^{(1)}(\zeta_2) + A \check{N}_{31}^{(2)}(\zeta_2) \\ \vdots \\ A^2 A^* \check{N}_{31}^{(1)}(\zeta_{N-2}) + A \check{N}_{31}^{(2)}(\zeta_{N-2}) \\ 0 \\ A^2 A^* \check{M}_{31}^{(1)} + A \check{M}_{31}^{(2)} \\ A^2 A^* \check{Z}_{31}^{(1)} + A \check{Z}_{31}^{(2)} - h_{11} \frac{dA}{dT} \end{pmatrix} \quad (132)$$

$|\mathbf{L}_1| = 0$  であるので式 (131) が解を持つためには可解条件を満たさなければならない．可解条件は  $\mathbf{L}$  の任意の一行を右辺の  $\mathbf{N}_{31}$  で置き換えた行列の行列式がゼロとなることである．すなわち次式が要求さ

$\Phi$	$\mu$	$m$	$k$	$F_c$	$\omega_c$	$\text{Re}(\lambda_0)$	$\text{Im}(\lambda_0)$	$\text{Re}(\lambda_1)$	$\text{Im}(\lambda_1)$
22	0.1	1.7	0.308	0.833	27.7	16.9	140	7980	136000
22	0.1	1.7	0.358	0.835	33.5	20.3	179	4420	139000
22	0.1	1.7	0.408	0.834	38.9	23.3	216	2550	137000
19	0.1	1.7	0.311	0.814	5.90	3.58	25.2	974	22000
19	0.1	1.7	0.361	0.816	7.12	4.20	32.0	270	22400
19	0.1	1.7	0.411	0.814	8.22	4.68	38.2	-96.1	21900
18	0.1	1.7	0.306	0.804	3.36	1.98	13.2	340	11400
18	0.1	1.7	0.356	0.806	4.06	2.29	16.7	-74.4	11700
18	0.1	1.7	0.406	0.804	4.68	2.50	19.9	-284	11300
18	0.05	1.7	0.336	0.816	4.16	2.91	18.3	881	14200
18	0.05	1.7	0.386	0.817	4.97	3.44	23.0	463	14600
18	0.05	1.7	0.436	0.816	5.71	3.91	27.5	234	14400
18	0.1	2.5	0.326	0.812	7.15	4.71	30.2	1270	23900
18	0.1	2.5	0.376	0.813	8.57	5.53	38.2	519	24500
18	0.1	2.5	0.426	0.812	9.87	6.21	45.6	113	24100

表-1 流速係数  $\Phi$  および局所勾配を表す  $\mu$  , 波数  $k$  による臨界フルード数  $F_c$  および角振動数  $\omega_c$  , 線形増幅率  $\lambda_0$  , 第一 Landau 定数  $\lambda_1$  の変化 .

れる .

$$\begin{pmatrix}
T_0(1) & \cdots & T_N(1) & 0 & 0 \\
\check{W}_1^\psi T_0(1) & \cdots & \check{W}_1^\psi T_N(1) & \check{W}_1^\eta & A^2 A^* \check{J}_{31}^{(1)} + A \check{J}_{31}^{(2)} \\
\check{G}_1^\psi T_0(1) & \cdots & \check{G}_1^\psi T_N(1) & \check{G}_1^\eta & A^2 A^* \check{J}_{31}^{(2)} + A \check{J}_{31}^{(2)} \\
\check{L}_1^\psi T_0(\zeta_2) & \cdots & \check{L}_1^\psi T_N(\zeta_2) & \check{L}_1^\eta(\zeta_2) & A^2 A^* \check{N}_{31}^{(1)}(\zeta_2) + A \check{N}_{31}^{(2)}(\zeta_2) \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\check{L}_1^\psi T_0(\zeta_{N-2}) & \cdots & \check{L}_1^\psi T_N(\zeta_{N-2}) & \check{L}_1^\eta(\zeta_{N-2}) & A^2 A^* \check{N}_{31}^{(1)}(\zeta_{N-2}) + A \check{N}_{31}^{(2)}(\zeta_{N-2}) \\
T_0(-1) & \cdots & T_N(-1) & 0 & 0 \\
\check{B}_1^\psi T_0(-1) & \cdots & \check{B}_1^\psi T_N(-1) & 0 & A^2 A^* \check{M}_{31}^{(1)} + A \check{M}_{31}^{(2)} \\
\check{H}_1^\psi T_0(-1) & \cdots & \check{H}_1^\psi T_N(-1) & \check{H}_1^\eta & A^2 A^* \check{Z}_{31}^{(1)} + A \check{Z}_{31}^{(2)} - h_{11} \frac{dA}{dT}
\end{pmatrix} = 0. \quad (133)$$

