

実践流出解析ゼミ

講義テキスト編

貯留関数法の基本概念

降雨流出過程模式図

(連続式)

$$\frac{ds}{dt} = r(t) - q(t)$$

(貯留関数方程式)

$$s = f(q)$$

(a) $s = k_1 q + k_2 \frac{dq}{dt}$

(b) $s = k_1 q^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q^{p_2})$

(線形方程式)

(非線形方程式)

●本計算システムの特徴

- (1) 溝流域、複合流域の両者の計算が可能
- (2) 流域の特性に応じた計算手法を選択可能
 - a) 一般化貯留関数法(初期面積を用いた解析手法)
 - b) 1段タンク型貯留関数法(損失項を考慮した解析手法)
 - c) 2段タンク型貯留関数法(地下流出を含む解析手法)
- (3) GUIに基づく対話式で全ての操作が可能
 - a) 計算条件入力
 - b) 流域河道ネットワーク図の作成更新
 - c) 計算結果の可視化表示

```

cc subroutine gesto(x, u, ijk)
c   損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)
c   のパラメータ同定
c**
c*   s = k1*q**p1 + k2*d(q**p2)/dt
c********
c*   x(k+1) = phi*x(k) ; gamma*b(k)
c   一階ニュートン法(newton method)
c********
c*   ijk = 1; solve sensitivity equation
c*   ijk = 2; solve differential equation
dimension x(1), u(1), y(9), uu(18), b(9)
common/st2/n, m, m1, m2, n1, h, h2, h3, h4, area
common/st3/nr, nr, xna, wk1, wk2, wp1, wp2, zp2, wc3, rain, qoin
c
con=wk1*wk2*wp1*wp2
a=0.0
c=0.0
d=0.0
e=0.0
y1=x(1)
y2=x(2)
if(y1.gt.0.0) go to 12
go to 14
y1=0.0
a=y1*(wp1*wp2-1.)
c=y1*(wp2-1.)
d=y1*(wp1*wp2-1.)
e=y1*wp2
a1=con*(wp1*wp2-1.)*a*y2-wk2*wp2*c*wc3
a2=-con*d
a3=a1-a2**2
a4=a1+a3
elements of phi matrix (transition matrix)
f1 = 1. + 0.5*a1*h2+a1*a2*h3/6. + a1*a3*h4/24.
f2 = h*(1. + 0.5*a2*h+a3*h2/6. + a2*a4*h3/24.)
f3 = a1*f2
f4 = 1. + a2*h0.5*a3*h2+a2*a4*h3/6. +
& (a1*a3+a2**2*a4)*h4/24.
elements of gamma matrix
g2 = h2*(0.5+a2*h/6. + a3*h2/24.)
g4=f2
if(ijk.eq.2) go to 104
solve sensitivity equation
b(1)=-wk2*wp1*wp2*d*y2
b(2)=wk2**2*(wk1*wp1*wp2*d*y2 + e*wc3 - rain-qoin)
b(3)=wk2*e
do 16 i=1,m
uu(i)=f1*u(i) + f2*u(i+m) + g2*b(i)
do 18 i=m1,m2
uu(i)=f3*u(i-m) + f4*u(i) + g4*b(i-m)
do 20 i=1,m2
u(i)=uu(i)
104 return
continue
solve system equation
b1=con*(wp1*wp2-1.)*a*y2-wk2*wc3*(wp2-1.)*e+wk2*(rain+qoin)
y(1) = f1*x(1)+f2*x(2)+g2*b1
y(2) = f3*x(1)+f4*x(2)+g4*b1
do 102 i=1,n
x(i)=y(i)
102 return
end

```

平成18年7月

はじめに

この本は、建設コンサルタント業界で禄を得ている技術者を始めとして、平均年齢が30歳前後の技術者集団を塾生として、月2回、足かけ1年8ヶ月に及ぶ「流出解析ゼミ」の内容を取りまとめたものである。塾長にとっては、塾生との年齢差が親子ほど離れている新人類が相手である。1回の講義が、コンピュータを使った宿題の答え合わせを含めて約3時間であったから、延べ時間数は120時間を勇に超えたことになる。残念ながら途中drop outした者も数名いたが、ほとんどの技術者が完走できることは見上げたものである。今の若者は忍耐が足りないと陰口をたたかれる向きもあるが、時間をかけ、意を用いて説明すれば、若い技術者とて物事の本質を理解するポテンシャルを充分に持っていることを再認識した。もちろん、完走した塾生の協力がなければ、この本が世に出なかつたのも確かである。

今回の「流出解析ゼミ」は必ずしも順風満帆に進行した訳ではない。行く手には大きな壁が立ちはだかっていた。ゼミを始めるにあたって、まず参加した塾生達の意見を聞いたところ、以下に述べる課題が浮き彫りにされた。

- (1) 学生時代に数学の講義を受けてはいるものの、それが実際問題にどのように使われているかの本質が見えなかつたために、講義もチンパン・カンパンでさっぱり分からず、数学への興味も湧かず、大学を卒業あるいは大学院を修了してしまったというのが実状である。早い話が、「流出解析ゼミ」を進めるにあたって、与えられた宿題について数学的知識をもって正確に解く程のレベルに達していない。
- (2) 学生時代あるいは実社会に出てからも、コンピュータを使った流出解析手法、たとえば、単位図法、貯留関数法やkinematic wave法などの実体験がほとんどない。

以上の最悪条件を打破するためには、塾生達をもう一度学生時代に連れ戻して、水文システムの同定に必要な最低限の数学的知識をたたき込み、塾生自ら Fortran プログラムを作成して、毎回のゼミにおいて課した宿題を解かせることとした。さらに講義が一方通行に終わることを避けるために、毎回のゼミを取りまとめる責任者を指名した。ゼミの内容が理解できないために、書き上げられた一次原稿は誤りも多く、ほとんど役に立たなかつた。何度も赤字修正が繰り返され、この本の最終原稿ができあがつたものと理解願いたい。この責任制は塾生が質の高い論文や報告書を書くための訓練に役立つた。

最適化問題の多くは計算機を使わなければ解くことはできない。塾生達のプログラム作成能力もさまざままで、中には Fortran や Basic といった計算機言語を使ったことのない者もいた。第1・2回のゼミにおける宿題でさえ、塾生達の解答が一致するまでに多くの時間を要した。塾生自身が作成したプログラム・ミスの発見を容易にするために、塾生間で解答を cross check させることとした。その効果として、ゼミ回数が多くなるにつれてミスの数も少なくなり、プログラム作成に細心の注意を払う習慣が身についたようである。長時間にわたるゼミを通して、塾生達は最終的には、仕事をする限り、いっさい手抜きをせず、仕事とはかくあるべきであることを学んだものと確信する。

塾生に与えた宿題と解答の一部は、各章の最後に示されている。また、別冊には塾生が宿題を解くために作成した Fortran プログラムの代表例をテキスト・ファイルにて掲載した。

一般に、流出解析に関する教科書あるいは成書であれば、降雨流出過程に含まれるテーマができるだけ広範囲にわたって解説するのが常套手段であろう。現在でも流出解析に関する新しい研究や論文が数多く発表されているが、なかにはモデル式が複雑なため、すぐには実用に供することが困難な研

