

# 浮遊砂を伴うデューン-平坦床遷移過程

## The Transition between Dune-Covered and Flat Beds with Active Suspended Load

泉 典洋<sup>1</sup>・山口里実<sup>2</sup>

Norihiro IZUMI and Satomi YAMAGUCHI

<sup>1</sup> 北海道大学 大学院工学研究科 教授

<sup>2</sup> 北海道大学 大学院工学研究科 日本学術振興会特別研究員

### 要 旨

洪水時、流量の小さい領域で発生したデューンは、流量増加に伴って消滅し、流量減少時に再形成される。その際、デューン河床から平坦床へ遷移する際の流量が、平坦床からデューン河床に遷移する際の流量と比較して大きいヒステリシス現象が観察されている。

著者らは弱非線形安定解析の手法を用いて、ヒステリシス現象の原因の一つが、デューン-平坦床遷移過程に見られる亜臨界分岐である可能性を理論的に示した。しかしその際、理論で予測される臨界フルード数が、実河川で観測されるフルード数よりかなり大きくなることがわかっている。

本研究は、浮遊砂の影響を取り入れた非線形安定解析を行うことによって、浮遊砂が生じる条件下では臨界フルード数が減少するものの、やはり解の分岐形態は亜臨界分岐であることを理論的に明らかにする。

《キーワード：デューン；履歴性；弱非線形解析；増幅率展開法；摂動法》

## 1. はじめに

流量の小さい条件下で形成されたデューンは、流量の増加と共に消滅し、流量の減少と共に再形成される。その際、デューンが消滅する臨界流量が、再形成される臨界流量より大きい、いわゆるヒステリシス現象が現れることが知られている。その原因としてはこれまで、水理条件の変化に伴う河床形状の応答遅れによるものであるという説が有力であった<sup>1),2),3),4),5)</sup>。それに対して著者ら<sup>6),7)</sup>は、多重尺度法と増幅率展開法を用いたデューン-平坦床遷移過程の弱非線形安定解析を行うことによって、ヒステリシス現象の原因の一つが遷移過程に現れる亜臨界分岐である可能性を示している。

著者らの解析結果<sup>6),7)</sup>によれば、平均河床勾配が大きく掃流砂量式における局所勾配の影響が小さいとき、デューン-平坦床遷移過程は亜臨界分岐によって特徴付けられ、それによって遷移時にヒステリシスが現れる。著者らはさらに水路実験を行うことによってデューン-平坦床遷移過程を再現し、その際見られるヒステリシス現象が理論によってほぼ良好に説明できることを確かめている<sup>8)</sup>。ところが、実河川における観測結果と比較すると、理論によって予測される臨界フルード数の方が実測されるものよりもかなり大きな値を示す。著者らはこの原因の一つとして浮遊砂の影響を挙げている。

著者らの行った実験<sup>8)</sup>は、浮遊砂がほとんど生じない状況下で行われているのに対して、著者らが理論との比較に用いた利根川の実測結果<sup>9)</sup>は、浮遊砂が活発に生じるような条件下にある。Engelund<sup>10)</sup>および Fredsøe<sup>11)</sup>によれば、浮遊砂はデューンの発生を抑制し、臨界フルード数を低下させる効果を持つ。掃流砂のみを考慮した前報の理論では、掃流砂が支配的に生じる水路実験のデューン-平坦床遷移過程は説明できても、浮遊砂が活発に生じる実際の河川の遷移過程は説明できないことが推測される。

本研究では、河床形状の時間変化が掃流砂だけでなく浮遊砂によっても生じるような条件下において、デューン-平坦床遷移が生じる臨界フルード数と、そこでの解の分岐構造が、浮遊砂の影響によってどのように変化するのかを明らかにする。解析では、浮遊砂の輸送を記述する移流拡散方程式と、浮遊砂の巻き上げと沈降を考慮した河床高の時間変化式を導入し、前報<sup>7)</sup>と同様の線形安定解析および弱非線形安定解析を行う。

## 2. 亜臨界分岐と Landau 方程式

平面 Poiseuille 流れや境界層流れでは、層流から乱流に遷移する臨界レイノルズ数より、乱流から層流に遷移する臨界レイノルズ数の方が大きくなることが知られている。Stuart<sup>12)</sup>および Pekeris and Shkoller<sup>13)</sup>は弱非線形安定解析の手法を用いて、このヒステリシスの原因が層流-乱流遷移時における亜臨界分岐現象であることを明らかにしている。著者らは、デューン-平坦床遷移時にみられるヒステリシス現象が、この乱流遷移現象と類似のものであるとの類推から、同様の手法を用いることで、ある条件下ではデューン-平坦床遷移が亜臨界分岐で特徴付けられ、それによってヒステリシスが現れることを明らかにした。

弱非線形領域における擾乱の振幅  $A$  の時間発展は次の Landau 方程式で表される。

$$\frac{dA}{dT} = \alpha_0 A + \alpha_1 |A|^2 A \quad (1)$$

ここで  $T$  は時間、 $\alpha_0$  および  $\alpha_1$  はそれぞれ擾乱の線形増幅率および第一 Landau 定数である。もし  $\alpha_0 > 0$  かつ  $\alpha_1 < 0$  が成り立てば、安定な平衡振幅  $(-\alpha_0/\alpha_1)^{1/2}$  が存在し、全ての擾乱はこの振幅に漸近する(超臨界分岐)。一方、 $\alpha_0 < 0$  かつ  $\alpha_1 > 0$  が成り立つような場合、平衡振幅  $(-\alpha_0/\alpha_1)^{1/2}$  (図-1 中、AD 間) は不安定となり、安定な複数の解(同、BD 間および AC 間)が表れる(亜臨界分岐)。亜臨界分岐が生じる場合、フルード数が増加する過程では、解は  $B \rightarrow D \rightarrow C$  の経路を経るためフルード数が  $C$  点に至るまでデューンは消滅しないのに対して、フルード数が減少する過程では  $C \rightarrow A \rightarrow B$  の経路をとるためフルード数が  $A$  に至るまでデューンは再形成されないことになる。

弱非線形安定解析の目的は、高次摂動展開を行うことによって式(1)中における Landau 定数  $\alpha_1$  の値を解析的に求め、解の分岐形態を明らかにすることである。

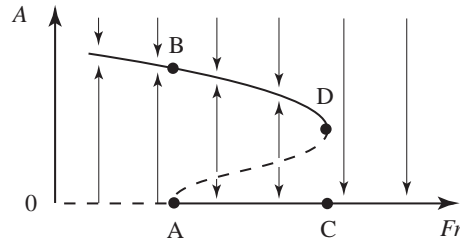


図-1 デューン-平坦床遷移過程に見られる解の分岐形態.

### 3. 定式化

#### (1) 支配方程式

河床形状の時間変化に比較して、流れの時間変化が十分早いとみなせるような場合、流れは定常と近似でき、時間微分が河床形状の時間変化式にのみ現れる準定常の仮定を用いることが可能となる。そのとき図-2 に示した流れは、次のような、Reynolds 平均を取った二次元 Navier-Stokes 方程式によって表される。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + gS + \tilde{\epsilon} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (2)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - g + \tilde{\epsilon} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (4)$$

ここで  $\tilde{x}$  および  $\tilde{y}$  はそれぞれ流れ方向および深さ方向の座標、 $\tilde{u}$  および  $\tilde{v}$  はそれぞれ  $\tilde{x}$  および  $\tilde{y}$  方向の流速成分、 $\rho$  は水の密度、 $\tilde{p}$  は圧力、 $g$  は重力加速度 ( $= 9.8 \text{ m/s}^2$ )、 $S$  は河床勾配、 $\tilde{\epsilon}$  は渦動粘性係数である。また流れによる浮遊砂の輸送は次の二次元移流拡散方程式によって表される。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{v}_s \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\epsilon}_s \left( \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (5)$$

ここで  $\tilde{C}$  は浮遊砂濃度 (体積濃度)、 $\tilde{v}_s$  は浮遊砂の沈降速度、 $\tilde{\epsilon}_s$  は乱流による浮遊砂拡散係数である。

Engelund<sup>10)</sup> および Fredsøe<sup>11)</sup> は、Engelund<sup>14)</sup> が提案した簡便な乱流モデルを用いて、デューンの線形安定解析を行っている。Engelund<sup>14)</sup> は、剪断力を一定とみなすことができ流速の対数分布則が成立する底面近傍の極薄い層 (constant stress layer) を定義し、その外部 (以降、外部層と呼ぶ。後出の境界層外部領域とは異なることに注意) で渦動粘性係数  $\tilde{\epsilon}$  および浮遊砂拡散係数  $\tilde{\epsilon}_s$  を次式で表されるような一定値で近似した。

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon U_f D, \quad \tilde{\epsilon}_s = \epsilon_s U_f D \quad (6a, b)$$

ここで  $U_f$  および  $D$  はそれぞれ平坦床等流状態における摩擦速度および水深であり、次式が成立する。

$$U_f = \left( \frac{\tilde{\tau}_{b0}}{\rho} \right)^{1/2} = (gDS)^{1/2} \quad (7)$$

ここで  $\tilde{\tau}_{b0}$  は平坦床等流状態における底面せん断力である。このモデルでは、constant stress layer を極薄いものとして無視し、外部層における流れのみを解くことになる。外部層では  $\tilde{\epsilon}$  および  $\tilde{\epsilon}_s$  が一定のため、解析が大幅に容易となる。また式 (6a,b) において  $\epsilon_s$  の値は  $\epsilon$  より若干異なることが知られているが<sup>15),16),17)</sup>、表記が複雑になることを避けるために、本研究では Engelund<sup>10)</sup> に従い  $\epsilon_s$  は  $\epsilon$  と等しく 0.077 であるとする。

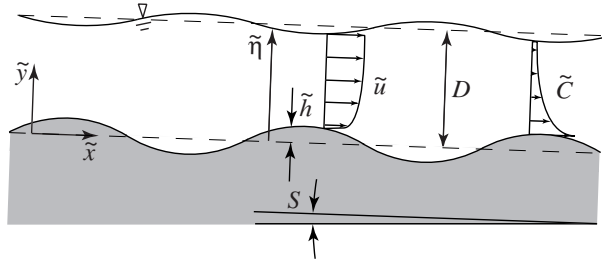


図-2 座標系の概念図．

## (2) 境界条件

水面では，水面に対する法線方向の流速がゼロとなる運動学的境界条件が成立する．それは次式で表される．

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{\eta} \quad (8)$$

ここで  $\tilde{\mathbf{u}}$  は流速ベクトル ( $= (\tilde{u}, \tilde{v})$ )， $\tilde{\eta}$  は水面の位置の  $\tilde{y}$  座標である．上式では準定常の仮定を用いて非定常項を無視していることに注意する必要がある．水面に対して法線方向および接線方向の応力がどちらもほぼゼロとなる力学的境界条件は，それぞれ次式で表される．

$$\tilde{\mathbf{e}}_{ns} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{\eta} \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{ts} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{\eta} \quad (10)$$

ここで  $\tilde{\mathbf{e}}_{ts}$  および  $\tilde{\mathbf{e}}_{ns}$  はそれぞれ水面における接線および法線方向の単位ベクトルであり，次式で表される．

$$\tilde{\mathbf{e}}_{ts} = \frac{(1, \partial\tilde{\eta}/\partial\tilde{x})}{[1 + (\partial\tilde{\eta}/\partial\tilde{x})^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{ns} = \frac{(-\partial\tilde{\eta}/\partial\tilde{x}, 1)}{[1 + (\partial\tilde{\eta}/\partial\tilde{x})^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (11a, b)$$