上式を展開すると次の Landau 方程式に帰着する .

$$\frac{dA}{dT} = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A \quad (134)$$

ここで  $\lambda_0$  は線形増幅率 ,  $\lambda_1$  は第一 Landau 定数である .  $\lambda_0$  の実部が正の値を取る範囲において  $\lambda_1$  の実部が正の値を取るならば , 臨界フルード数におけるデューン-平坦床遷移は図-3 で示されるような亜臨界分岐によって特徴付けられることになる .

## 6. 結果と考察

### (1) デューン-平坦床遷移の非線形安定性

表-1 に  $K$  (または  $\Phi$ ) を与えた場合の弱非線形解析の結果を示す . 表中 , 上から 9 行目までに  $(\mu, m) = (0.1, 1.7)$  の場合について示した .  $\Phi = 22$  ( $K = 17.9$ ) のとき臨界フルード数は  $(k, F_c) = (0.358, 0.835)$  で最大となる . この場合 , Landau 定数の実部  $\text{Re}(\lambda_1)$  は最大臨界フルード数周辺において正の値を取るこ

$S$	$\mu$	$m$	$k$	$F_c$	$\omega_c$	$\text{Re}(\lambda_0)$	$\text{Im}(\lambda_0)$	$\text{Re}(\lambda_1)$	$\text{Im}(\lambda_1)$
0.001	0.1	1.7	0.286	0.850	302	152	1710	121000	2180000
0.001	0.1	1.7	0.336	0.851	380	192	2270	72600	2280000
0.001	0.1	1.7	0.386	0.850	435	222	2700	46000	2190000
0.0018	0.1	1.7	0.312	0.816	6.72	3.72	28.0	1180	25600
0.0018	0.1	1.7	0.362	0.818	8.30	4.55	36.4	414	26800
0.0018	0.1	1.7	0.412	0.816	9.39	5.05	42.5	-24.5	25600
0.002	0.1	1.7	0.306	0.804	3.31	1.77	12.4	328	11300
0.002	0.1	1.7	0.356	0.806	4.12	2.15	16.2	-67.0	11900
0.002	0.1	1.7	0.406	0.804	4.63	2.32	18.6	-287	11200

表-2 平均河床勾配  $S$  および局所勾配の影響を表すパラメータ  $\mu$  , 波数  $k$  による臨界フルード数  $F_c$  および角振動数  $\omega_c$  , 線形増幅率  $\lambda_0$  , 第一 Landau 定数  $\lambda_1$  の変化 .

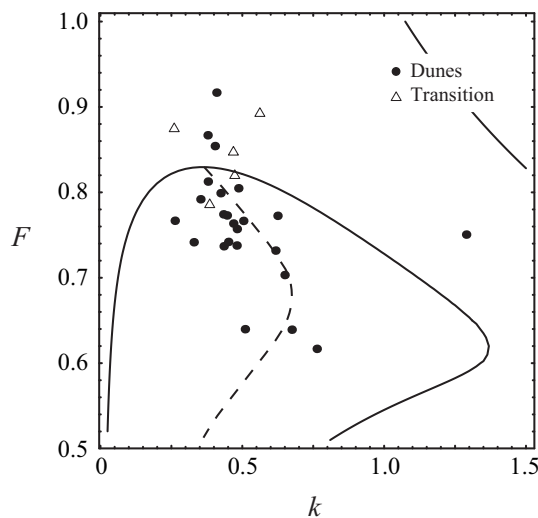


図-9 実験と解析結果の比較 . Guy et al.<sup>3)</sup>の実験結果 . 実験データの範囲は  $\tilde{d}_s = 0.19\text{--}0.93\text{mm}$  ,  $20 < \Phi < 22$  ,  $1.2 \leq \sigma \leq 2.1$  . 解析で用いたパラメータは  $\Phi = 21$  ,  $m = 1.7$  .