究成果も見受けられる。また当然のことながら、筆者のような非才には、一冊の本で最近の研究動向を踏まえた流出解析手法をすべて述べることは不可能な話である。

その意味では、この本の内容は一般に流布している流出解析に関する成書とは趣を異にしていることに気づかることと思う。本書は洪水流出解析・予測における「貯留関数法の同定問題」にだけ焦点を絞って、包括的かつ詳細に述べたものである。より具体的に言えば、技術者が実際問題に直面したとき、貯留関数モデルを基本高水算定や実時間洪水予測にどのように適用していくかの次元に視点をおろして、問題解決を図ることを意図として編集されたものである。

我が国においては、洪水流出解析と言えば、現在でも基本高水の算定を含めて、「木村の貯留関数法」を採用している一級河川が圧倒的に多い。しかしながら、この方法ではモデル定数の同定が必ずしも客観的に行われているとは言えない面もある。また、洪水河道追跡に貯留関数法を適用するに際にも、パラメータが河川毎に、種々の経験式によって推定されている事例がいまだに多い。「木村の貯留関数法」だけが洪水流出解析の万能薬ではなく、水理学に基づいて開発されてきいろいろな貯留関数法があることを知つてもらえば、本書を発刊した目的の1つが達成されることになる。

本書の内容は、各章が独立しかつ完結した「モジュール形式」を採っており、必ずしも第1回ゼミから順に進む必要がないように工夫されている。たとえば、最初の2回ゼミにおいては、流出モデル定数の最適化過程で必要となる最低限の数学的知識の習得を目指したものである。すなわち、「第1回ゼミ」では線形連立方程式の解法に、逆行列の代わりに三角化法を用いる方法を紹介している。なお、三角化法は他にも平方根法、コレスキー分解、成分回帰分析法及びU-D分解と呼ばれることが多く、最適化にあたって解の発散を防ぐ有効な手段である。また、種々の数学的最適化手法があるが、その中で最も理解が容易で実用的にも有効な方法は、ニュートン法に代表される一次導関数法を用いた最適化手法である。そこで、「第2回ゼミ」においては、非線形方程式をニュートン法やベイリー法などの基礎的数値解析法を用いた解法を紹介している。

折しも、「2007年問題」がすぐ目前に迫ってきている。いわゆる我が国の高度経済成長時代を支え、バブルの崩壊にも耐え忍んできた700万近くの団塊世代がリタイアする時期を向えて、彼らがこれまで培ってきた技術や技能を次世代にどう伝承あるいは継承していくかの問題である。筆者自身、すでに還暦を過ぎて、物忘れが一段と激しさを増してきている昨今、洪水流出解析に関してこれまでに蓄積してきた知識やknow-howを若い技術者に伝えるのも無駄ではなかろうと考えてきた。彼らがそれを踏み台として、将来新しい技術を生み出してくれることを期待しているというのが偽らざる気持ちである。

2006年、(財)北海道河川防災研究センターは創立20周年を迎えたことになる。本書がこの記念すべき年に、なんとか発刊されるまでに漕ぎ着けたことを非常に喜んでいる。この本ができるまでには、江利川喜一前会長、平野道夫理事長を始めとして、当センターの多くの人達から励ましと協力をいただいた。ここに厚くお礼申しあげたい。とくに、宮武真由子さんには本書の完成原稿を仕上げるまでに多くの時間と努力を割いてもらった。彼女に感謝の意を表したい。

最後に、「流出解析ゼミ」を始める契機となったと同様な理由により、この本が学生諸君や若い研究者・技術者が流出解析や洪水予測に少しでも興味を示し、彼らが将来直面すると考えられる課題解決の糸口を見出す参考資料になってくれれば望外の喜びである。

平成18年5月

(財)北海道河川防災研究センター

研究所長 星 清

実践流出解析ゼミ [講義テキスト編]

目 次

はじめに

| | |
|-------------------------------------|------|
| 第1回 三角化法による連立方程式の解法 | 1-1 |
| 1. 一般的な連立方程式の解法と問題点 | 1-1 |
| 2. 三角化法 (LU 分解、クラウト法) | 1-2 |
| 3. 三角化法 (コレスキーフ分解) | 1-4 |
| 第2回 非線形方程式の数値解析法 | 2-1 |
| 1. ニュートン法 (Newton-Raphson 法) | 2-1 |
| 2. ベイリー法 (Bailey 法) | 2-1 |
| 3. 非線形連立方程式のニュートン法を用いた解法 (一次微係数の利用) | 2-3 |
| 4. 非線形連立方程式のベイリー法を用いた解法 (二次微係数の利用) | 2-4 |
| 5. 水理学における適用例 (不等流の数値計算法) | 2-7 |
| 第3回 洪水資料の整理 | 3-1 |
| 1. 洪水資料の収集と整理 | 3-1 |
| 2. 水位～流量($H \sim Q$)曲線の作成 | 3-1 |
| 3. 水位～流量($H \sim Q$)曲線作成の実際例 | 3-3 |
| 第4回 貯留関数法による流出計算とその数値解法 | 4-1 |
| 1. 微分方程式の数値解法 | 4-1 |
| 2. 一価の線形貯留方程式の数値解法 | 4-4 |
| 3. 二価の線形貯留方程式の数値解法 | 4-6 |
| 4. 一価の非線形貯留方程式の数値解法 | 4-11 |
| 5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法 | 4-13 |
| 第5回 数学的最適化手法の基礎理論 | 5-1 |
| 1. 数学的最適化手法 | 5-1 |
| 2. 目的関数 | 5-1 |
| 3. 一階ニュートン法 | 5-2 |
| 4. 成分回帰分析法 | 5-4 |
| 5. 二階ニュートン法 | 5-7 |
| 6. ダビドン(Davidon)法 | 5-9 |
| 7. モデル定数の規準化 | 5-10 |
| 8. 感度係数の算定 | 5-11 |
| 9. モデル定数最適化の目的関数と精度評価指標 | 5-18 |

| | | |
|--|-------|-------|
| 第6回 一価線形・非線形貯留関数法の最適化 | ----- | 6-1 |
| 1. 一階ニュートン法を用いた最適化計算(一次微係数利用) | ----- | 6-1 |
| 2. 二階ニュートン法を用いた最適化計算 (修正ベイリー法; 一次・二次微係数利用) | ----- | 6-2 |
| 3. ダビドン法を用いた最適化計算 | ----- | 6-4 |
| 4. 一価の線形貯留関数法 | ----- | 6-5 |
| 5. 一価の非線形貯留方程式の最適化計算 | ----- | 6-9 |
| 第7回 二価の線形・非線形貯留関数法の最適化 | ----- | 7-1 |
| 1. 一階ニュートン法を用いた最適化計算(一次微係数利用) | ----- | 7-1 |
| 2. 二階ニュートン法を用いた最適化計算 (修正ベイリー法; 一次・二次微係数利用) | ----- | 7-3 |
| 3. ダビドン法を用いた最適化計算 | ----- | 7-5 |
| 4. 二価の線形貯留関数法の最適化計算 | ----- | 7-7 |
| 5. 二価の非線形貯留関数法の最適化計算 | ----- | 7-15 |
| 第8回 流域における Kinematic wave 法と一般化貯留関数法の関係 | ----- | 8-1 |
| 1. はじめに | ----- | 8-1 |
| 2. Kinematic wave モデル | ----- | 8-2 |
| 3. 一般化貯留関数法 | ----- | 8-7 |
| 4. 一般化貯留関数法のモデル定数最適化 | ----- | 8-8 |
| 5. 実領域での一般化貯留関数法 | ----- | 8-10 |
| 第9回 損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル) | ----- | 9-1 |
| 1. 損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル) | ----- | 9-1 |
| 2. 非線形方程式の数値解法 | ----- | 9-2 |
| 3. 目的関数 | ----- | 9-3 |
| 4. 感度係数の算定 | ----- | 9-4 |
| 第10回 フィルター分離法を活用した2段タンク型貯留関数モデル | ----- | 10-1 |
| 1. フィルター成分分離法による地下水流出成分の算定 | ----- | 10-3 |
| 2. 表面・中間流出成分の解析 | ----- | 10-4 |
| 3. 地下水流出成分の解析 | ----- | 10-9 |
| 4. 地下水流出成分計算における浸透供給量の取り扱い | ----- | 10-11 |
| 第11回 全流出量の感度係数を用いた | | |
| 2段タンク型貯留関数モデルの最適化 | ----- | 11-1 |
| 1. 地下水流出成分を含む非線形貯留関数法 | ----- | 11-1 |
| 2. 地下水流出成分を含む線形貯留関数法 | ----- | 11-12 |