さらに  $\tilde{\mathbf{T}}$  は応力テンソルであり，次のように表される．

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\tau}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_{xx} & \tilde{\tau}_{xy} \\ \tilde{\tau}_{yx} & \tilde{\tau}_{yy} \end{bmatrix} \quad (12a)$$

$$\tilde{\tau}_{xx} = -\tilde{p} + 2\rho\tilde{\epsilon}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}}, \quad \tilde{\tau}_{yy} = -\tilde{p} + 2\rho\tilde{\epsilon}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}} \quad (12b, c)$$

$$\tilde{\tau}_{xy} = \tilde{\tau}_{yx} = \rho\tilde{\epsilon}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{x}}\right) \quad (12d)$$

底面に対して法線方向の流速がゼロとなる運動学的条件は次のように表される．

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{nb} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{h} \quad (13)$$

ここで  $\tilde{h}$  は底面位置の  $\tilde{y}$  座標である．前述したように，解析の対象となるのは外部層の流れである．したがって底面近傍における境界条件として non-slip 条件を用いることはできない．ここでは Engelund<sup>10)</sup> および Fredsøe<sup>11)</sup> に従い，外部層下端におけるスリップ流速と底面剪断力の関係を次のように仮定する．

$$\frac{\rho}{K^2} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{tb})^2 = \tilde{\mathbf{e}}_{tb} \cdot \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{nb} \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{h} \quad (14)$$

ここで  $\tilde{\mathbf{e}}_{tb}$  および  $\tilde{\mathbf{e}}_{nb}$  はそれぞれ底面に対する接線および法線方向の単位ベクトルであり，次式で表される．

$$\tilde{\mathbf{e}}_{tb} = \frac{(1, \partial\tilde{h}/\partial\tilde{x})}{[1 + (\partial\tilde{h}/\partial\tilde{x})^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_{nb} = \frac{(-\partial\tilde{h}/\partial\tilde{x}, 1)}{[1 + (\partial\tilde{h}/\partial\tilde{x})^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (15a, b)$$

水面からの砂の供給がないものとするとき，水面に対する法線方向の浮遊砂フラックスはゼロとなる．そのとき次式が要求される．

$$(\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{v}_s \tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{k}}) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{\eta} \quad (16)$$

ここで  $\tilde{k}$  は鉛直方向の単位ベクトル (= (0, 1)) である．また  $\tilde{F}$  は拡散フラックスベクトルであり，次のように表される．

$$\tilde{F} = \left( -\tilde{\epsilon} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}}, -\tilde{\epsilon} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{y}} \right) \quad (17)$$

一方底面では，巻き上げによって浮遊砂が流水中に供給される．このとき浮遊砂フラックスの底面に対する法線方向成分は底面からの砂の巻き上げ量と等しくなる．したがって次式が成立する．

$$\tilde{F} \cdot \tilde{e}_{ns} = \tilde{\mathcal{E}} \quad \text{at} \quad \tilde{y} = \tilde{h} \quad (18)$$

ここで  $\tilde{\mathcal{E}}$  は底面での砂の巻き上げ量であり，次式で表されると仮定する．

$$\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{v}_s E_s \left( \frac{\tilde{u}_f}{\tilde{v}_s} \right)^N \quad (19)$$

ここで  $\tilde{u}_f$  は摩擦速度， $E_s$  および  $N$  は経験的に決定される係数である．これまでの研究によると  $N$  は 2–10 の値をとると言われており<sup>18),19),20)</sup>， $E_s$  は  $N$  に応じた値をとる．ここでは従来の実験結果を基に泉，田中，坪井，伊達<sup>20)</sup>が提案した， $N = 4$  および  $E_s = 1.0 \times 10^{-5}$  の値を用いる．

### (3) 河床高の時間変化式

掃流砂および浮遊砂の輸送によって河床高が変化する場合，その時間変化は次式によって表される．

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{h}^{bl}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{h}^{sl}}{\partial \tilde{t}} \quad (20)$$

ここで上式の右辺第一項および第二項はそれぞれ掃流砂および浮遊砂による河床高の変化量を表している．

掃流砂による河床高さの時間変化は次式で表される．

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \tilde{h}^{bl}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{q}_B}{\partial \tilde{x}} \quad (21)$$

ここで  $\tilde{q}_B$  は単位幅当たりの掃流砂量である．河床勾配が存在するとき，底面上の砂粒子には，底面剪断力に加えて重力の河床接線方向成分が付加的に働くことから，Fredsoe<sup>11)</sup>はその付加的な力を  $\mu^* \partial \tilde{h} / \partial \tilde{x}$  と表すことによって掃流砂量を次式で表した．

$$\frac{\tilde{q}_B}{(R_s g D_s^3)^{1/2}} = 8 \left( \tau_b^* - \tau_{th}^* - \mu^* \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} \right)^{3/2} \quad (22)$$

ここで  $\tau_{th}^*$  は限界 Shields 数であり，0.05 とする． $\tau_b^*$  は Shields 剪断力であり，次式で定義される．

$$\tau_b^* = \frac{\tilde{\tau}_b}{\rho R_s g D_s} \quad (23)$$

ここで  $\tilde{\tau}_b$  は底面剪断力， $R_s$  は砂粒子の水中比重 (= 1.65)， $D_s$  は砂粒子の粒径である．また  $\mu^*$  は局所勾配の影響を表すパラメータであり，0.1 のオーダーであるといわれている<sup>11)</sup>．

浮遊砂によって河床高さが変化する場合，その時間変化は次式のように表される．

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \tilde{h}^{sl}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\mathcal{D}} - \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{\tilde{k} \cdot \tilde{e}_{nb}} \quad (24)$$

ここで  $\tilde{\mathcal{D}}$  は浮遊砂の沈降量であり，次式で表される．

$$\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{v}_s \tilde{C}_b \quad (25)$$

また  $\tilde{C}_b$  は底面近傍での浮遊砂濃度 ( $\tilde{C}_b = \tilde{C}|_{y=\tilde{h}}$ ) である．

(4) 無次元化および正規化

次のような無次元化および正規化を導入する .

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\eta}, \tilde{h}) = D(x, y, \eta, h) \quad (26a)$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{U_f}{\epsilon} (u, v), \quad \tilde{C} = E_s \left( \frac{U_f}{\tilde{v}_s} \right)^N C \quad (26b, c)$$

$$\tilde{p} = \rho (U_f / \epsilon)^2 p, \quad (\tilde{\tau}_{ij}, \tilde{\tau}_b) = \rho U_f^2 (\tau_{ij}, \tau_b) \quad (26d, e)$$

上式を用いると式 (2)–(4) は次のように表される .

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \left( 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \sigma^{-1} + \epsilon^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

ここで  $\sigma$  は正規化された河床勾配 ( $= S / \epsilon^2$ ) である . 次式で定義される流れ関数  $\psi$  を定義する .

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (30a, b)$$

すると式 (27)–(29) は次のように書き表される .

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \epsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (31)$$

ここで  $\nabla^2$  は次式で表される .

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (32)$$

浮遊砂の移流拡散方程式 (5) を無次元化すると次式が得られる .

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} = \epsilon^2 \left( R_f \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (33)$$

ここで  $R_f$  は無次元化された浮遊砂粒子の沈降速度であり , 次式で表される .

$$R_f = \frac{\tilde{v}_s}{\epsilon U_f} \quad (34)$$

河床形状の時間変化式 (20) は次のように無次元化される .

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{1}{1 + M_s} \frac{\partial h^{bl}}{\partial t} + \frac{M_s R_f^{1-N}}{1 + M_s} \frac{\partial h^{sl}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{1 + M_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_b - \theta - \mu \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{3/2} + \frac{M_s}{1 + M_s} R_f^{1-N} \left( C_b - \frac{\tau_b^{N/2}}{k \cdot e_{nb}} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

ここで  $\theta$  および  $\mu$  はそれぞれデューンが形成される前の平坦床における Shields 剪断力で正規化された限界 Shields 数および河床勾配の効果を表すパラメータ  $\mu^*$  である . また  $M_s$  は掃流砂に対する浮遊砂の寄与率を表すパラメータであり , 次式で表される .

$$\theta = \frac{\tau_{th}^*}{\tau_{b0}^*}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\tau_{b0}^*}, \quad M_s = \frac{\epsilon^{1-N} E_s U_f D}{Q_B} = \frac{\epsilon^{1-N} E_s R_s}{8S} \quad (36a, b, c)$$

上式中の  $\tau_{b0}^*$  は等流状態における Shields 数である．また時間  $\tilde{t}$  は次のように無次元化されている．

$$\tilde{t} = \frac{(1 - \lambda_p)D^2}{Q_B + \epsilon^{1-N}E_s U_f D} t \quad (36d, e)$$

さらに  $Q_B$  は次のように表される．

$$Q_B = \frac{8U_f^3}{gR_s} \quad (36f)$$

境界条件 (8)–(10) および (13), (14), (16), (18) は次のように無次元化される．

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } y = \eta \quad (37)$$

$$\mathbf{e}_{ns} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } y = \eta \quad (38)$$

$$\mathbf{e}_{ts} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } y = \eta \quad (39)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{nb} = 0 \quad \text{at } y = h \quad (40)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{tb})^2 = \kappa^2 (\mathbf{e}_{tb} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{nb}) \quad \text{at } y = h \quad (41)$$

$$(\mathbf{F} - R_f C \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_{ns} = 0 \quad \text{at } y = \eta \quad (42)$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_{ns} = R_f \tau_b^{N/2} \quad \text{at } y = h \quad (43)$$

ここで  $\kappa$  は正規化された  $K(= \epsilon K)$  である．また  $\mathbf{e}_{ts}$  および  $\mathbf{e}_{ns}$ ,  $\mathbf{e}_{tb}$ ,  $\mathbf{e}_{nb}$  はそれぞれ無次元化された  $\tilde{\mathbf{e}}_{ts}$  および  $\tilde{\mathbf{e}}_{ns}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_{tb}$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_{nb}$  であり，次式で表される．

$$\mathbf{e}_{ts} = \frac{(1, \partial\eta/\partial y)}{[1 + (\partial\eta/\partial y)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathbf{e}_{ns} = \frac{(-\partial\eta/\partial y, 1)}{[1 + (\partial\eta/\partial y)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (44a, b)$$

$$\mathbf{e}_{tb} = \frac{(1, \partial h/\partial y)}{[1 + (\partial h/\partial y)^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathbf{e}_{nb} = \frac{(-\partial h/\partial y, 1)}{[1 + (\partial h/\partial y)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (44c, d)$$

さらに  $\mathbf{T}$  は無次元化された応力テンソルであり，次のように表される．

$$\mathbf{T} = \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (45a)$$

$$\tau_{xx} = -\frac{p}{\epsilon^2} - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{yy} = -\frac{p}{\epsilon^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (45b, c)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (45d)$$

$\mathbf{F}$  は無次元化された浮遊砂フラックスであり次式で表される．

$$\mathbf{F} = \left( -\frac{\partial C}{\partial x}, -\frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (46)$$

(5) 変数変換

前報<sup>7)</sup>にならって次式で表される変数変換を導入する .

$$\chi = \frac{y - h(x)}{\eta(x) - h(x)}, \quad \xi = x \quad (47a, b)$$

そのとき次の微分関係が成立する .

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta - h} \left[ (1 - \chi) \frac{\partial h}{\partial \xi} - \chi \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right] \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (48a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\eta - h} \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (48b)$$

上の変数変換を導入すると , 流れの運動方程式 (31) および浮遊砂の移流拡散方程式 (33) はそれぞれ次のように書き表される .