とがわかる . また波数  $k$  が増加すると  $\text{Re}(\lambda_1)$  は減少することがわかる .  $\Phi = 19$  ( $K = 14.9$ ) の場合 , 最大臨界フルード数  $(k, F_c) = (0.361, 0.816)$  において  $\text{Re}(\lambda_1)$  は正の値を取るが ,  $k$  がより大きな範囲においては負の値となっている . さらに  $\Phi$  が 18 まで減少すると最大臨界フルード数  $(k, F_c) = (0.356, 0.806)$  においても ,  $\text{Re}(\lambda_1)$  は負の値をとる . すなわち  $\mu = 0.1$  および  $m = 1.7$  の場合 ,  $\Phi > 19$  の領域ではデューン-平坦床遷移は亜臨界分岐によって特徴づけられるが ,  $\Phi \leq 18$  の範囲では超臨界分岐が発生することになる . 山本<sup>17)</sup>は粒径が 0.5 mm 以下の河川では洪水時の水位-流量関係にヒステリシスが現れる傾向にあることを指摘している . もちろん粒径が小さくなると浮遊砂の影響が現れるため本解析の結果をそのまま当てはめるわけにはいかないが , 粒径  $\tilde{d}_s$  が小さいと  $\Phi$  は大きくなることを考慮すると ,  $\Phi$  が大きいと亜臨界分岐が現れるというここで得られた結果は , 山本の指摘と少なくとも定性的には一致している .

局所勾配の影響を調べるために ,  $\mu$  の値を 0.05 にした場合の結果を表-1 の 10 行目から 12 行目に示す .  $\Phi = 18$  のとき ,  $\mu = 0.1$  では最大臨界フルード数付近で負であった  $\text{Re}(\lambda_1)$  は  $\mu = 0.05$  では正となることからわかる . これは局所勾配の影響が小さくなると超臨界であった分岐形態は亜臨界分岐に変化することを意味している . また表-1 の最後の三行には粒径分布の影響を調べるために  $m = 2.5$  とした場合の結果を示した . 同じ  $\Phi = 18$  の場合でも  $m$  が大きくなると最大臨界フルード数周辺の  $\text{Re}(\lambda_1)$  は正の値を取る . ここで用いた  $m = \tilde{d}_{90}/\tilde{d}_{50}$  の仮定の下では , 粒径分布が広がるにしたがって分岐形態は超臨界から亜臨界へ変化することがわかる .

平均河床勾配  $S$  を与えた場合の結果を表-2 に示した . 表中では  $\mu = 0.1$  および  $m = 1.7$  としてある .

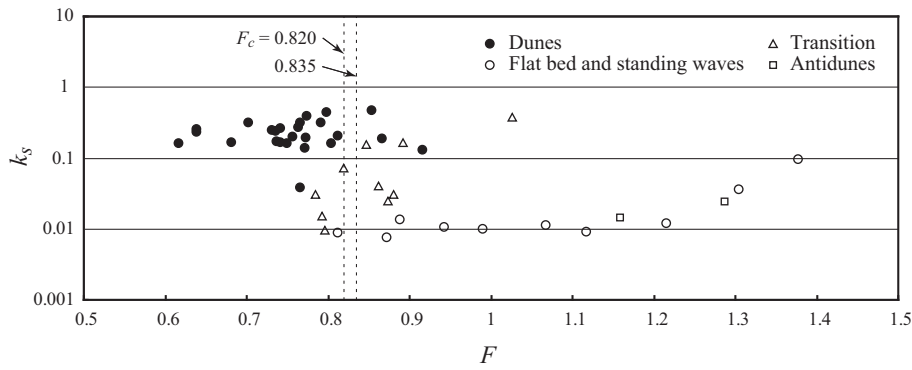


図-10 無次元粗度高さ  $k_s$  のフルード数  $F$  による変化．Guy et al.<sup>3)</sup>による実験結果．実験データの範囲は  $\tilde{d}_s = 0.19\text{--}0.93\text{ mm}$  ,  $20 < \Phi < 22$  ,  $1.2 \leq \sigma \leq 2.1$  . 解析から得られる最大臨界フルード数は  $\Phi = 20$  および  $22$  ,  $m = 1.7$  のときそれぞれ  $F_c = 0.820$  および  $0.835$  である .