| | | |
|--|-------|-------|
| 第 12 回 1 段・2 段タンク型非線形貯留関数モデルの総合化 | ----- | 12-1 |
| 1. 損失項を含む貯留関数法(1 段タンク型貯留関数モデル)の概要 | ----- | 12-1 |
| 2. フィルタ一分離法を活用した 2 段タンク型非線形貯留関数モデルの概要 | --- | 12-2 |
| 3. 1 段・2 段タンク型非線形貯留関数モデルによる適用例 | ----- | 12-2 |
| 4. 北海道 4 地域におけるモデル定数の総合化 | ----- | 12-6 |
| 5. 中小河川におけるハイドログラフ推定 | ----- | 12-8 |
| 第 13 回 河道における Kinematic wave 法と貯留関数法の関係 | ----- | 13-1 |
| 1. 河道流出系の Kinematic wave 法 | ----- | 13-1 |
| 2. 無次元領域における Kinematic wave 法 | ----- | 13-4 |
| 3. 実領域における貯留関数法 | ----- | 13-10 |
| 4. 河道における貯留関数法の単位変換 | ----- | 13-11 |
| 第 14 回 複合流域における貯留関数法の最適化 | ----- | 14-1 |
| 1. 複合流域モデルにおける最適化手法の概要 | ----- | 14-1 |
| 2. 流域・河道網図の作成例 | ----- | 14-2 |
| 3. 分割流域モデル | ----- | 14-4 |
| 4. 河道追跡モデル | ----- | 14-7 |
| 5. 実流域における流域・河道ネットワーク作成例 | ----- | 14-11 |
| 第 15 回 目的関数の差異による洪水流量推定精度に及ぼす影響 | ----- | 15-1 |
| 1. はじめに | ----- | 15-1 |
| 2. 目的関数 | ----- | 15-1 |
| 3. ハイドログラフ形状特性の精度評価指標 | ----- | 15-2 |
| 4. 単一流域と複合流域 | ----- | 15-2 |
| 5. 解析対象流域 | ----- | 15-3 |
| 6. 河道追跡モデルの概要 | ----- | 15-5 |
| 7. 洪水流出モデルの概要 | ----- | 15-6 |
| 8. まとめ | ----- | 15-17 |
| 第 16 回 短時間予測雨量の誤差分散算定法 | ----- | 16-1 |
| 1. はじめに | ----- | 16-1 |
| 2. 予測雨量の推定誤差 | ----- | 16-1 |
| 3. 北海道における予測降雨の推定誤差 | ----- | 16-3 |
| 4. まとめ | ----- | 16-18 |

| | |
|------------------------------------|-------------|
| 第 17 回 単一流域におけるカルマン・フィルター理論 | |
| を用いた実時間流出予測 | ----- 17-1 |
| 1. はじめに | ----- 17-1 |
| 2. カルマン・フィルター理論 | ----- 17-1 |
| 3. 貯留関数法へのカルマン・フィルター予測理論の適用 | ----- 17-11 |
| 第 18 回 複合流域におけるカルマン・フィルター理論 | |
| を用いた実時間流出予測 | ----- 18-1 |
| 1. はじめに | ----- 18-1 |
| 2. 複合流域の流出モデルについて | ----- 18-1 |
| 3. 貯留関数法へのカルマン・フィルター予測理論の適用 | ----- 18-3 |
| 4. 流域・河道系における洪水予測式の自動定式化 | ----- 18-9 |

塾長・塾生プロファイル

塾生ゼミ参加感想文

別 冊

実践流出解析ゼミ [Q & A 編]

実践流出解析ゼミ [プログラム編]

第1回 流出解析ゼミ

— 三角化法による連立方程式の解法 —

これから数回にわたり行われる流出解析ゼミでは、貯留関数法を始めとした洪水流出モデルに含まれる定数の最適同定問題をテーマとする。モデル定数の最適化手法として、ニュートン法 (Newton-Raphson 法とも言われる) に代表される一次導関数や二次導関数を用いた方法が最も簡単な手法と言われており、しかも収束効率が良いと評価されている。ニュートン法を用いた最適化手法は、連立方程式の解が収束するまで繰り返し計算を行う。したがって、効率のよい連立方程式の解法が望まれる。

1. 一般的な連立方程式の解法と問題点

一般的な 2 元連立方程式は次式で定義され、その解も容易に求められる。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

これを行列表示すると、次式になる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

この連立方程式の解 x_1, x_2 は加減法により、次式で求められる。

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (1.3)$$

一方、 n 元連立方程式は次式で定義される。

$$AX = B \quad (1.4)$$

あるいは、

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

A は $[n \times n]$ 行列、 X は $[n \times 1]$ 行列、 B は $[n \times 1]$ 行列で定義される。

式(1.4)を解くためには、両辺の右側から、 A の逆行列 A^{-1} ($A^{-1}A = I$ となる行列) を乗ずると、式(1.6)でベクトル X が計算される。

$$A^{-1}AX = X = A^{-1}B \quad (1.6)$$

すなわち、数学的には A^{-1} が求められると、その解は式(1.6)で求められることになる。しかしながら、現実問題として行列 A の次数 n が大きくなると逆行列である A^{-1} の算出途中で、丸め誤差(round error)が蓄積して、 A^{-1} の計算精度が劣化する可能性がある。このため、式(1.6)の連立方程式を解く過程で、直接 A^{-1} を算出することは得策とは言えない。

以下に、三角化法によって連立方程式を解く方法を紹介する。

2. 三角化法 (LU 分解、クラウト法)

特異でない行列 A を、次式に示す下三角行列 L と単位上三角行列 U の積で表す。

$$A = LU \quad (1.7)$$

ここで、 L は下三角行列、 U は単位上三角である。

式(1.7)を要素展開すると、式(1.8)で表現される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.8)$$

式(1.8)より行列 L と行列 U を求めると式(1.9)が得られる。

$$\begin{aligned} ① \quad l_{11} &= a_{11} & ② \quad u_{12} &= \frac{a_{12}}{l_{11}} & ③ \quad u_{13} &= \frac{a_{13}}{l_{11}} \\ ④ \quad l_{21} &= a_{21} & ⑤ \quad l_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} & ⑥ \quad u_{23} &= \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} \\ ⑦ \quad l_{31} &= a_{31} & ⑧ \quad l_{32} &= a_{32} - l_{31}u_{12} & ⑨ \quad l_{33} &= a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \end{aligned} \quad (1.9)$$