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_k}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \\ & - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_r} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_r} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} - \epsilon^2 \left[ R_f \frac{\partial C}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial C}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (50)$$

ここで  $j, k, l, m, n, r = 1, 2$  であり ,  $(x_1, x_2)$  および  $(\xi_1, \xi_2)$  はそれぞれ次のとおりである .

$$(x_1, x_2) = (x, y), \quad (\xi_1, \xi_2) = (\xi, \chi) \quad (51a, b)$$

また独立変数に添字がついている場合は Einstein の縮約規約が用いられていることに注意する必要がある .

式 (47)–(48) を用いて境界条件 (37)–(43) は具体的に次のように書き表される .

$$-\frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \quad (52)$$

$$\begin{aligned} -p + \frac{2\epsilon^2}{1 + (\partial \eta / \partial \xi)^2} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \left\{ 1 - \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \right] = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \end{aligned} \quad (53)$$

$$4 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} + \left\{ 1 - \left( \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \right\} = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \quad (54)$$

$$-\frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} = 0 \quad \text{at } \chi = 0 \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 = \kappa^2 \left[ 4 \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \right\} \left\{ 1 - \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \right] \quad \text{at } \chi = 0 \end{aligned} \quad (56)$$



$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial C}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} - R_f C = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \quad (57)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial C}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} - R_f \tau_b^{N/2} = 0 \quad \text{at } \chi = 0 \quad (58)$$

河床高の時間変化式 (35) に変数変換を導入すると、次のように表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{1 + M_s} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \tau_b - \theta - \mu \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^{3/2} + \frac{M_s}{1 + M_s} R_f^{1-N} \left( C_b - \frac{\tau_b^{N/2}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{nb}} \right) \quad (59)$$

ここで

$$\tau_b = \frac{1}{1 + (\partial h / \partial \xi)^2} \left[ 4 \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial y} + \left\{ 1 - \left( \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \right\} \right]_{\chi=0} \quad (60)$$

$$C_b = C|_{\chi=0} \quad (61)$$

## (6) 基本解

基準状態（等流状態）における流速の水深方向分布は次のように求められる<sup>7)</sup>。

$$-\frac{d\psi_0}{d\chi} = U_0(\chi) = -\frac{1}{2}\chi^2 + \chi + \kappa \quad (62)$$

上式の水深平均をとると無次元平均流速は  $\kappa + 1/3$  と表されることがわかる。これを用いると平均流速に対するフルード数  $Fr$  は次のように表される。

$$Fr = \sigma^{1/2} \left( \kappa + \frac{1}{3} \right) \quad (63)$$

本研究では後出の摂動方程式の解析解が求められるように、Fredsoe<sup>11)</sup> に従い、式 (62) で表される等流流速を次のような余弦関数で近似する。

$$U_0(\chi) = \left( \kappa + \frac{1}{2} \right) \cos [\beta(1 - y)] \quad (64)$$

ここで  $\beta = (\kappa + 1/2)^{-1/2}$  とすると、上式は式 (62) の良い近似となっている。

式 (50) において  $\xi$  方向の変化を無視すると、基準状態における浮遊砂濃度  $C_0$  について次式が得られる。

$$R_f \frac{dC_0}{d\chi} + \frac{d^2 C_0}{d\chi^2} = 0 \quad (65)$$

上式を解くための境界条件は、式 (57) および (58) において  $\xi$  方向の微分を無視することによって次のように得られる。

$$-C'_0(1) - R_f C_0(1) = 0 \quad (66)$$

$$-C'_0(0) - R_f = 0 \quad (67)$$

上式を満足する式 (65) の解は次のように求められる。

$$C_0(\chi) = e^{-R_f \chi} \quad (68)$$

#### 4. 線形安定解析

線形安定解析において次のような摂動展開を導入する．

$$(\psi(\chi), \eta, h, C(\chi)) = (\psi_0(\chi), 1, 0, C_0(\chi)) + Ae^{\Omega t} (\psi_1(\chi), \eta_1, h_1, C_1(\chi)) e^{i(k\xi - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (69)$$

ここで  $\Omega$  および  $\omega, k$  はそれぞれ擾乱の増幅率および角周波数，波数であり，c.c. は直前の項の複素共役を表す．このとき擾乱の位相速度は  $\omega/k$  で表される．式 (69) を式 (49) に代入し  $A$  について整理すると， $O(A)$  について次式が得られる．

$$ik [U_0 \psi_1'' - (k^2 U_0 + U_0'') \psi_1 - U_0' \{k^2 [h_1 - (h_1 - \eta_1) \chi]\} - 2U_0 U_0' (h_1 - \eta_1)] - \epsilon^2 [\psi_1^{iv} - 2k^2 \psi_1'' + k^4 \psi_1 - k^2 \{(k^2 U_0 - 2U_0'') [-h_1 + \chi (h_1 - \eta_1)] + 4U_0' (h_1 - \eta_1)\}] = 0 \quad (70)$$

上式を見ると，レイノルズ応力を表す項に  $\epsilon^2$  という微小なパラメータが現れるのがわかる．本論文で用いている簡便な乱流モデルでは constant stress layer 外部の層の流れを解くことになるが，外部層の境界近傍には依然として弱い境界層が存在していることがわかる． $\epsilon$  を微小パラメータと考えて接合漸近展開法を用いて解くと， $\psi_1(\chi)$  は次のように求められる<sup>6,7)</sup>．

$$\begin{aligned} \psi_1(\chi) = & a_1 \exp \left[ (k^2 - \beta^2)^{1/2} \chi \right] + b_1 \exp \left[ - (k^2 - \beta^2)^{1/2} \chi \right] + c_1 \exp \left[ - (ik\kappa)^{1/2} \frac{\chi}{\epsilon} \right] \\ & + d_1 \exp \left[ - \left( ik \left( \kappa + \frac{1}{2} \right) \right)^{1/2} \frac{1 - \chi}{\epsilon} \right] - \beta^{-2} [h_1 - \chi (h_1 - \eta_1)] \cos [\beta (1 - \chi)] \end{aligned} \quad (71)$$

ここで  $a_1$  および  $b_1, c_1, d_1$  は積分定数である．式 (69) を式 (50) に代入すると， $O(A)$  で次の摂動方程式が得られる．

$$ik (C_1 U_0 + \psi_1 C_0') + \epsilon^2 [k^2 C_1 - R_f C_1' - C_1'' + h_1 \{[-R_f + k^2 (\chi - 1)] C_0' - 2C_0''\} + \eta_1 \{(R_f - k^2 \chi) C_0' + 2C_0''\}] = 0 \quad (72)$$

式 (72) は流れの支配方程式と同様に接合漸近展開法によって解かれる． $O(\epsilon)$  の項を無視すると境界層外部領域において成り立つ次式が得られる．

$$C_1^o(\chi) U_0 + \psi_1^o C_0' = 0 \quad (73)$$

ここで上付きの  $o$  は外部領域における外部解を表している．上式は容易に解けて  $C_1^o(\chi)$  は次のように求められる．

$$C_1^o(\chi) = - \frac{\beta^2 \psi_1^o(\chi) C_0'(\chi)}{U_0(\chi)} \quad (74)$$

底面 ( $\chi = 0$ ) 近傍の境界層内部領域において次の変数変換を導入する．

$$\zeta = \frac{\chi}{\epsilon} \quad (75)$$

上式を式 (72) に代入し  $\epsilon$  について整理すると，次式が得られる．

$$ik\kappa C_1^b(\zeta) - \frac{\partial^2 C_1^b(\zeta)}{\partial \zeta^2} = O(\epsilon) \quad (76)$$

ここで上付きの  $b$  は底面近傍の内部領域における内部解を表している．上式の一般解は次のように求められる．

$$C_1^b(\chi) = a \exp \left[ - (ik\kappa)^{1/2} \zeta \right] + b \exp \left[ (ik\kappa)^{1/2} \zeta \right] \quad (77)$$

外部領域との接続条件は次のように与えられる．

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} C_1^o(\chi) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} C_1^b(\zeta) \quad (78)$$

この条件より次式が得られる .

$$b = 0 \quad (79)$$

水面 ( $\chi = 1$ ) 近傍の内部領域において次のような内部変数を定義する .

$$\gamma = \frac{1 - \chi}{\epsilon} \quad (80)$$

このとき式 (72) は次のように表される .

$$ik \left(1 + \frac{1}{2}\kappa\right) C_1^s(\gamma) - \frac{\partial^2 C_1^s(\gamma)}{\partial \gamma^2} = O(\epsilon) \quad (81)$$

ここで上付きの  $s$  は水面近傍の内部領域における内部解を表している . 上式の一般解は次のように求められる .

$$C_1^s(\gamma) = c \exp \left\{ - \left[ ik \left( \kappa + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2} \gamma \right\} + d \exp \left\{ - \left[ ik \left( \kappa + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2} \gamma \right\} \quad (82)$$

外部解との接続条件は次のように表される .

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} C_1^o(\chi) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} C_1^s(\chi) \quad (83)$$

この条件より次式が得られる .

$$d = 0 \quad (84)$$

結局  $\chi = 0$  から  $\chi = 1$  の全領域で成り立つ解  $C_1(\chi)$  は次のように得られる .

$$C_1(\chi) = -\frac{\beta^2 \psi_1(\chi) C_0'(\chi)}{U_0(\chi)} + c_1^{sl} \exp \left[ - (ik\kappa)^{1/2} \frac{\chi}{\epsilon} \right] + d_1^{sl} \exp \left\{ - \left[ ik \left( \kappa + \frac{1}{2} \right) \right]^{1/2} \frac{1 - \chi}{\epsilon} \right\} \quad (85)$$

式 (69) を式 (52)–(59) に代入し  $A$  について整理すると ,  $O(A)$  においてそれぞれ次式が得られる .

$$\psi_1(1) = 0 \quad (86)$$

$$\frac{\eta_1}{\sigma} - \left( \frac{1}{2} + \kappa \right)^2 (\eta_1 - h_1) - \left( \frac{1}{2} + \kappa \right) \psi_1'(1) + \epsilon^2 \left[ 3ik \left( k^{-2} + \frac{1}{2} + \kappa \right) (\eta_1 - h_1) + 3ik \psi_1'(1) - \frac{i\psi_1'''(1)}{k} \right] = 0 \quad (87)$$

$$-k^2 \left( \frac{1}{2} + \kappa \right) \eta_1 - k^2 \psi_1(1) - \psi_1''(1) = 0 \quad (88)$$

$$\psi_1(0) = 0 \quad (89)$$

$$-\kappa (\eta_1 - h_1) + k^2 \kappa^2 h_1 + k^2 \kappa \psi_1(0) - 2\psi_1'(0) + \kappa \psi_1''(0) = 0 \quad (90)$$

$$-R_f C_1(1) - C_1'(1) + C_0'(1) (\eta_1 - h_1) = 0 \quad (91)$$

$$\left[ NR_f + C_0'(0) \right] (\eta_1 - h_1) + \frac{1}{2} k^2 \kappa NR_f h_1 - C_1'(0) + \frac{1}{2} NR_f \left[ k^2 \psi_1(0) + \psi_1''(0) \right] = 0 \quad (92)$$

$$\begin{aligned} (\Omega - i\omega) h_1 - \frac{3ik(1 - \theta)^{1/2}}{2(1 + M_s)} \left[ 2(\eta_1 - h_1) + k(k\kappa + i\mu) h_1 + k^2 \psi_1(0) + \psi_1''(0) \right] \\ - \frac{M_s R_f^{-N}}{1 + M_s} \left[ R_f C_1(0) + C_1'(0) - C_0'(0) (\eta_1 - h) \right] = 0 \end{aligned} \quad (93)$$