$S = 0.001$  および  $0.0018$  ,  $0.002$  のとき最大臨界フルード数はそれぞれ  $(k, F_c) = (0.336, 0.851)$  および  $(0.362, 0.818)$  ,  $(0.356, 0.806)$  となる .  $S = 0.001$  のとき最大臨界フルード数周辺の  $\text{Re}(\lambda_1)$  は正の値を取るが ,  $S$  が大きくなるにしたがって  $\text{Re}(\lambda_1)$  は波数  $k$  の大きい領域から次第に負の値を取り始める様子がわかる .  $S > 0.0018$  であれば超臨界分岐が起こるが ,  $S \leq 0.0018$  で亜臨界分岐が起こることになる .

## (2) 実験データへの適用

著者らも前報<sup>4),18)</sup>で述べているように図-3 に示した利根川では浮遊砂が活発に生じており , 掃流砂のみしか考慮していない本研究の結果を直接適用することはできない . そこで Englund が図-2 を描くのに一部を用いた Guy et al.<sup>3)</sup>の実験結果を用いて本解析結果の妥当性を検証する .

図-9 および図-10 に Guy et al.<sup>3)</sup>の実験結果と本解析の結果の比較を示す . 比較に用いた砂の粒径は  $0.19\text{ mm}$  から  $0.93\text{ mm}$  までの範囲である . 前述したように図中の  $F$  はデューンののない平坦床に対するフルード数であり , 式 (3) および (4) で定義される . またそれに対応して波数は平坦床に対応した水深  $\tilde{D}$  で無次元化されなければならない . 図-9 および図-10 では全ての実験データのフルード数と波数を再計算し , プロットし直してある . 前述したように  $F$  を計算するのに用いられる  $m$  の値は , 完全な平坦床に対応するような理想的な値であり , ここでは  $\tilde{k}_s = \tilde{d}_{90}$  を用いる . ただし実験では ,  $\tilde{d}_{90}/\tilde{d}_{50}$  ではなく次の値が測定されている .

$$\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{d}_{50}}{\tilde{d}_{16}} + \frac{\tilde{d}_{84}}{\tilde{d}_{50}} \right) \quad (135)$$

そこで  $\tilde{d}_{90}/\tilde{d}_{50}$  の代わりに  $\sigma$  を  $m$  として用いた . 解析では掃流砂しか考慮されていないため , 浮遊砂の影響がほとんどないと考えられる , 浮遊砂の体積濃度が  $0.1\%$  より小さなデータだけを選んだ . また解析ではリップルを対象としていないことからリップルのデータは除外した . さらに  $\Phi$  一定の条件下で解析結果と実験データを比較するために  $\Phi = 20\text{--}22$  の範囲のデータだけを選んでいる .

$\Phi = 21$  として線形安定解析から得られた  $(k, F)$ -平面上における  $\Omega$  のコンタ図に上述の実験データをプロットしたのが図-9 である . プロットした実験データの  $\sigma$  は  $1.2$  から  $2.1$  の範囲にあった . そこで計算ではそれらの中間的な値  $m = 1.7$  を用いた .  $(k, F)$ -平面上に示すために , 明確な波長が記録されているデューンと遷移域のデータのみをプロットしてある . 図を見ると , 多くのデータが最大成長率を示す破線上に載っているものの , いくつかのデータは臨界フルード数を越えた安定領域に現れているのがわかる . これは , デューンから平坦床への遷移が亜臨界分岐であり , 図-3 に示したように有限振幅を持つ安定解が臨界フルード数を越えた領域に存在している可能性を示唆している .

図-10 は無次元粗度高さ  $k_s$  をフルード数  $F$  の関数として示したものである . 図-9 で用いたデータに加えて平坦床とアンチデューンのデータがプロットされている . 粗度高さ  $\tilde{k}_s$  は実測された平均流速および水深 , 河床勾配を用いて式 (1) から計算した . 水深  $\tilde{D}$  とデューンの形成されていない平坦床に対するフルード数  $F$  は , 流量と平均河床勾配 , 砂の粒径を用いて式 (3) および (4) から計算している . 図を見ると実験データは明らかに異なる二つのグループに分けられることがわかる . 一つは  $k_s = 0.1$  から  $1$  の間に位置するデータ群でありデューンに対応している . もう一つは  $k_s \approx 0.01$  付近に存在しているデー