ここで、行列 L と行列 U の各要素を求める順番は、式(1.9)に表されるように行列 L の要素(1,1)を求め、次に行列 U の要素(1,2)、要素(1,3)を求める。行の最後まで行くと改行し、行列 L の要素(2,1)、要素(2,2)、行列 U の要素(2,3)を求める。同様に行列 L の要素(3,1)、要素(3,2)、要素(3,3)の順番に求めていけばよいことがわかる。式(1.10)中に示される○の番号は式(1.9)の計算順序に対応している。

$$L = \begin{bmatrix} ① & 0 & 0 \\ ④ & ⑤ & 0 \\ ⑦ & ⑧ & ⑨ \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & ② & ③ \\ 0 & 1 & ⑥ \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

式(1.9)より求めた行列 L と行列 U の各要素を式(1.11)に示す。

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} - l_{21}u_{12} & 0 \\ a_{31} & a_{32} - l_{31}u_{12} & a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{l_{11}} & \frac{a_{13}}{l_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

式(1.11)を一般化すると、式(1.12)になる。

$$\begin{aligned} u_{ii} &= 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ l_{ii} &= a_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ u_{1j} &= \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, n) \\ l_{ik} &= a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk} \quad (i = k, \dots, n) \quad (i > k) \\ u_{kj} &= \left(a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj} \right) / l_{kk} \quad (j = k+1, \dots, n) \quad (k > j) \end{aligned} \quad (1.12)$$

下三角行列 L および単位上三角行列 U が決まれば、行列 A の逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = [LU]^{-1} = U^{-1}L^{-1} \quad (1.13)$$

で求められる。下三角行列 L の逆行列 L^{-1} は次の式より求める。

$$LL^{-1} = LM = I \quad (1.14)$$

ただし、

$$M = L^{-1} \quad (1.15)$$

下三角行列 L の逆行列 M も下三角行列になることに留意して、逆行列 M を求める一般式が定式化される。まず、対角要素は次式で計算される。

$$m_{ii} = \frac{1}{l_{ii}} \quad (1.16)$$

対角要素より下側の要素に対して、

$$m_{ij} = -\frac{1}{l_{ii}} \sum_{r=j}^{i-1} l_{ir}m_{rj} \quad (i > j) \quad (1.17)$$

対角要素より上側の要素に対しては式(1.18)より式(1.19)が求まる。

$$m_{ij} = 0 \quad (i < j) \quad (1.18)$$

$$M = L^{-1} \quad (1.19)$$

同様に、単位上三角行列 U の逆行列 U^{-1} を求める。上三角行列 U の逆行列 $N(U^{-1})$ も上三角行列になることから、行列 N の対角要素は式(1.20)により容易に求められる。

$$n_{ii} = 1 \quad (1.20)$$

対角要素より上側の要素に対しては式(1.21)、対角要素より下側の要素は式(1.22)より求めることができる。

$$n_{ij} = -\sum_{r=i}^{j-1} n_{ir} u_{rj} \quad (i < j) \quad (1.21)$$

$$n_{ij} = 0 \quad (i > j) \quad (1.22)$$

逆行列 $M(L^{-1})$ と逆行列 $N(U^{-1})$ が求められると、 A^{-1} は式(1.13)で計算されることになる。

次節では行列 A が対称行列の場合の LU 分解（コレスキーフィル）を紹介する。この LU 分解はクラウト法に比べ計算回数が少ないという特徴がある。

文責 伊賀 久晃

3. 三角化法（コレスキーフィル）

行列 A が対称であれば、その逆行列の計算の過程は簡略になる。すなわち、行列 A を次のような形で表わせるからである。

$$A = \Lambda \Lambda^T \quad (1.23)$$

ただし Λ は下三角行列、 Λ^T は Λ の転置行列である上三角行列である。ここで、 Λ は次式で表される。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \lambda_{n3} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Λ の要素は次式で求められる。

$$\begin{aligned} \lambda_{ii} &= \left(a_{ii} - \sum_{r=1}^{i-1} \lambda_{ri}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{r=1}^{j-1} \lambda_{ri} \lambda_{rj}}{\lambda_{ii}} \quad (i > j) \\ \lambda_{ij} &= 0 \quad (i < j) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Λ の逆行列 Λ^{-1} 要素 μ_{ij} は、 $\Lambda \Lambda^{-1} = I$ (単位行列) なる関係から、次式により求められる。

$$\begin{aligned}\mu_{ii} &= \frac{1}{\lambda_{ii}} \\ \mu_{ij} &= -\frac{\sum_{r=j}^{i-1} \lambda_{ir} \mu_{rj}}{\lambda_{ii}} \quad (i > j) \\ \mu_{ij} &= 0 \quad (i < j)\end{aligned}\tag{1.26}$$

Λ^T (上三角行列) の逆行列は上式で求められた Λ^{-1} の転置行列で得る事が出来る。すなわち、次式が成立する。

$$(\Lambda^T)^{-1} = (\Lambda^{-1})^T\tag{1.27}$$

したがって、対称行列 A の逆行列は次式で与えられる。

$$A^{-1} = (\Lambda \Lambda^T)^{-1} = (\Lambda^{-1})^T \Lambda^{-1}\tag{1.28}$$

例題として、次の3次元対称行列を例に解いてみる。

$$\begin{aligned}A &= \Lambda \Lambda^T \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}, \quad \Lambda^T = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ \Lambda \Lambda^T &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 & \lambda_{11}\lambda_{21} & \lambda_{11}\lambda_{31} \\ \lambda_{21}\lambda_{11} & \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 & \lambda_{21}\lambda_{31} + \lambda_{22}\lambda_{32} \\ \lambda_{31}\lambda_{11} & \lambda_{31}\lambda_{21} + \lambda_{32}\lambda_{22} & \lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 + \lambda_{33}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\Lambda \Lambda^T$ の要素として A の要素をそれぞれ、等値とすると次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= \sqrt{a_{11}}, \\ \lambda_{21} &= \frac{a_{21}}{\lambda_{11}}, \quad \lambda_{22} = \sqrt{a_{22} - \lambda_{21}^2} \\ \lambda_{31} &= \frac{a_{31}}{\lambda_{11}}, \quad \lambda_{32} = \frac{a_{32} - \lambda_{21}\lambda_{31}}{\lambda_{22}}, \quad \lambda_{33} = \sqrt{(a_{33} - \lambda_{31}^2 - \lambda_{32}^2)}\end{aligned}$$

文責 仙庭 真司
伊賀 久晃

前述のコレスキーディスク解法は行列 A が対称行列であっても固有値が正定値でないと実数演算できない。言い換えると式(1.25)の第1式の右辺に平方根が含まれるために適用できる行列が限られる。そこで、対称行列 $A = LDL^T$ となるような行列 L と行列 D を考える。 L は単位下三角行列、 D は対角行列、 L^T

は単位下三角行列 L の転置行列である単位上三角行列。単位上(下)三角行列とは対角要素が 1 である行列のことである。

コレスキーフィー分解では $A = \Lambda \Lambda^T$ の関係式から下三角行列 Λ を算定するが、その過程で平方根の解法を含むという制約を受ける。一方、修正コレスキーフィー分解では $A = LDL^T$ の単位下三角行列 L と対角行列 D を算出し、 $A = LDL^T = (LD^{1/2})(D^{1/2}L^T) = \Lambda \Lambda^T$ の関係式から下三角行列 Λ に変換できる。