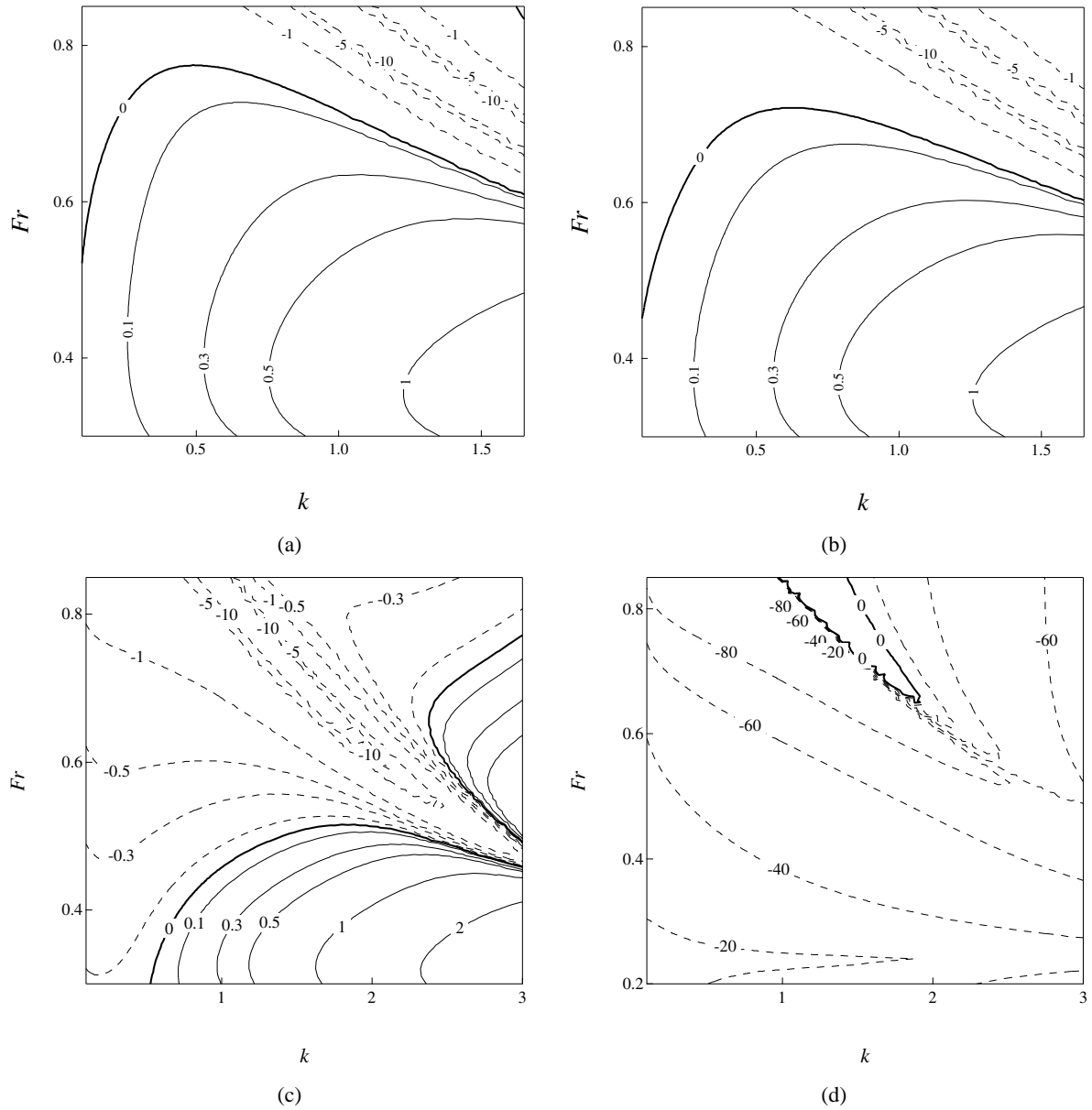


図-3 式 (96) より得られる増幅率  $\Omega$  の等高線図．太実線は中立曲線 ( $\Omega = 0$ ) を表し，実線および破線はそれぞれ正および負の増幅率を示す． $\sigma = 0.5$  ,  $\theta = 0.1$  ,  $\mu = 0.3$  ,  $M_s = 1.5$  ( $S = 0.003$  ,  $\tau_{b0}^* = 0.5$  ,  $\mu^* = 0.15$ ) (a)  $R_f = 10$  ( $U_f/\bar{v}_s = 1.2$ ), (b)  $R_f = 4$  ( $U_f/\bar{v}_s = 3.5$ ), (c)  $R_f = 2$  ( $U_f/\bar{v}_s = 6.5$ ), (d)  $R_f = 0.5$  ( $U_f/\bar{v}_s = 26$ ).

ここで式 (87) を導く際，圧力を消去するために，式 (27) および (28) を変数変換し線形化した式を用いている．

式 (71) および (85) を式 (86)–(93) に代入すると， $a_1$  および  $b_1$  ,  $c_1$  ,  $d_1$  ,  $c_1^{sl}$  ,  $d_1^{sl}$  ,  $\eta_1$  ,  $h_1$  に関する次の線形連立方程式系が得られる．

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ c_1^{sl} \\ d_1^{sl} \\ \eta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (94)$$

ここで  $\mathbf{R}$  は  $8 \times 8$  の行列である．行列  $\mathbf{R}$  の各成分は  $\Omega$  および  $\omega, k, Fr, \sigma, \theta, \mu, M_s, R_f, N$  の関数である．式 (94) が自明な解以外の解を持つための条件は次式で与えられる．

$$|\mathbf{R}| = 0 \quad (95)$$

上式より次式のような関係が得られ，増幅率  $\Omega$  の値が求められる．

$$\Omega = \Omega(k, Fr; \sigma, \theta, \mu, M_s, R_f, N) \quad (96a)$$

$$\omega = \omega(k, Fr; \sigma, \theta, \mu, M_s, R_f, N) \quad (96b)$$

図-3 に式 (95) より求められる増幅率  $\Omega$  の  $k$ - $Fr$  平面上における等高線図を示す．太い実線は中立曲線 ( $\Omega = 0$ ) を示し，実線および破線はそれぞれ正および負の増幅率に対応している．図は  $\sigma = 0.5$  および  $\theta = 0.1$ ， $\mu = 0.3$  ( $S = 0.003$ ， $\tau_{b0}^* = 0.5$ ， $\mu^* = 0.15$  に相当) とした場合の結果である．Guy, Simon and Richardson<sup>21)</sup>によれば，実験でデューン平坦床遷移が生じるのは Shields 剪断力が  $0.5$ – $1.0$  の時である．そこで Shields 剪断力が限界 Shields 数の  $10$  倍程度となると考え， $\theta$  の値は  $0.1$  としている．浮遊砂の巻き上げ量を特徴付けるパラメータ  $N$  および  $E_s$  の値については，それぞれ  $N = 4$  および  $E_s = 1 \times 10^{-5}$  としている<sup>20)</sup>．平均河床勾配  $S$  および  $N$ ， $E_s$  を与えると  $M_s$  の値が式 (36c) より決定され，この場合は  $M_s = 1.5$  となる．図-3(a) および (b)，(c)，(d) には正規化された砂の沈降速度  $R_f$  の値をそれぞれ  $10$  ( $U_f/\bar{v}_s = 1.2$ ) および  $4$  ( $U_f/\bar{v}_s = 3.5$ )， $2$  ( $U_f/\bar{v}_s = 6.5$ )， $0.5$  ( $U_f/\bar{v}_s = 26$ ) とした場合を示した．図によると， $R_f$  の値が減少するとともにデューン発生の限界値を示す臨界フルード数の値は減少することがわかる．砂の浮遊限界は  $R_f = 9$ – $16$  ( $U_f/\bar{v}_s = 0.8$ – $1.4$ ) 程度であり<sup>22),23)</sup>，図-3(a) のように  $R_f$  が浮遊限界時の値に近い場合は，掃流砂のみを考慮した場合<sup>7)</sup> とほぼ同様の結果が得られることがわかる．また， $U_f$  の値が浮遊限界を超えて  $R_f$  の値が小さくなると ( $U_f/\bar{v}_s$  の値が大きくなると)，図-3(b) および (c) に見られるようにフルード数が  $0.5$ – $0.7$  程度の領域において増幅率の値が負となる領域が広がっていくことがわかる．さらに  $R_f$  の値が  $0.5$  まで小さくなると，図-3(d) のように，フルード数および波数の値が大きい範囲のみに，増幅率が正となる領域が現れる．この領域では水面形の位相が河床形状とほぼ同位相となっており，アンチデューンの発生を示している．

$R_f$  の値が浮遊限界時の値に近い場合，河床における砂の巻き上げはほとんど生じないが， $R_f$  が浮遊限界時の値を下回って小さくなるほど砂の巻き上げは活発となる．したがって，図の結果は  $R_f$  の値が小さく浮遊が活発な場合，フルード数が比較的大きな領域においてデューンの発生が抑制されることを示している．そして  $R_f$  の値が減少するとデューン発生の限界値を示す臨界フルード数の値は減少し，さらに  $R_f$  の値が小さくなるとフルード数の比較的低い領域においてもデューンは発生しなくなる．

常流の条件下では，波状擾乱上の流速はクレスト部の若干下流で最大値を取り，それに対応して掃流砂量の最大値もクレスト部の若干下流に現れる．この僅かな位相のずれが掃流砂によるデューン発生の原因となっている．それに対して浮遊砂は，移流の影響によって掃流砂量よりさらに大きな位相のずれを持つ． $R_f$  が小さくなると砂の巻き上げが活発になるだけでなく，より移流の影響を大きく受けるようになる．浮遊砂の位相のずれが大きくなり河床高変化に対する寄与が掃流砂と逆位相を取るようになると，浮遊砂は河床を安定にする方向に働き，全般的に  $\Omega$  の値は低下する．このため臨界フルード数のすぐ下の領域では  $\Omega$  の値が負の値を取るようになり，臨界フルード数は低下することになる．

## 5. 弱非線型安定解析

### (1) 摂動展開

前節までの線形安定解析では微小振幅  $A$  を有する擾乱を流速および河床形状，水面形に与えた．弱非線形解析では，デューン–平坦床遷移現象を支配するパラメータであるフルード数に摂動を与える．ここでフルード数に摂動を与える物理的意味を考えてみる．式 (63) より判るように，本解析で使っているモデルでは，フルード数は正規化された河床勾配  $\sigma$  と  $\kappa$  で決定される． $(\kappa + 1/3)/\epsilon$  は流速係数 ( $= \bar{U}/U_f$ ;  $\bar{U}$  は水深平均流速) であり， $\kappa$  は次式で表される<sup>10)</sup>．

$$\kappa = \epsilon \left[ 1.9 + 2.5 \ln \left( \frac{D}{k_s} \right) \right] \quad (97)$$

ここで  $k_s$  は相当粗度であり， $D/k_s$  は粗度に対する相対水深を表している．河床勾配が変化しないと仮定すると，フルード数に摂動を与えることは，相対水深に摂動を与えることに対応していることが判る．