夕群であり平坦床に対応している．そして遷移域のデータがデューンと平坦床の間に存在している様子がわかる．ここで注目すべきは， $F = 0.8-0.9$  の範囲では同じ値の  $F$  に対してデューンと平坦床の二つの河床形態が存在していることである．これは  $F = 0.8-0.9$  の範囲に二つの安定解（デューンと平坦床）が存在し得ることを示唆している．解析によると  $\Phi > 19$  のときデューン-平坦床遷移の分岐形態は亜臨界であり，実験データの  $\Phi$  の範囲（20-22）でも亜臨界分岐が生じている．したがって最大臨界フルード数を越えた線形安定領域ではデューンと平坦床の両方が存在し得る．解析から得られる最大臨界フルード数は  $20 \leq \Phi \leq 22$  の範囲で 0.820-0.835 であり，実験から推定される最大臨界フルード数 0.8 より若干大きい，図-10 において同一フルード数の下で異なる河床形態が現れる事実は本解析の結果を裏付けるものである．

## 7. 結論

水位-流量曲線に現れるヒステリシスや同一水理条件下における河床形態の多価性を理論的に説明するために，レイノルズ平均化された二次元の Navier-Stokes 方程式および局所勾配の影響を取り入れた掃流砂量式，Exner 方程式を用いて，線形および弱非線形安定解析を行った．解析によれば，平均河床勾配が小さく流速係数が大きい領域においてデューン-平坦床遷移は亜臨界分岐によって特徴づけられることが明らかとなった．また局所勾配の影響を表すパラメータ  $\mu$  が小さく，粒径分布の幅が大きくなればなるほど，亜臨界分岐が現れやすくなることがわかった．さらにフルード数を平坦床に対応する値として再定義し，従来の実験結果を再整理したところ，同一水理条件下において異なる河床形態が現れることが明らかとなった．この結果は解析結果によって良好に説明できることが示された．

## 付録 I 線形演算子

$$\hat{L}^\psi = U \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} - \alpha \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right)^2 \quad (\text{I.1})$$

$$\hat{L}^\eta = -\alpha \chi U \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \chi U^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - 2\alpha (\chi + 2\alpha U') \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2UU' \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (\text{I.2})$$

$$\hat{L}^h = -\alpha (1 - \chi) U \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + (1 - \chi) U^2 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - 2\alpha [(1 - \chi) - 2\alpha U'] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2UU' \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (\text{I.3})$$

$$\hat{R}^\psi = -U \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \chi} + U' \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right) \quad (\text{I.4})$$

$$\hat{R}^\eta = \alpha (U + \chi U') \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\chi}{S} - U^2 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - 3 \quad (\text{I.5})$$

$$\hat{R}^h = -\alpha [U - (1 - \chi)U'] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left( \frac{1 - \chi}{S} + U^2 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + 3. \quad (\text{I.6})$$

$$\hat{W}^\psi = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}, \quad \hat{W}^\eta = U(1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (\text{I.7, I.8})$$

$$\hat{P}^\psi = 2\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \chi}, \quad \hat{P}^\eta = 2\alpha U(1) \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \hat{P}^h = -2\alpha U(1) \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (\text{I.9-I.11})$$

$$\hat{B}^\psi = -K^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right) - \frac{2K}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad \hat{B}^h = -K^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (\text{I.12, I.13})$$

$$\hat{H}^\psi = \alpha \Theta \theta_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right), \quad \hat{H}^\eta = -2\Theta \theta_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (\text{I.14, I.15})$$

$$\hat{H}^h = \frac{\partial}{\partial t} + \Theta \left( \alpha K \theta_0 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - \mu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\theta_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad (\text{I.16})$$