ここで、行列 A, L, D, B を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} A &: [n \times n] \\ L &: [n \times n] \quad \text{単位下三角行列} \\ D &: [n \times n] \quad \text{対角行列} \\ B &: [n \times 1] \end{aligned}$$

n 元連立方程式の解法は以下の手順で行われる。

$$A = LDL^T \quad (1.29)$$

A を式(1.29)によって修正コレスキーフィー分解し、それを式(1.4)に代入すると、

$$LDL^T X = B \quad (1.30)$$

$L^T X = Y$ と置き換え、それを式(1.30)に代入すると、

$$LDY = B \quad (1.31)$$

また、 $DY = Y'$ と置き換え、それを式(1.31)に代入すると式(1.32)が得られる。

$$LY' = B \quad (1.32)$$

Y' は式(1.33)で求められる。

$$Y' = L^{-1}B \quad (1.33)$$

次に、 Y は式(1.34)で求められる。

$$Y = D^{-1}Y' \quad (1.34)$$

最後に X は式(1.35)で計算される。

$$X = (L^T)^{-1}Y \quad (1.35)$$

$[3 \times 3]$ の対称行列 A は、行列 L, D 及び L^T を用いて、以下のように分解される。

$$A = LDL^T$$

上式を要素表示すると、以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ d_1 l_{21} & d_2 & 0 \\ d_1 l_{31} & d_2 l_{32} & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ 0 & 1 & l_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_1 l_{21} & d_1 l_{31} \\ d_1 l_{21} & d_1 l_{21}^2 + d_2 & d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{32} \\ d_1 l_{31} & d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{32} & d_1 l_{31}^2 + d_2 l_{32}^2 + d_3 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

以上より、 LDL^T を要素展開して、行列 A の要素との関係を求めるとなれば次のようになる。

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} - d_1 l_{21}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} - d_1 l_{31}^2 - d_2 l_{32}^2 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{d_1} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{d_1} & \frac{a_{32} - d_1 l_{21} l_{31}}{d_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

n 元の対称行列 A を修正コレスキーディクレーヴィー分解するときの単位下三角行列 L と対角行列 D の要素は次の一般式で得られる。

$$d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} d_k l_{ik}^2$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k l_{jk} l_{ik}}{d_j} \quad (i > j) \quad (1.41)$$

文責 仙庭 真司
伊賀 久晃

参考文献

- 1) Bierman, G.J. : Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, New York, pp.13-161, 1977.
- 2) 林 正・浜田正則：新体系土木工学 1, 数値計算法(土木学会編), 技報堂出版株式会社, 255p., 1983.
- 3) 星 清：成分回帰分析手法, 北海道開発局土木試験所月報, No. 397, pp. 20-26, 1986.

第2回 流出解析ゼミ

— 非線形方程式の数値解析法 —

ニュートン法は、非線形方程式曲線 $f(x) = 0$ の解を求める場合や流出モデルの定数最適値探索に用いられる。とくに、微係数が解析的に得られる場合、ニュートン法は威力を発揮する。

まず、 $f(x) = 0$ を満たす x を数値解法(反復計算法)で求める。三次方程式までは、カルダノ法を用い理論的に求められるが、高次方程式の場合、テイラー展開を用いて次式が 0 となるように近似値 $x_{k+1} = x_k + dx_k$ にて補正していく。

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)(x - dx) + \frac{f''(x)}{2!}(x - dx)^2 + \dots \quad (2.1)$$

1. ニュートン法 (Newton-Raphson 法)

$f(x_k) = 0$ を満たす k 番目の近似値を x_k とし、 $x_{k+1} = x_k + dx_k$ (dx_k : 修正値又は補正值) で $f(x_{k+1}) = 0$ となるものを仮定する。式(2.1)において 2 次以上の項を無視すると、

$$f(x_k + dx_k) = f(x_k) + f'(x_k)dx_k = 0 \quad (2.2)$$

ここで、 $f'(x_k) = f_x(x_k) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_k}$ は一次微係数である。式(2.2)は dx_k の 1 次式であるため、 dx_k は、

$$dx_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.3)$$

として求められ、 $k+1$ 番目の x_{k+1} は式(2.3)を用いて、式(2.4)により求められる。

$$x_{k+1} = x_k + dx_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.4)$$

2. ベイリー法 (Bailey 法)

1 次のテイラー展開と同様に、3 次以上の項を無視し、式(2.1)を 2 次の項までテイラー展開すると、

$$f(x_k + dx_k) = f(x_k) + f'(x_k)dx_k + \frac{1}{2}f''(x_k)(dx_k)^2 = 0 \quad (2.5)$$

ここで、 $f''(x_k) = f_{xx}(x_k) = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=x_k}$ は二次微係数である。

式(2.5)は次式で置き換えることができる。

$$dx_k \left\{ f'(x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k) dx_k \right\} = -f(x_k) \quad (2.6)$$

式(2.6)における $\{\}$ 内の dx_k にニュートン法より求めた $dx_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ を代入すると、式(2.7)が得られる。

$$dx_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2f'(x_k)}} \quad (2.7)$$

したがって、 $k+1$ 番目の x_{k+1} は $x_{k+1} = x_k + dx_k$ として求められる。このような方法をベイリー法(Bailey法)という。

ベイリー法では式(2.7)の右辺の分母に $f'(x_k)$ が含まれるため、 $f'(x_k) = 0$ または $f'(x_k) \approx 0$ の場合には式(2.7)より dx_k を求めることができなくなる。そこで、式(2.5)は dx_k の2次方程式であることに注目し、 dx_k について解くと式(2.8)が得られる。

$$dx_k = \frac{-f'(x_k) \pm \sqrt{f'(x_k)^2 - 2f''(x_k)f(x_k)}}{f''(x_k)} \quad (2.8)$$

であるため、 dx_k は dx_k^+ と dx_k^- の二つが求められる。そこで、

$$|f(x_k + dx_k^-)| > |f(x_k + dx_k^+)| のとき、x_k + dx_k^+ を使い、または、$$

$$|f(x_k + dx_k^+)| > |f(x_k + dx_k^-)| のとき、x_k + dx_k^- を使う。$$

したがって、 $k+1$ 番目の x_{k+1} は、

$$x_{k+1} = x_k + dx_k^+ = x_k + \frac{-f'(x_k) + \sqrt{f'(x_k)^2 - 2f''(x_k)f(x_k)}}{f''(x_k)}$$

または、

$$x_{k+1} = x_k + dx_k^- = x_k + \frac{-f'(x_k) - \sqrt{f'(x_k)^2 - 2f''(x_k)f(x_k)}}{f''(x_k)}$$

として求められる。

なお、収束計算における初期値の設定に関しては、 $f'(x_k)$ と $f''(x_k)$ とが同符号、すなわち、 $f'(x_k) \cdot f''(x_k) > 0$ になるように、 x_k を選択すると収束が安定する。