また  $\kappa + 1/3$  が無次元の平均流速（あるいは流量）であることから，相対水深の変化に応じて流量も変化することが判る．

次式で表されるような，臨界フルード数  $F_c$  のごく近傍を考える．

$$Fr = F_c - \nu^2 F_c \quad (98)$$

フルード数が臨界フルード数に一致するとき擾乱の成長率はゼロとなり，発達も減衰もしない．式 (98) で表されるように臨界フルード数から  $\nu^2$  だけずれた領域では，擾乱の発達率も  $\nu^2$  のオーダーになることが予想される．したがって振幅  $A$  の変化する時間も非常に長く  $\nu^{-2}$  のオーダーとなる．そこで次のような二つの異なるスケールを持った時間変数を導入する．

$$\tilde{t} = t, \quad T = \nu^2 t \quad (99a, b)$$

そのとき時間微分は次のように変換される．

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \nu^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad (100)$$

式 (98) に対応して全ての従属変数を  $\nu$  を用いて次のように展開する．

$$(\psi(\chi), \eta, h, C(\chi)) = (\psi_0(\chi), 1, 0, C_0(\chi)) + \sum_{n=1}^3 \nu^n (\hat{\psi}_n(\chi), \hat{\eta}_n, \hat{h}_n, \hat{C}_n(\chi)) \quad (101)$$

## (2) $O(\nu)$ の解

$O(\nu)$  では，線形安定解析で考えたような振幅  $A$  および波数  $k$ ，角周波数  $\omega$  の基本擾乱を考える．それは次式で表される．

$$(\hat{\psi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{h}_1, \hat{C}_1) = A(\psi_{11}(\chi), \eta_{11}, h_{11}, C_{11}(\chi))E + \text{c.c.} \quad (102a)$$

ここで

$$E = \exp[i(k\xi - \omega_c t)] \quad (102b)$$

であり， $\omega_c$  は臨界フルード数に対応する角周波数である． $O(\nu)$  の解は線形安定解析の場合とほぼ同様に解かれる．

式 (49) に式 (101) および (102) を代入し  $O(\nu)$  の項のみ残すと次式が得られる．

$$L_1 \psi_{11} + J_1 h_{11} + G_1 \eta_{11} = 0 \quad (103)$$

ここで  $L_n$ ， $J_n$  および  $G_n$  は次式で表される．

$$L_n = ink [U_0 S_n - U_0''] - \epsilon^2 S_n^2 \quad (104a)$$

$$J_n = ink [-n^2 k^2 (1 - \chi) U_0' - 2U_0 U_0'] + \epsilon^2 n^2 k^2 [(-n^2 k^2 U_0 + 2U_0'')(1 - \chi) - 4U_0'] \quad (104b)$$

$$G_n = ink [-n^2 k^2 \chi U_0' + 2U_0 U_0'] + \epsilon^2 n^2 k^2 [(-n^2 k^2 U_0 + 2U_0'')\chi + 4U_0'] \quad (104c)$$

また

$$S_n = \frac{d^2}{d\chi^2} - n^2 k^2 \quad (104d)$$

式 (103) の解は次のように求められる<sup>7)</sup>．

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\chi) = & a_{11}\phi_{a1} + b_{11}\phi_{b1} + c_{11}\phi_{c1} + d_{11}\phi_{d1} \\ & - \eta_{11}\beta_c^{-2}\chi \cos[\beta_c(1 - \chi)] - h_{11}\beta_c^{-2}(1 - \chi) \cos[\beta_c(1 - \chi)] \end{aligned} \quad (105)$$

ここで

$$\phi_{an} = \exp\left[(n^2 k^2 - \beta_c^2)^{1/2} \chi\right] \quad (106a)$$

$$\phi_{bn} = \exp\left[-(n^2 k^2 - \beta_c^2)^{1/2} \chi\right] \quad (106b)$$

$$\phi_{cn} = \exp\left[-(nik\kappa_c)^{1/2} \frac{\chi}{\epsilon}\right] \quad (106c)$$

$$\phi_{dn} = \exp\left[-\left(nik\left(\kappa_c + \frac{1}{2}\right)\right)^{1/2} \frac{1 - \chi}{\epsilon}\right] \quad (106d)$$

また  $\beta_c$  は  $F_c$  (または  $\kappa_c$ ) に対応する  $\beta$  であり,  $\beta_c = (\kappa_c + 1/2)^{-1/2}$  である.  
式 (50) からは次式が得られる.

$$-ikC'_0(\chi)\psi_{11} + L_1^{sl}C_{11} + J_1^{sl}h_{11} + G_1^{sl}\eta_{11} = 0 \quad (107)$$

ここで

$$L_n^{sl} = inkU_0(\chi) - \epsilon^2 \left[ R_f \frac{d}{d\chi} + S_n \right] \quad (108a)$$

$$J_n^{sl} = \epsilon^2 \left[ R_f C'_0(\chi) - 2C''_0(\chi) - n^2 k^2 C'_0(\chi) (\chi - 1) \right] \quad (108b)$$

$$G_n^{sl} = -\epsilon^2 \left[ R_f C'_0(\chi) - 2C''_0(\chi) - n^2 k^2 C'_0(\chi) \chi \right] \quad (108c)$$

式 (107) の解は線形安定解析で既に求めている  $C_1$  の  $Fr$  を  $F_c$  に置き換えることによって得られ, 次のように表される.

$$C_{11}(\chi) = -\frac{\beta_c^2 \psi_{11}^o(\chi) C'_0(\chi)}{U_0(\chi)} + c_{11}^{sl} \phi_{c1} + d_{11}^{sl} \phi_{d1} \quad (109)$$

摂動展開 (101) および (102) を式 (52)–(59) に代入し  $\nu$  のオーダーで整理すると, 式 (86)–(93) の  $Fr$  および  $\Omega$  をそれぞれ  $F_c$  および 0 に置き換えた式が得られる. 解 (105) および (109) をそれらの条件式に代入すると次の線形方程式系が得られる.

$$\mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ b_{11} \\ c_{11} \\ d_{11} \\ c_{11}^{sl} \\ d_{11}^{sl} \\ \eta_{11} \\ h_{11} \end{bmatrix} = 0 \quad (110)$$

ここで  $\mathbf{R}_n$  は線形安定解析で既に得られている  $\mathbf{R}$  において,  $k$  および  $\omega$ ,  $Fr$ ,  $\Omega$  をそれぞれ  $nk$  および  $n\omega_c$ ,  $F_c$ , 0 に置き換えたものである. 線形安定解析の結果から  $|\mathbf{R}_1| = 0$  であることに注意する必要がある.

### (3) $O(\nu^2)$ の解

摂動展開 (101) を式 (49) および式 (50) に代入すると  $O(\nu^2)$  において次式が得られる.

$$L\hat{\psi}_2 + J\hat{h}_2 + G\hat{\eta}_2 = A^2 E^2 I_{22} + \text{c.c.} + AA^* I_{20} \quad (111)$$

$$-C'_0 \hat{\psi}_{2,\xi} + L^{sl} \hat{C}_2 + J^{sl} \hat{h}_2 + G^{sl} \hat{\eta}_2 = A^2 E^2 I_{22}^{sl} + \text{c.c.} + AA^* I_{20}^{sl} \quad (112)$$

ここで上付きの \* はその項自身の複素共役を表している. 式 (111) および (112) 中の右辺は  $O(\nu)$  の解からなり,  $\hat{\psi}_2$  および  $\hat{\eta}_2$ ,  $\hat{h}_2$ ,  $\hat{C}_2$  を含まない非斉次項となっている. また  $I_{22}$  および  $I_{22}^{sl}$  は  $E^2$  の係数であり,  $I_{20}$  および  $I_{20}^{sl}$  は  $E$  を含まない項 ( $E^0$  の係数) である. 式 (111) および (112) を  $E^2$  および  $E^0$  を因子に持つ項に分けると解は次のような形で表されることがわかる.

$$\begin{aligned} (\hat{\psi}_2, \hat{\eta}_2, \hat{h}_2, \hat{C}_2) &= A^2 (\psi_{22}(\chi), \eta_{22}, h_{22}, C_{22}(\chi)) E^2 + \text{c.c.} \\ &+ AA^* (\psi_{20}(\chi), \eta_{20}, h_{20}, C_{20}(\chi)) + (\psi_{00}, \eta_{00}, h_{00}, C_{00}) \end{aligned} \quad (113)$$

ここで式 (113) の右辺最後の 00 が付いた項は, 実際のフルード数が  $F_c - \nu^2 F_c$  であることによる修正を表している. この  $\psi_{00}$  および  $\eta_{00}$ ,  $h_{00}$  は次のように求められる<sup>7)</sup>.

$$\psi_{00} = \sigma^{-1/2} F_c \chi, \quad \eta_{00} = 0, \quad h_{00} = 0 \quad (114a, b, c)$$

式 (114a) からわかるように, フルード数の修正による底面剪断力の変化は生じない. したがって  $C_{00}$  は次のように求められる.

$$C_{00} = 0 \quad (115)$$

式 (113) を (111) に代入し  $A^2E^2$  および  $AA^*$  を含む項について整理すると、それぞれ次式が得られる。

$$L_2\psi_{22} + J_2h_{22} + G_2\eta_{22} = I_{22} \quad (116)$$

$$L_0\psi_{20} + J_0h_{20} + G_0\eta_{20} = I_{20} \quad (117)$$

上式の一般解  $\psi_{22}$  および  $\psi_{20}$  はそれぞれ次のように得られる。

$$\begin{aligned} \psi_{22}(\chi) = & a_{22}\phi_{a2} + b_{22}\phi_{b2} + c_{22}\phi_{c2} + d_{22}\phi_{d2} - \eta_{22}\beta_c^{-2}\chi \cos[\beta_c(1-\chi)] \\ & - h_{22}\beta_c^{-2}(1-\chi) \cos[\beta_c(1-\chi)] + f_{22}(\chi) \end{aligned} \quad (118)$$

$$\psi_{20}(\chi) = \frac{\eta_{20} - h_{20}}{2}\chi^3 + a_{20}\chi^2 + b_{20}\chi + f_{20}(\chi) \quad (119)$$

ここで  $f_{22}(\chi)$  および  $f_{20}(\chi)$  はそれぞれ  $I_{22}$  および  $I_{20}$  に対応する非斉次解である。

式 (113) を (112) に代入し  $A^2E^2$  および  $AA^*$  を含む項について整理すると、それぞれ次式が得られる。

$$-2ikC'_0(\chi)\psi_{22} + L_2^{sl}C_{22} + J_2^{sl}h_{22} + G_2^{sl}\eta_{22} = I_{22}^{sl} \quad (120)$$

$$L_0^{sl}C_{20} + J_0^{sl}h_{20} + G_0^{sl}\eta_{20} = I_{20}^{sl} \quad (121)$$

上式の一般解  $C_{22}$  および  $C_{20}$  はそれぞれ次のように得られる。

$$C_{22}(\chi) = -\frac{\beta_c^2\psi_{22}^o(\chi)C'_0(\chi)}{U_0(\chi)} + c_{22}^{sl}\phi_{c2} + d_{22}^{sl}\phi_{d2} + f_{22}^{sl}(\chi) \quad (122)$$

$$C_{20}(\chi) = C_0(\chi)(h_{20} - \eta_{20})(1 + R_f\chi) + a_{20}^{sl}C_0(\chi) + b_{20}^{sl} + f_{20}^{sl}(\chi) \quad (123)$$

ここで  $f_{22}^{sl}(\chi)$  および  $f_{20}^{sl}(\chi)$  はそれぞれ  $I_{22}^{sl}$  および  $I_{20}^{sl}$  に対応する非斉次解である。