$$\Theta = 12(\theta_0 - \theta_{th} + \mu S)^{1/2} \quad (\text{I.17})$$

## 参考文献

- 1) Simons, D. B. and Richardson, E. V.: Forms of bed roughness in alluvial channels, *Journal of the Hydraulics Division, Proc. ASCE* 87(3), pp.87-105, 1961.
- 2) Engelund, F.: Hydraulic resistance of alluvial streams, *Proc. ASCE* 92(HY2), pp.315-326, 1966.
- 3) Guy, H. P., Simons, D. B. and Richardson, E. V.: Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956~1961, Geological Survey Professional Paper 462-I, U.S.Government Printing Office, Washington, 1966.
- 4) 山口里実, 泉 典洋: デューン-平坦床遷移過程にみられる亜臨界分岐現象, 土木学会論文集, No.740/II-64, pp.75-94, 2003.
- 5) Engelund, F.: A practical approach to self-preserving turbulent flows, *Acta Polytechnica Scandinavica* p.6, 1964.
- 6) Engelund, F.: Instability of erodible beds, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.42, pp.225-244, 1970.
- 7) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channels, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.64, pp.1-16, 1974.
- 8) 吉川秀雄: 流砂の水理学, 丸善, 543p., 1985.
- 9) Kellerhals, R.: Stable channels with gravel paved beds, *Journal of Waterways and Harbors Division*, Vol.93, No.1, pp.63-84, 1967.
- 10) Bray, D. I.: Estimating average velocity in gravel-bed rivers, *Journal of Hydraulic Division*, Vol.105, No.9, pp.1103-1122, 1979.
- 11) Richards, K. J.: The formation of ripples and dunes on an erodible bed, *Journal of Fluid Mechanics* vol.99, pp.597-618, 1980.
- 12) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dune formation, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.502, pp.1-16, 2004.
- 13) Meyer-Peter, E. and Müller, R.: Formulas for bed-load transport, *IAHSR, Report on the Second Meeting* 3, pp.39-64, 1948.
- 14) Kovacs, A. and Parker, G.: A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.267, pp.153-183, 1994.
- 15) Seminara, G., Colombini, M. and Parker, G.: Nearly pure sorting waves and formation of bedload sheets, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.312, pp.253-278, 1996.
- 16) Stuart, J. T.: On the non-linear mechanics of wave disturbances instable and unstable parallel flows. part 1. the basic behaviour in plane poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics* 9, pp.353-389, 1960.
- 17) 山本晃一: 構造沖積河川学, 山海堂, 690p., 2004.
- 18) 山口里実, 泉 典洋: 浮遊砂を伴うデューン-平坦床遷移過程, 土木学会論文集, No.796/II-72, pp.53-67, 2005.

## 参考文献

- 1) Simons, D. B. and Richardson, E. V.: Forms of bed roughness in alluvial channels, *Journal of the Hydraulics Division, Proc. ASCE* 87(3), pp.87-105, 1961.
- 2) Engelund, F.: Hydraulic resistance of alluvial streams, *Proc. ASCE* 92(HY2), pp.315-326, 1966.
- 3) Guy, H. P., Simons, D. B. and Richardson, E. V.: Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956~1961, Geological Survey Professional Paper, 462-I, U.S.Government Printing Office, Washington, 1966.
- 4) 山口里実, 泉 典洋: デューン-平坦床遷移過程にみられる亜臨界分岐現象, 土木学会論文集, No.740/II-64, pp.75-94, 2003.
- 5) Engelund, F.: A practical approach to self-preserving turbulent flows, *Acta Polytechnica Scandinavica*, pp. 3-28, 1964.
- 6) Engelund, F.: Instability of erodible beds, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.42, pp.225-244, 1970.
- 7) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, pp. 1-16, 1974.
- 8) 吉川秀雄: 流砂の水理学, 丸善, 543p., 1985.
- 9) Kellerhals, R.: Stable channels with gravel paved beds, *Journal of Waterways and Harbors Division*, Vol.93, No.1, pp.63-84, 1967.
- 10) Bray, D. I.: Estimating average velocity in gravel-bed rivers, *Journal of Hydraulic Division*, Vol.105, No.9, pp.1103-1122, 1979.
- 11) Richards, K. J.: The formation of ripples and dunes on an erodible bed, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.99, pp.597-618, 1980.
- 12) Colombini, M.: Revisiting the linear theory of sand dune formation, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.502, pp.1-16, 2004.
- 13) Meyer-Peter, E. and Müller, R.: Formulas for bed-load transport, *IAHSR, Report on the Second Meeting* 3, pp.39-64, 1948.
- 14) Kovacs, A. and Parker, G.: A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.267, pp.153-183, 1994.
- 15) Seminara, G., Colombini, M. and Parker, G.: Nearly pure sorting waves and formation of bedload sheets, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.312, pp.253-278, 1996.
- 16) Stuart, J. T.: On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 9, pp.353-389, 1960.
- 17) 山本晃一: 構造沖積河川学, 山海堂, 690p., 2004.
- 18) 山口里実, 泉 典洋: 浮遊砂を伴うデューン-平坦床遷移過程, 土木学会論文集, No.796/II-72, pp.53-67, 2005.