3. 非線形連立方程式のニュートン法を用いた解法（一次微係数の利用）

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

を満たす x と y の値をニュートン法で求める。

$f(x_k, y_k) = 0$ を満たす k 番目の近似値を x_k 、 y_k とし、 $x_k + dx_k$ 、 $y_k + dy_k$ (dx_k 及び dy_k : 修正値あるいは補正值)において、次式が成立するものと仮定する。

$$\begin{cases} f(x_k + dx_k, y_k + dy_k) = 0 \\ g(x_k + dx_k, y_k + dy_k) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

式(2.10)を1次テイラー展開すると

$$\begin{aligned} f(x_k + dx_k, y_k + dy_k) &= f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)dx_k + f_y(x_k, y_k)dy_k = 0 \\ g(x_k + dx_k, y_k + dy_k) &= g(x_k, y_k) + g_x(x_k, y_k)dx_k + g_y(x_k, y_k)dy_k = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここで、ヤコビアン行列

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

を用い、式(2.11)を行列表示すると、

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_k \\ dy_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

となる。したがって、

$$\begin{bmatrix} dx_k \\ dy_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

により dx_k と dy_k が求められる。 $x_{k+1} = x_k + dx_k$ 、 $y_{k+1} = y_k + dy_k$ の新しい近似値を用いて繰り返し計算を行う。

文責 伊賀 久晃

4. 非線形連立方程式のベイリー法(Bailey 法)を用いた解法(二次微係数の利用)

非線形連立方程式を次式で定義する。

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

式(2.15)を2次の項までテーラー級数展開すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} f(x_k + dx_k, y_k + dy_k) &= f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)dx_k + f_y(x_k, y_k)dy_k \\ &\quad + \frac{1}{2} [f_{xx}(x_k, y_k)(dx_k)^2 + 2f_{xy}(x_k, y_k)(dx_k)(dy_k) + f_{yy}(x_k, y_k)(dy_k)^2] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} g(x_k + dx_k, y_k + dy_k) &= g(x_k, y_k) + g_x(x_k, y_k)dx_k + g_y(x_k, y_k)dy_k \\ &\quad + \frac{1}{2} [g_{xx}(x_k, y_k)(dx_k)^2 + 2g_{xy}(x_k, y_k)(dx_k)(dy_k) + g_{yy}(x_k, y_k)(dy_k)^2] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

ここで、式(2.16)と式(2.17)に含まれる一次微係数と二次微係数は次式で定義される。

一次微係数行列(ヤコビアン行列, Jacobian Matrix)

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \\ \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dy} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

二次微係数行列(ヘイシアン行列, Hessian Matrix)

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 f}{dx^2} & \frac{d^2 f}{dxdy} \\ \frac{d^2 f}{dxdy} & \frac{d^2 f}{dy^2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 g}{dx^2} & \frac{d^2 g}{dxdy} \\ \frac{d^2 g}{dxdy} & \frac{d^2 g}{dy^2} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

式(2.18)と式(2.19)で定義される変数を用いて、式(2.16)と式(2.17)を書き換えると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} -f(x_k, y_k) &= \left[f_x + \frac{1}{2} f_{xx}(dx_k) + \frac{1}{2} f_{xy}(dy_k) \right] dx_k \\ &\quad + \left[f_y + \frac{1}{2} f_{yy}(dy_k) + \frac{1}{2} f_{xy}(dx_k) \right] dy_k \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} -g(x_k, y_k) = & \left[g_x + \frac{1}{2} g_{xx}(dx_k) + \frac{1}{2} g_{xy}(dy_k) \right] dx_k \\ & + \left[g_y + \frac{1}{2} g_{yy}(dy_k) + \frac{1}{2} g_{xy}(dx_k) \right] dy_k \end{aligned} \quad (2.21)$$

式(2.20)と式(2.21)は dx_k と dy_k に関して非線形方程式であり、なんらかの数値解が必要になる。式(2.20)と式(2.21)に含まれる [] 項を以下の式で定義する。

$$\begin{cases} a_{11} = f_x + \frac{1}{2} f_{xx}(dx_k) + \frac{1}{2} f_{xy}(dy_k) \\ a_{12} = f_y + \frac{1}{2} f_{yy}(dy_k) + \frac{1}{2} f_{xy}(dx_k) \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} a_{21} = g_x + \frac{1}{2} g_{xx}(dx_k) + \frac{1}{2} g_{xy}(dy_k) \\ a_{22} = g_y + \frac{1}{2} g_{yy}(dy_k) + \frac{1}{2} g_{xy}(dx_k) \end{cases} \quad (2.23)$$

式(2.22)と式(2.23)の値が既知であれば、式(2.20)と式(2.21)は次の連立方程式の解で与えられることがある。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_k \\ dy_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\begin{bmatrix} dx_k \\ dy_k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

式(2.22)と式(2.23)に含まれる dx_k , dy_k をなんらかの方法によって近似解を求めなければならない。

4.1 ベイリー法 (Bailey 法)

一変量関数のニュートン法に準じて、式(2.22)の dx_k と dy_k をそれぞれ、次式で求める。

$$dx_k = -f/f_x, \quad dy_k = -f/f_y \quad (2.26)$$

同様に、式(2.23)の dx_k と dy_k をそれぞれ、次式で求める。

$$dx_k = -g/g_x, \quad dy_k = -g/g_y \quad (2.27)$$

式(2.26)を式(2.22)に、式(2.27)を式(2.23)に代入すると、 $a_{11} \sim a_{22}$ の値は次式で与えられる。

$$\begin{cases} a_{11} = f_x - \frac{1}{2} \frac{f \cdot f_{xx}}{f_x} - \frac{1}{2} \frac{f \cdot f_{xy}}{f_y} \\ a_{12} = f_y - \frac{1}{2} \frac{f \cdot f_{yy}}{f_y} - \frac{1}{2} \frac{f \cdot f_{xy}}{f_x} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} a_{21} = g_x - \frac{1}{2} \frac{g \cdot g_{xx}}{g_x} - \frac{1}{2} \frac{g \cdot g_{xy}}{g_y} \\ a_{22} = g_y - \frac{1}{2} \frac{g \cdot g_{yy}}{g_y} - \frac{1}{2} \frac{g \cdot g_{xy}}{g_x} \end{cases} \quad (2.29)$$

式(2.28)と式(2.29)から $a_{11} \sim a_{22}$ の値が既知となるので、式(2.25)を用いて、 dx_k と dy_k を求める。

4.2 ニュートン法の併用による近似解法

一次微係数を用いたニュートン法は次式で定義される。

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_k^* \\ dy_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ -g \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

上記の連立方程式を解いて、

$$\begin{bmatrix} dx_k^* \\ dy_k^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

が得られる。式(2.22)と式(2.23)に含まれる dx_k と dy_k の値に式(2.31)の解を代入すると、 $a_{11} \sim a_{22}$ の値は次式で与えられることになる。

$$\begin{cases} a_{11} = f_x + \frac{1}{2} f_{xx}(dx_k^*) + \frac{1}{2} f_{xy}(dy_k^*) \\ a_{12} = f_y + \frac{1}{2} f_{yy}(dy_k^*) + \frac{1}{2} f_{xy}(dx_k^*) \end{cases} \quad (2.32)$$