式 (101) および (113) を境界条件 (52)–(58) および河床高の時間変化式 (59) に代入し、 $O(\nu^2)$  において  $A^2E^2$  を因子に持つ項をまとめると次式が得られる。

$$\psi_{22}(1) = 0 \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{22}}{\sigma} - \left(\frac{1}{2} + \kappa_c\right)^2 (\eta_{22} - h_{22}) - \left(\frac{1}{2} + \kappa_c\right) \psi'_{22}(1) \\ + \epsilon^2 \left[ 6ik \left(\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2} + \kappa_c\right) (\eta_{22} - h_{22}) + 6ik\psi'_{22}(1) - \frac{i\psi''_{22}(1)}{2k} \right] = \mathcal{M}_{22} \end{aligned} \quad (125)$$

$$-4k^2 \left(\frac{1}{2} + \kappa_c\right) \eta_{22} - 4k^2\psi_{22}(1) - \psi''_{22}(1) = \mathcal{N}_{22} \quad (126)$$

$$\psi_{22}(0) = 0 \quad (127)$$

$$-\kappa_c^2 (\eta_{22} - h_{22}) + 4k^2\kappa_c^3 h_{22} + 4k^2\kappa_c^2 \psi_{22}(0) - 2\kappa_c\psi'_{22}(0) + \kappa_c^2\psi''_{22}(0) = \mathcal{Q}_{22} \quad (128)$$

$$-R_f C_{22}(1) - C'_{22}(1) + C'_0(1)(\eta_{22} - h_{22}) = \mathcal{N}_{22}^{sl} \quad (129)$$

$$\left[ NR_f + C'_0(0) \right] (\eta_{22} - h_{22}) + 2k^2\kappa_c NR_f h_{22} - C'_{22}(0) + \frac{1}{2} NR_f \left[ 4k^2\psi_{22}(0) + \psi''_{22}(0) \right] = \mathcal{Q}_{22}^{sl} \quad (130)$$

$$\begin{aligned} -2i\omega h_{22} - \frac{3ik(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{1+M_s} \left[ 2(\eta_{22} - h_{22}) + 4k^2\kappa_c h_{22} + 2ik\mu h_{22} + 4k^2\psi_{22}(0) + \psi''_{22}(0) \right] \\ - \frac{M_s R_f^{-N}}{1+M_s} \left[ R_f C_{22}(0) + C'_{22}(0) - C'_0(0)(\eta_{22} - h_{22}) \right] = \mathcal{S}_{22}^{sl} \end{aligned} \quad (131)$$



ここで  $M_{22}$  および  $N_{22}$ ,  $Q_{22}$ ,  $N_{22}^{sl}$ ,  $Q_{22}^{sl}$ ,  $S_{22}^{sl}$  は  $O(\nu)$  の解およびその微分で構成される非斉次項である．得られた一般解 (118) および (122) を式 (124)–(131) に代入すると，次の線形方程式系が得られる．

$$\mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} a_{22} \\ b_{22} \\ c_{22} \\ d_{22} \\ c_{22}^{sl} \\ d_{22}^{sl} \\ \eta_{22} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{22}(1) \\ m_{22} \\ n_{22} \\ -f_{22}(0) \\ q_{22} \\ n_{22}^{sl} \\ q_{22}^{sl} \\ s_{22} \end{bmatrix} \quad (132)$$

ここで

$$\begin{aligned} m_{22} &= M_{22} + \left( \frac{1}{2} + \kappa_c - 6i\epsilon^2 k \right) f'_{22}(1) + \frac{i\epsilon^2}{2k} f''_{22}(1) \\ n_{22} &= N_{22} + 4k^2 f_{22}(1) + f''_{22}(1) \\ q_{22} &= Q_{22} - 4k^2 \kappa_c^2 f_{22}(0) + 2\kappa_c f'_{22}(0) - \kappa_c^2 f''_{22}(0) \\ n_{22}^{sl} &= N_{22}^{sl} + R_f f_{22}^{sl}(1) + f_{22}^{sl'}(1) \\ q_{22}^{sl} &= Q_{22}^{sl} + f_{22}^{sl'}(0) - 2k^2 NR_f f_{22}(0) - \frac{1}{2} NR_f f''_{22}(0) \\ s_{22}^{sl} &= S_{22}^{sl} + \frac{3ik(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}{1+M_s} (4k^2 f_{22}(0) + f''_{22}(0)) + \frac{M_s R_f^{-N}}{1+M_s} (R_f f_{22}^{sl}(0) + f_{22}^{sl'}(0)) \end{aligned}$$

$\mathbf{R}_2$  は正則であるため，上式は容易に解けて八つの未知数が求められる．

同様に式 (52)–(59) から， $AA^*$  を含む項についてそれぞれ次式が得られる．

$$-\psi''_{20}(1) = N_{20} \quad (133)$$

$$-\kappa_c^2 (\eta_{20} - h_{20}) - 2\kappa_c \psi'_{20}(0) + \kappa_c^2 \psi''_{20}(0) = Q_{20} \quad (134)$$

$$-R_f C_{20}(1) - C'_{20}(1) + C'_0(1) (\eta_{20} - h_{20}) = N_{20}^{sl} \quad (135)$$

$$\left[ NR_f + C'_0(0) \right] (\eta_{20} - h_{20}) - C'_{20}(0) + \frac{1}{2} NR_f \psi''_{20}(0) = Q_{20}^{sl} \quad (136)$$

ここで  $N_{20}$  および  $Q_{20}$ ,  $N_{20}^{sl}$ ,  $Q_{20}^{sl}$  は  $O(\nu)$  の解およびその微分によって構成される非斉次項である．式 (119) および (123) を見ればわかるように  $\psi_{20}(\chi)$  および  $C_{20}(\chi)$  は  $\eta_{20}$  および  $h_{20}$ ,  $a_{20}$ ,  $b_{20}$ ,  $a_{20}^{sl}$ ,  $b_{20}^{sl}$  の六つの未定定数を有している．したがってそれらを確定するにはさらに次に述べる 2 つの条件が必要となる．ここでこの流量の変化はフルード数に与えた摂動からのみ発生するものであり，擾乱の発達によって生じる流量の変化は無いことから，次式が条件として与えられる．

$$\int_0^1 \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \chi} d\chi = \psi_{20}(1) - \psi_{20}(0) = 0 \quad (137)$$

さらに平均河床高を一定とすると，次の条件が得られる．

$$h_{20} = 0 \quad (138)$$

式 (133)–(138) を用いて，式 (119) および (123) 中の六つの未定定数が決定される．

#### (4) $O(\nu^3)$ の解

式 (49) および (50) に摂動展開 (101) を代入すると  $O(\nu^3)$  において次式が得られる．

$$L\hat{\psi}_3 + J\hat{h}_3 + G\hat{\eta}_3 = A^3 E^3 I_{33} + \left[ A^2 A^* I_{31}^{(1)} + A I_{31}^{(2)} \right] E \quad (139)$$

$$-C'_0 \hat{\psi}_{3,\xi} + L^{sl} \hat{C}_3 + J^{sl} \hat{h}_3 + G^{sl} \hat{\eta}_3 = A^3 E^3 I_{33}^{sl} + [A^2 A^* I_{31}^{sl(1)} + A I_{31}^{sl(2)}] E \quad (140)$$

ここで  $I_{33}$  および  $I_{31}^{(1)}, I_{31}^{(2)}, I_{33}^{sl}, I_{31}^{sl(1)}, I_{31}^{sl(2)}$  は  $O(\nu)$  および  $O(\nu^2)$  の解およびその微分からなり,  $\hat{\psi}_3$  および  $\hat{\eta}_3, \hat{h}_3, \hat{C}_3$  に対する非斉次項を形成している. 上式の非斉次部分の形から, 解は  $E^3$  および  $E$  を因子に持つ項から成り, 次のような形で表されることがわかる.

$$\begin{aligned} (\hat{\psi}_3, \hat{\eta}_3, \hat{h}_3, \hat{C}_3) &= A^3 (\psi_{33}(\chi), \eta_{33}, h_{33}, C_{33}(\chi)) E^3 + \text{c.c.} \\ &+ (\hat{\psi}_{31}(\chi, T), \hat{\eta}_{31}(T), \hat{h}_{31}(T), \hat{C}_{31}(\chi, T)) E + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (141)$$

ここで  $\hat{\phantom{x}}$  を付けた記号は, 未だ  $A$  を含んでおり  $T$  の関数であることを示している.

式 (141) を式 (139) に代入すると  $E$  を因子に持つ項について次式が得られる.

$$L_1 \hat{\psi}_{31} + J_1 \hat{h}_{31} + G_1 \hat{\eta}_{31} = A^2 A^* I_{31}^{(1)} + A I_{31}^{(2)} \quad (142)$$

上式の一般解は次のように求められる.

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{31}(\chi, T) &= \hat{a}_{31} \phi_{a1} + \hat{b}_{31} \phi_{b1} + \epsilon \hat{c}_{31} \phi_{c1} + \epsilon \hat{d}_{31} \phi_{d1} - \hat{\eta}_{31} \beta_c^{-2} \chi \cos[\beta_c (1 - \chi)] \\ &- \hat{h}_{31} \beta_c^{-2} (1 - \chi) \cos[\beta_c (1 - \chi)] + \hat{f}_{31}(\chi, T) \end{aligned} \quad (143)$$

ここで  $\hat{f}_{31}(\chi, T)$  は非斉次解であり次のように表せる.

$$\hat{f}_{31}(\chi, T) = A^2 A^* f_{31}^{(1)}(\chi) + A f_{31}^{(2)}(\chi) \quad (144)$$

ここで  $f_{31}^{(1)}(\chi)$  および  $f_{31}^{(2)}(\chi)$  はそれぞれ  $I_{31}^{(1)}$  および  $I_{31}^{(2)}$  に対応した非斉次解である. 式 (141) を式 (140) に代入すると  $E$  を因子に持つ項について次式が得られる.

$$-ik C'_0 \hat{\psi}_{31} + L_1^{sl} \hat{C}_{31} + J_1^{sl} \hat{h}_{31} + G_1^{sl} \hat{\eta}_{31} = A^2 A^* I_{31}^{sl(1)} + A I_{31}^{sl(2)} \quad (145)$$

上式の一般解は次のように求められる.

$$\hat{C}_{31}(\chi, T) = -\frac{\beta_c^2 \hat{\psi}_{31}^o C'_0}{U_0} + \hat{c}_{31} \phi_{c1} + \hat{d}_{31} \phi_{d1} + \hat{f}_{31}^{sl}(\chi, T) \quad (146)$$

ここで  $\hat{f}_{31}^{sl}(\chi, T)$  は非斉次解であり次のように表せる.

$$\hat{f}_{31}^{sl}(\chi, T) = A^2 A^* f_{31}^{sl(1)}(\chi) + A f_{31}^{sl(2)}(\chi) \quad (147)$$

また  $f_{31}^{sl(1)}(\chi)$  および  $f_{31}^{sl(2)}(\chi)$  はそれぞれ  $I_{31}^{sl(1)}$  および  $I_{31}^{sl(2)}$  に対応した非斉次解である.