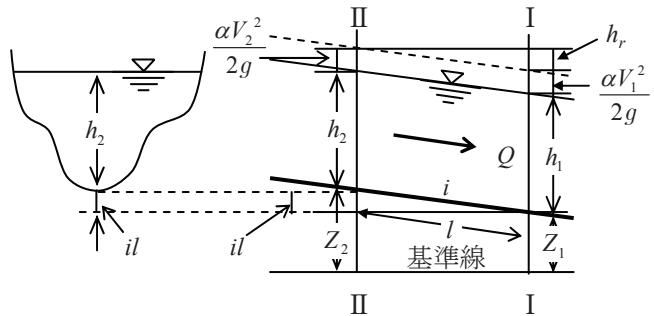
$$\begin{cases} a_{21} = g_x + \frac{1}{2} g_{xx}(dx_k^*) + \frac{1}{2} g_{xy}(dy_k^*) \\ a_{22} = g_y + \frac{1}{2} g_{yy}(dy_k^*) + \frac{1}{2} g_{xy}(dx_k^*) \end{cases} \quad (2.33)$$

式(2.32)と式(2.33)より $a_{11} \sim a_{22}$ は既知となるので、式(2.25)により修正値 dx_k と dy_k が求められる。 $x_{k+1} = x_k + dx_k$, $y_{k+1} = y_k + dy_k$ として繰り返し計算を行い、 $|f(x, y)| \leq 10^{-4}$, $|g(x, y)| \leq 10^{-4}$ の条件のもとで収束解を求める。

文責 仙庭 真司
伊賀 久晃

5. 水理学における適用例(不等流の数値計算法)

右図に示される I, II 断面における諸量にそれぞれ添字 1, 2 をつけて、この 2 断面間にベルヌイの定理を適用すると、次式が得られる。



$$\left. \begin{aligned} Z_2 + h_2 + \frac{\alpha V_2^2}{2g} &= Z_1 + h_1 + \frac{\alpha V_1^2}{2g} + h_r \\ Z_2 - Z_1 &= l \sin \theta \doteq il \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

ここで、 Z : 河床高, h : 水深, V : 流速, α : 流速補正係数, g : 重力加速度[9.8(m/s²)], h_r : 摩擦損失水頭, i : 河床勾配, l : 断面間距離

h_r は I, II 断面間の摩擦損失水頭で、次式で計算される。

$$h_r = f' \frac{l}{R} \frac{V^2}{2g} = \begin{cases} \frac{V^2 l}{C^2 R} & \text{(シェジー式)} \\ \frac{n^2 V^2 l}{R^{4/3}} & \text{(マニング式)} \end{cases} \quad (2.35)$$

$$R = \frac{A}{S} \quad (2.36)$$

ここで、 f' : 摩擦損失係数, n : 粗度係数, R : 径深, A : 断面積, S : 潤辺

h_r にマニング式を用い、 h_r を 2 断面間の平均値で表すと、

$$h_r \doteq \frac{Q^2 l}{2} \left(\frac{n_1^2}{R_1^{4/3} A_1^2} + \frac{n_2^2}{R_2^{4/3} A_2^2} \right) \quad (2.37)$$

以上の関係式を式(2.34)に代入すると

$$h_2 + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{1}{A_2^2} - \frac{n^2 / Q^2}{2} \frac{1}{R_2^{4/3} A_2^2} = h_1 - il + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{1}{A_1^2} + \frac{n^2 / Q^2}{2} \frac{1}{R_1^{4/3} A_1^2} \quad (n_1 = n_2 \text{ と仮定}) \quad (2.38)$$

式(2.38)の左辺と右辺を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} F_2(h_2) &= h_2 + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{1}{A_2^2} - \frac{n^2 / Q^2}{2} \frac{1}{R_2^{4/3} A_2^2} \\ F_1(h_1) &= h_1 - il + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{1}{A_1^2} + \frac{n^2 / Q^2}{2} \frac{1}{R_1^{4/3} A_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

すなわち、 $F_2(h_2) = F_1(h_1)$

今、I断面の諸量が与えられると、 $F_1(h_1)$ の値は既知となる。II断面における水深 h_2 を仮定すると、 A_2 と R_2 が計算されるから、 $F_2(h_2)$ の値が求まる。この $F_2(h_2)$ が $F_1(h_1)$ に一致するまで、 h_2 を更新して、繰り返し計算を続ける。通常、3~4回程度で収束する。 h_2 の値が求まると、次の断面に移って計算を続行する。

なお、常流では下流から上流に向って、射流では上流から下流に向かって計算を進める。

5.1 広矩形断面の不等流数値計算例

広矩形断面を仮定すると $R \doteq h$ となり、長方形断面により、 $A = Bh$ となる。これらの値を式(2.39)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} F_2(h_2) &= h_2 + \frac{\alpha Q^2}{2gB_2^2} \frac{1}{h_2^2} - \frac{n^2 Q^2 l}{2B_2^2} \frac{1}{h_2^{10/3}} \\ F_1(h_1) &= h_1 - il + \frac{\alpha Q^2}{2gB_1^2} \frac{1}{h_1^2} + \frac{n^2 Q^2 l}{2B_1^2} \frac{1}{h_1^{10/3}} \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

$F_2(h_2) = F_1$ となるよう h_2 の値を求める。

ただし、 F_1 は既知量とする。計算の便宜上、次式で諸量を定義する。

$$AA = \frac{\alpha Q^2}{2gB_2^2}, \quad BB = \frac{n^2 Q^2 l}{2B_2^2} \quad (2.41)$$

式(2.41)は、次式で置換える。

$$F_2(h_2) = h_2 + \frac{AA}{h_2^2} - \frac{BB}{h_2^{10/3}} \quad (2.42)$$

したがって、 $F_2(h_2) = F_1$ の解は次式で置換えられる。

$$f(h_2) = F_2(h_2) - F_1 = 0 \quad (2.43)$$

(a) 式(2.43)を1階ニュートン法(1次微係数利用)で解く。すなわち、

$$f(h_2 + \Delta h_2) = f(h_2) + f'(h_2) \Delta h_2 = 0 \quad (2.44)$$

から、

$$\Delta h_2 = -\frac{f(h_2)}{f'(h_2)} \quad (2.45)$$

を求める。

(b) 式(2.43)を2階ニュートン法(2次微係数利用)で解く。すなわち、

$$f(h_2 + \Delta h_2) = f(h_2) + f'(h_2) \Delta h_2 + \frac{1}{2} f''(h_2) \Delta h_2^2 = 0 \quad (2.46)$$

から、

$$\Delta h_2 = \frac{-f'(h_2) \pm \sqrt{(f'(h_2))^2 - 2f(h_2)f''(h_2)}}{f''(h_2)} \quad (2.47)$$

であるため、 Δx_k は Δx_k^+ と Δx_k^- の二つが求められる。そこで、 $|f(x_k + \Delta x_k^-)| > |f(x_k + \Delta x_k^+)|$ のときは、 $x_k + \Delta x_k^+$ を使い、 $|f(x_k + \Delta x_k^+)| > |f(x_k + \Delta x_k^-)|$ の場合は $x_k + \Delta x_k^-$ を使う。

したがって、 $k+1$ 番目の x_{k+1} は、

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k^+ = x_k + \frac{-f'(x_k) + \sqrt{f'(x_k)^2 - 2f''(x_k)f(x_k)}}{f''(x_k)} \quad (2.48)$$

または、

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k^- = x_k + \frac{-f'(x_k) - \sqrt{f'(x_k)^2 - 2f''(x_k)f(x_k)}}{f''(x_k)} \quad (2.49)$$