式 (101) および (141) を式 (52)–(59) に代入し,  $O(\nu^3)$  において  $E$  を因子に持つ項だけ残すと次式が得られる.

$$\hat{\psi}_{31}(1, T) = 0 \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\eta}_{31}}{\sigma} - \left(\frac{1}{2} + \kappa_c\right)^2 (\hat{\eta}_{31} - \hat{h}_{31}) - \left(\frac{1}{2} + \kappa_c\right) \hat{\psi}'_{31}(1, T) \\ + \epsilon^2 \left[ 3ik \left(k^{-2} + \frac{1}{2} + \kappa_c\right) (\hat{\eta}_{31} - \hat{h}_{31}) + 3ik \hat{\psi}'_{31}(1, T) - \frac{i \hat{\psi}'''_{31}(1, T)}{k} \right] \\ = A^2 A^* \mathcal{M}_{31}^{(1)} + A \mathcal{M}_{31}^{(2)} \end{aligned} \quad (149)$$

$$-k^2 \left(\frac{1}{2} + \kappa_c\right) \hat{\eta}_{31} - k^2 \hat{\psi}_{31}(1, T) - \hat{\psi}''_{31}(1, T) = A^2 A^* \mathcal{N}_{31}^{(1)} + A \mathcal{N}_{31}^{(2)} \quad (150)$$

$$\hat{\psi}_{31}(0, T) = 0 \quad (151)$$

$$-\kappa_c^2 (\hat{\eta}_{31} - \hat{h}_{31}) + k^2 \kappa_c^3 \hat{h}_{31} + k^2 \kappa_c^2 \hat{\psi}_{31}(0, T) - 2\kappa_c \hat{\psi}'_{31}(0, T) + \kappa_c^2 \hat{\psi}''_{31}(0, T) = A^2 A^* \mathcal{Q}_{31}^{(1)} + A \mathcal{Q}_{31}^{(2)} \quad (152)$$

$$-R_f \hat{C}_{31}(1, T) - \hat{C}'_{31}(1, T) + C'_0(1) (\hat{\eta}_{31} - \hat{h}_{31}) = A^2 A^* \mathcal{N}_{31}^{sl(1)} + A \mathcal{N}_{31}^{sl(2)} \quad (153)$$

$$\begin{aligned} [NR_f + C'_0(0)] (\hat{\eta}_{31} - \hat{h}_{31}) + \frac{1}{2} k^2 \kappa_c NR_f \hat{h}_{31} - \hat{C}'_{31}(0, T) + \frac{1}{2} NR_f [k^2 \hat{\psi}_{31}(0, T) + \hat{\psi}''_{31}(0, T)] \\ = A^2 A^* \mathcal{Q}_{31}^{sl(1)} + A \mathcal{Q}_{31}^{sl(2)} \end{aligned} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} -i\omega_c \hat{h}_{31} + h_{11} \frac{dA}{dT} - \frac{3ik(1-\theta)^{1/2}}{2(1+M_s)} \left[ 2(\hat{\eta}_{31} - 2\hat{h}_{31}) + k(k\kappa_c + i\mu) \hat{h}_{31} + k^2 \hat{\psi}_{31}(0, T) + \hat{\psi}''_{31}(0, T) \right] \\ - \frac{M_s R_f^{-N}}{1+M_s} \left[ R_f \hat{C}_{31}(0, T) + \hat{C}'_{31}(0, T) - C'_0(0) (\hat{\eta}_{31} - \hat{h}_{31}) \right] = A^2 A^* \mathcal{S}_{31}^{sl(1)} + A \mathcal{S}_{31}^{sl(2)} \end{aligned} \quad (155)$$

ここで  $\mathcal{M}_{31}^{(1)}$  および  $\mathcal{N}_{31}^{(1)}, \mathcal{Q}_{31}^{(1)}, \mathcal{M}_{31}^{(2)}, \mathcal{N}_{31}^{(2)}, \mathcal{Q}_{31}^{(2)}, \mathcal{M}_{31}^{sl(1)}, \mathcal{N}_{31}^{sl(1)}, \mathcal{Q}_{31}^{sl(1)}, \mathcal{S}_{31}^{sl(1)}, \mathcal{M}_{31}^{sl(2)}, \mathcal{N}_{31}^{sl(2)}, \mathcal{Q}_{31}^{sl(2)}, \mathcal{S}_{31}^{sl(2)}$  は  $O(v)$  および  $O(v^2)$  の解およびその微分から構成される非斉次項である。  
式 (143) および (146) を式 (148)–(155) に代入すると、次式が得られる。

$$\mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} \hat{a}_{31} \\ \hat{b}_{31} \\ \hat{c}_{31} \\ \hat{d}_{31} \\ \hat{c}_{31}^{sl} \\ \hat{d}_{31}^{sl} \\ \hat{\eta}_{31} \\ \hat{h}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{31}^s \\ \hat{m}_{31} \\ \hat{n}_{31} \\ \hat{f}_{31}^b \\ \hat{q}_{31} \\ \hat{n}_{31}^{sl} \\ \hat{q}_{31}^{sl} \\ \hat{s}_{31}^{sl} \end{bmatrix} \quad (156)$$

ここで

$$\begin{aligned} \hat{f}_{31}^s &= -A^2 A^* f_{31}^{(1)}(1) - A f_{31}^{(2)}(1) \\ \hat{m}_{31} &= A^2 A^* \left[ \mathcal{M}_{31}^{(1)} + \left( \frac{1}{2} + \kappa_c - 3i\epsilon^2 k \right) f_{31}^{(1)'}(1) + \frac{i\epsilon^2}{k} f_{31}^{(1)'''}(1) \right] \\ &\quad + A \left[ \mathcal{M}_{31}^{(2)} + \left( \frac{1}{2} + \kappa_c - 3i\epsilon^2 k \right) f_{31}^{(2)'}(1) + \frac{i\epsilon^2}{k} f_{31}^{(2)'''}(1) \right] \\ \hat{n}_{31} &= A^2 A^* \left( \mathcal{N}_{31}^{(1)} + k^2 f_{31}^{(1)}(1) + f_{31}^{(1)''}(1) \right) + A \left( \mathcal{N}_{31}^{(2)} + k^2 f_{31}^{(2)}(1) + f_{31}^{(1)''}(1) \right) \\ \hat{f}_{31}^b &= -A^2 A^* f_{31}^{(1)}(0) - A f_{31}^{(2)}(0) \\ \hat{q}_{31} &= A^2 A^* \left( \mathcal{Q}_{31}^{(1)} - k^2 \kappa_c^2 f_{31}^{(1)}(0) + 2\kappa_c f_{31}^{(1)'}(0) - \kappa_c^2 f_{31}^{(1)''}(0) \right) \\ &\quad + A \left( \mathcal{Q}_{31}^{(2)} - k^2 \kappa_c^2 f_{31}^{(2)}(0) + 2\kappa_c f_{31}^{(2)'}(0) - \kappa_c^2 f_{31}^{(2)''}(0) \right) \\ \hat{n}_{31}^{sl} &= A^2 A^* \left( \mathcal{N}_{31}^{sl(1)} + R_f f_{31}^{sl(1)}(1) + f_{31}^{sl(1)'}(1) \right) + A \left( \mathcal{N}_{31}^{sl(2)} + R_f f_{31}^{sl(2)}(1) + f_{31}^{sl(2)'}(1) \right) \\ \hat{q}_{31}^{sl} &= A^2 A^* \left( \mathcal{Q}_{31}^{(1)} + f_{31}^{sl(1)'}(0) - \frac{1}{2} k^2 NR_f f_{31}^{(1)}(0) - \frac{1}{2} NR_f f_{31}^{(1)''}(0) \right) \\ &\quad + A \left( \mathcal{Q}_{31}^{(2)} + f_{31}^{sl(2)'}(0) - \frac{1}{2} k^2 NR_f f_{31}^{(2)}(0) - \frac{1}{2} NR_f f_{31}^{(2)''}(0) \right) \\ \hat{s}_{31}^{sl} &= -h_{11} \frac{dA}{dT} + A^2 A^* \left[ \mathcal{S}_{31}^{(1)} + \frac{3ik(1-\theta)^{1/2}}{2(1+M_s)} \left( k^2 f_{31}^{(1)}(0) + f_{31}^{(1)''}(0) \right) + \frac{M_s R_f^{-N}}{1+M_s} \left( R_f f_{31}^{sl(1)}(0) + f_{31}^{sl(1)'}(0) \right) \right] \\ &\quad + A \left[ \mathcal{S}_{31}^{(2)} + \frac{3ik(1-\theta)^{1/2}}{2(1+M_s)} \left( k^2 f_{31}^{(2)}(0) + f_{31}^{(2)''}(0) \right) + \frac{M_s R_f^{-N}}{1+M_s} \left( R_f f_{31}^{sl(2)}(0) + f_{31}^{sl(2)'}(0) \right) \right] \end{aligned}$$

表-1  $k$ - $F_r$  平面上の中立曲線上 ( $\Omega = 0$ ) の点 ( $k, F_c$ ) における,  $\alpha_0$  および Landau 定数  $\alpha_1$  ( $\theta = 0.1$ ,  $\sigma = 0.5$  ( $S = 0.003$ ),  $\mu = 0.3$ ,  $N = 4$ ,  $M_s = 1.5$ ).

$\mu$	$R_f$	$k$	$F_c$	$\omega$	$\text{Re}(\alpha_0)$	$\text{Im}(\alpha_0)$	$\text{Re}(\alpha_1)$	$\text{Im}(\alpha_1)$
0.3	10	0.30	0.746	1.36	0.796	3.40	748	2320
0.3	10	0.50	0.775	2.70	1.78	9.03	191	3790
0.3	10	0.60	0.771	3.44	2.37	12.4	373	4370
0.3	4.0	0.50	0.715	2.27	1.09	4.97	97.7	2270
0.3	4.0	0.60	0.721	2.93	1.48	7.19	59.3	2410
0.3	4.0	0.80	0.714	4.04	2.29	11.2	408	3270
0.6	10	0.30	0.731	1.29	0.661	2.95	432	2040
0.6	10	0.47	0.754	2.36	1.24	6.72	-49.7	2960
0.6	10	0.60	0.746	3.10	1.59	9.22	59.7	3040
0.6	4.0	0.40	0.668	1.55	0.619	2.52	87.3	1610
0.6	4.0	0.57	0.685	2.42	0.957	4.53	-166	1820
0.6	4.0	0.70	0.680	3.04	1.20	5.89	-91.6	1770

$\mathbf{R}_1$  は特異行列であることから, 式 (156) が解を持つ条件は,  $\mathbf{R}_1$  のいずれかの一行を右辺の列ベクトルで入れ替えた行列の行列式がゼロとなることであり, 次式で与えられる.

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & \hat{f}_{31}^s \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & \hat{m}_{31} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} & r_{37} & \hat{n}_{31} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} & r_{47} & \hat{f}_{31}^b \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} & r_{57} & \hat{q}_{31} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} & r_{67} & \hat{n}_{31}^{sl} \\ r_{71} & r_{72} & r_{73} & r_{74} & r_{75} & r_{76} & r_{77} & \hat{q}_{31}^{sl} \\ r_{81} & r_{82} & r_{83} & r_{84} & r_{85} & r_{86} & r_{87} & \hat{s}_{31}^{sl} \end{vmatrix} = 0 \quad (157)$$

上式より次式の Landau 方程式が導かれる.

$$\frac{dA}{dT} = \alpha_0 A + \alpha_1 |A|^2 A \quad (158)$$

## 6. 結果および考察

### (1) 非線形安定性に及ぼす浮遊砂の影響

表-1 に, 図-3 と同様に  $\sigma = 0.5$ ,  $\theta = 0.1$  ( $S = 0.003$ ,  $\tau_{b0}^* = 0.47$ ) とし,  $R_f = 10$  および  $R_f = 4$  とした場合における弱非線形解析の結果を示す. 表には角周波数  $\omega$  および式 (157) より求められた  $\text{Re}(\alpha_0)$ ,  $\text{Im}(\alpha_0)$ , 第一 Landau 定数  $\alpha_1$  の実部および虚部の値を示している.

表-1 を見ると  $\mu = 0.3$  の場合はいずれの  $R_f$  の値においても Landau 定数が正となり, 解の分岐形態は図-1 のような亜臨界分岐となることがわかる. 一方,  $\mu = 0.6$  の場合は  $(R_f, k, F_c) = (10, 0.47, 0.754)$  および  $(4, 0.57, 0.685)$ ,  $(4, 0.70, 0.680)$  の時に Landau 定数が負の値をとり超臨界分岐となる. 掃流砂のみを考慮した前報の結果 (表-1<sup>7)</sup>) でも  $\sigma = 0.5$  のとき,  $\mu = 0.3$  の場合には Landau 定数が正となり,  $\mu = 0.6$  の場合には特性波数 (最大の臨界フルード数となる波数) 付近で Landau 定数が負となっている.  $\mu$  の値が大きくなるにしたがって特性波数付近から超臨界分岐が現れはじめる傾向については, 浮遊砂の有無にあまり関係しないことがわかる. すなわち, 浮遊砂の影響を考慮すると臨界フルード数の値は低くなるが, 解の分岐形態に関しては掃流砂のみを考慮した場合とほぼ同様の結果が得られ, 局所勾配の影響が小さい領域において亜臨界分岐が生じることが判る.

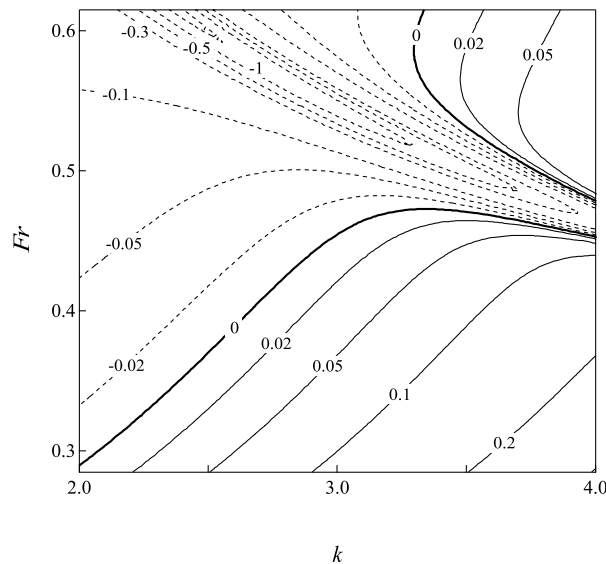


図-4 利根川・川俣地点に適用した線形安定解析の結果． $\sigma = 0.047$ ， $\theta = 0.04$ ， $\mu = 0.08$ ， $M_s = 16$ ， $R_f = 4.3$  ( $S = 1/3600$ ， $\tau_{b0}^* = 1.3$ ， $\mu^* = 0.1$ ， $U_f/\bar{v}_s = 3$ )．

表-2 利根川・川俣地点に適用した弱非線形安定解析の結果． $\sigma = 0.047$ ， $\theta = 0.04$ ， $\mu = 0.08$ ， $M_s = 16$ ， $R_f = 4.3$  ( $S = 1/3600$ ， $\tau_{b0}^* = 1.3$ ， $\mu^* = 0.1$ ， $U_f/\bar{v}_s = 3$ )．

$k$	$F_c$	$\text{Re}(\alpha_0)$	$\text{Re}(\alpha_1)$
3.0	0.455	0.307	3750
3.2	0.470	0.608	17200
3.8	0.461	4.31	720000

## (2) 理論結果の利根川への適用

著者らが前報<sup>7)</sup>で述べているように，デューン-平坦床遷移が生じる臨界フルード数について見ると，利根川・川俣地点において河床形状の遷移時に実際に観測された値は，掃流砂のみを考慮した非線形安定解析で予測される値よりもかなり小さな値を示す．前節では，浮遊砂の存在によって臨界フルード数は減少するものの，遷移自体は亜臨界分岐で特徴付けられることを見てきた．ここで浮遊砂を考慮した本理論によって，利根川・川俣地点で観測された臨界フルード数がどの程度再現できるのか，そして利根川・川俣地点で実際に観測された水位と粗度の間のヒステリシス現象が亜臨界分岐によって説明可能なのかどうかについて見てみよう．

利根川・川俣地点における勾配は  $1/3600$ ，河床材料の 60% 粒径は  $0.4 \text{ mm}$  とされており，このとき  $\sigma = 0.047$  となる．平坦床からデューンへの遷移が発生する実測されたフルード数  $Fr$  は  $0.41 \sim 0.43$  程度である．またこれに対応する平坦床等流状態での水深は  $3 \text{ m}$  程度であると推定され，Shields 数は  $1.3$  程度となる．したがって限界 Shields 数を  $0.05$ ，勾配の影響を表すパラメータ  $\mu^*$  を  $0.1$  とすると  $\theta = 0.04$  および  $\mu = 0.08$  となる．また粒径  $0.4 \text{ mm}$  の場合の沈降速度を  $3 \text{ cm/s}$  とすると<sup>24)</sup>  $R_f = 4.3$  となる．このとき線形安定解析から得られる instability diagram は図-4 のようになる．また弱非線形安定解析より Landau 定数等のパラメータは表-2 のように得られる．

表からわかるように掃流砂のみを考慮した場合と同様に亜臨界分岐が生じている．掃流砂のみを考慮した場合に求められた臨界フルード数が  $0.860$  であったのに比べると，浮遊砂の影響を考慮した理論によって求められる臨界フルード数は実際に観測された値とかなり近い値をとることがわかる．とはいえ，実際に観測された臨界フルード数は  $0.41 \sim 0.43$  であり，やはり理論値の方が若干大きくなっている．この原因としては次のようなことが考えられる．

まず第一に実測誤差が考えられる．制御された水路実験とは異なり，現地観測では精密な流速の測定が困難である．しかも観測は昭和 34 年に行われており測器も未発達なものであったと考えられる．し

たがって観測された流速，そしてそれから算出された流速係数やフルード数には相応の誤差が含まれていると考えるべきであろう。

次に理論の限界が挙げられるであろう。理論では解析を容易にするために渦動粘性係数や浮遊砂拡散係数を一定値とする簡便な乱流モデルを用いたり，等流流速分布を余弦関数で近似したりする各種の近似を用いている。実測データの制限もあるが，河床構成材料も近似的に一樣粒径と仮定している。また浮遊砂の巻き上げ量を単純な  $\tilde{u}_f/\tilde{v}_s$  のべき乗の形で近似的に表しているが，この式の精度はそれほど高いものではない。さらに実際の洪水流は非定常不等流であるが，理論では定常等流を仮定している（非定常性が無視できるようにフルード数が非常にゆっくりと変化する状況を考えている）。そのように考えると，実測値と理論値の間のこの程度の不一致は，でき得る限り現象を単純化して現象の理解を第一の目的とする理論解析の限界と言えるだろう。さらに精密な臨界フルード数の再現には，より精密な混合粒径の流砂量式や浮遊砂の巻き上げ量式を用いた数値解析が必要となる。今後の課題である。

## 7. 結論

本論文ではデューンの遷移過程に関し，浮遊砂の影響を考慮した線形安定解析および弱非線型安定解析を行った。前報の掃流砂のみを考慮した解析<sup>(6,7)</sup>に浮遊砂の移流方程式を導入するとともに，河床高の時間変化式に浮遊砂による項を加えて解析を行った結果，得られた成果は次の通りである。

- 線形安定解析の結果，浮遊砂が活発に生じるようになると，デューンから平坦床への遷移が生じる臨界フルード数の値は小さくなることが明らかとなった。
- 弱非線形安定解析の結果，浮遊砂が活発に生じ臨界フルード数が低下しても，局所勾配の影響が小さい領域において亜臨界分岐が生じることが明らかとなった。

## 参考文献

- 1) Fredsøe, J.: Unsteady flow in straight alluvial streams. Part 1. Modification of individual dunes, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.91, Part 3, pp. 497-512, 1981.
- 2) Fredsøe, J.: Unsteady flow in straight alluvial streams. Part 2. Transition from dunes to plane bed, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 102, pp. 431-453, 1981.
- 3) 中川博次・辻本哲郎：Lower regime における非定常移動床流れの抵抗の遅れ性状，第 25 回水理講演会論文集，pp.1-7，1981.
- 4) 中川博次・辻本哲郎：河床波を伴う非定常流れの特性，第 27 回水理講演会論文集，pp.665-671，1983.
- 5) 澤井健二：水理量の時間変化に伴う河床波の変形過程に関する研究，第 31 回水理講演会論文集，pp.647-652，1987.
- 6) 山口里実・泉典洋：河床波の遷移過程にみられるヒステリシス現象について，*水工学論文集*，Vol.46，pp.707-712，2002.
- 7) 山口里実・泉典洋：デューン-平坦床遷移過程にみられる亜臨界分岐現象，*土木学会論文集*，No.740/II-64，pp.75-94，2003.
- 8) 山口里実・泉典洋：デューンの遷移過程に関する実験，*水工学論文集*，Vol.47，pp.613-618，2003.
- 9) 石川忠晴：利根川・江戸川の河道粗度係数について，*土木研究所資料*，第 1943 号，46，1983.
- 10) Engelund, F.: Instability of erodible beds, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 42, pp. 225-244, 1970.
- 11) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, pp. 1-16, 1974.
- 12) Stuart, J. T.: On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 9, pp. 353-389, 1960.

- 13) Pekeris, C. and Shkoller, B.: Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude in the vicinity of the neutral curve, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 29, pp. 31-38, 1967.
- 14) Engelund, F.: A practical approach to self-preserving turbulent flows, *Acta Polytechnica Scandinavica*, pp. 3-28, 1964.
- 15) Carstens, M. R.: Accelerated motion of a spherical particle, *Trans. AGU*, Vol. 33, No. 5, pp. 713-721, 1952.
- 16) Ismail, H. M.: Turbulent transfer mechanism of suspended sediment in closed channels, *Trans. ASCE*, Vol. 117, 1952.
- 17) Singamsetti, S. R.: Diffusion of sediment in a submerged jet, *J. Hydraulics Div., Proc. ASCE*, Vol. 92, HY.2, 1966.
- 18) Ikeda, S., Izumi, N. and Itoh, R.: Effects of pile-dikes on flow retardation and sediment transport, *J. Hydraulic Eng., ASCE*, Vol.117, No. 11, pp. 1459-1478, 1991.
- 19) Garcia, M. and Parker, G.: Entrainment of bed sediment into suspension, *J. Hydraulic Eng., ASCE*, Vol. 117, No. 4, pp. 414-435, 1991.
- 20) 泉 典洋・田中 仁・坪井宏介・伊達政直：河川流が卓越する河口テラスの初期堆積形状に関する実験，土木学会論文集，No.740/II-64，pp.109-120，2003.
- 21) Guy, H. P., Simons, D. B. and Richardson, E. V.: Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956~61, Geological Survey Professional Paper, 462-I, U.S.Government Printing Office, Washington, 1966.
- 22) Engelund, F. and Fredsøe, J.: A sediment transport model for straight alluvial channels, *Nordic hydrol.*, Vol. 7, pp. 293-306, 1976.
- 23) 芦田和男・道上正規：浮遊砂に関する研究(1)-河床付近の濃度-, 京大防災研究所年報, 第 13 号 B, pp.233-242, 1970.
- 24) Dietrich, W. E.: Settling velocity of natural particles, *Water Resources Research*, Vol. 18, No. 6, pp. 1615-1626, 1982.