として求められる。

1階ニュートン法または2階ニュートン法によって求めた Δh_2 を用いて、 $h_2 \leftarrow h_2 + \Delta h_2$ と h_2 を更新する。 $|f(h_2)| \leq 10^{-4}$ 程度になったら、繰り返し計算を終了し、 h_2 が求まったとする。

式(2.45)と式(2.46)の微係数 $f'(h_2)$, $f''(h_2)$ は次式で計算される。

$$f'(h_2) = F'_2(h_2) = 1 - \frac{2AA}{h_2^3} + \frac{10}{3} \frac{BB}{h_2^{13/3}} \quad (2.50)$$

$$f''(h_2) = F''_2(h_2) = \frac{6AA}{h_2^4} - \frac{130}{9} \frac{BB}{h_2^{16/3}} \quad (2.51)$$

常流の場合の計算手順を以下に要約する。

- ① 下流端の水深 h_1 を用いて、 $F_1(h_1)$ の値を求める。
- ② 上流側の川幅 B_2 、河道距離 l を用いて、 AA と BB を求める。
- ③ 上流側水深 h_2 を仮定して、 $F_2(h_2)$ の値を求める。
- ④ $f(h_2)$ の値を求め、 $|f(h_2)| \leq 10^{-4}$ であれば、 h_2 が求める答えとなる。この条件が満たされなければ、次のステップに移る。
- ⑤ 1階ニュートン法または2階ニュートン法で、微係数を求めて Δh_2 の値を計算する。
- ⑥ 新しい h_2 を $(h_2 + \Delta h_2)$ で置き換えて、ステップ③に戻る。
- ⑦ h_2 が最終的に求まれば、次の上流区間に進み、同じ計算手順に従って、上流側水深を求める。

ニュートン法による計算表(1区間)

| 回数 | h_2 | $f(h_2)$ | $f'(h_2)$ | $f''(h_2)$ | Δh_2 |
|----|-------|----------|-----------|------------|--------------|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |

文責 東海林 勉

参考文献

- 1) 関根泰次：数理計画法，岩波書店，pp. 220–236，1976.
- 2) 今野 浩・山下 浩：非線形計画法，日科技連，pp. 158–182，1978.

第3回 流出解析ゼミ

— 洪水資料の整理 —

流出解析とは、端的に言えば、ある特定の流域でどのくらいの雨が降ったら河川にどのくらいの量が流出するかを計算することにある。いかなる洪水解析手法を採用するにしても、まず、解析に必要な洪水基礎資料の収集と整理が必要となる。ここでは、平成13年(2001)9月10日～15日に起った湧別川・丸瀬布地点における洪水例を解析対象として、その洪水特性を把握する。

1. 洪水資料の収集と整理

流出解析では雨量と流量の時系列データを必要とする。雨量は地点雨量を流域平均雨量に変換すれば、その時系列値が得られる。一方、流量は洪水期間中、直接観測することが困難である。一般には、前もって流量観測を行い、水位～流量($H \sim Q$)曲線を作成した後、水位の自記観測から間接的に流量時系列を算出する方法がとられている。図-1には、流量観測結果と水位・雨量の観測値を基礎資料として、流出解析に必要となる雨量・流量時系列の整理法が概説されている。また、適切な貯留関数型洪水流出モデルを選定する際に必要となる有効雨量、直接流出高及び貯留高の算定方法についても述べる。

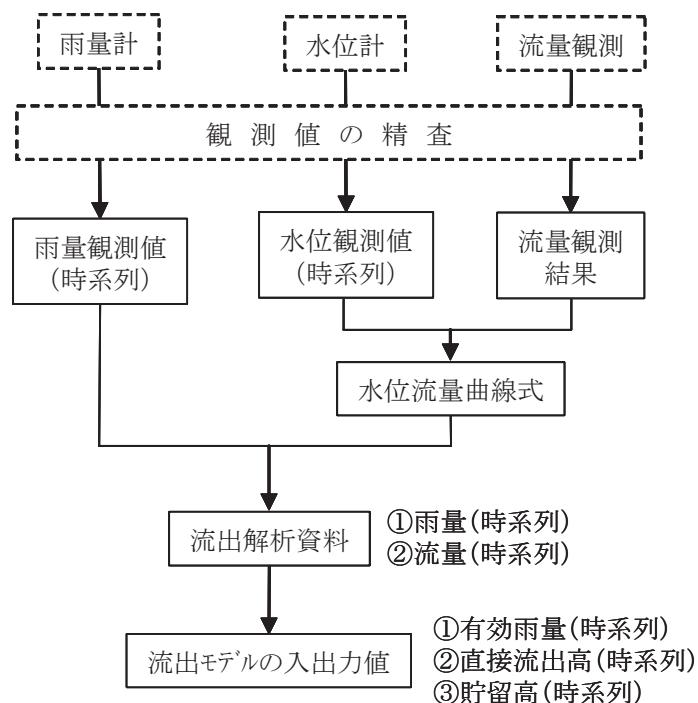


図-1 流出解析資料の収集・整理フローチャート

2. 水位～流量($H \sim Q$)曲線の作成

一般に、流量は観測水位から水位～流量曲線($H \sim Q$ 曲線)を媒介にして推定される。このため、流量を高い精度で推定するには、水位～流量曲線作成にあたって、低水・高水の広範囲にわたり流量観測がなされていることが必要条件となる。

現在、 $H \sim Q$ 曲線は \sqrt{Q} と H の関係が線形近似できるものとして、次の回帰式を採用している。

$$\sqrt{Q} = aH + b \quad (3.1)$$

最小二乗法の原理を用いて、回帰係数 a と b を決定する。

$$e_i = \sqrt{Q_i} - aH_i - b \quad (e_i : \text{各測点の誤差}) \quad (3.2)$$

$$J = \sum_{i=1}^n (\sqrt{Q_i} - aH_i - b)^2 \quad (3.3)$$

ここに、 n は流量観測資料数

式(3.3)が最小となるように a と b の値を求めればよい。式(3.3)を a と b で微分すると

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial b} = 0 \quad (3.4)$$

より、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (\sqrt{Q_i} - aH_i - b)(-H_i) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (\sqrt{Q_i} - aH_i - b)(-1) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

式(3.5)は次式に変形される。

$$\begin{cases} \sum \sqrt{Q_i} H_i = a \sum H_i^2 + b \sum H_i \\ \sum \sqrt{Q_i} = a \sum H_i + bn \end{cases} \quad (3.6)$$

式(3.6)は次式の連立方程式に整理される。

$$\begin{bmatrix} \sum H_i^2 & \sum H_i \\ \sum H_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \sqrt{Q_i} H_i \\ \sum \sqrt{Q_i} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ここで、式の煩雑さを避けるために、

$$\begin{cases} [H^2] = \sum H_i^2 \\ [H] = \sum H_i \\ [\sqrt{Q}H] = \sum \sqrt{Q_i} H_i \\ [\sqrt{Q}] = \sum \sqrt{Q_i} \end{cases} \quad (3.8)$$

と新しい変量を定義すると、式(3.8)は次の式形に置き換えることができる。

$$\begin{bmatrix} [H^2] & [H] \\ [H] & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sqrt{Q}H] \\ [\sqrt{Q}] \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

この連立方程式の解は式(3.10)で求められる。

$$\begin{cases} a = \frac{n[\sqrt{Q}H] - [\sqrt{Q}][H]}{n[H^2] - [H]^2} \\ b = \frac{[H^2][\sqrt{Q}] - [H][\sqrt{Q}H]}{n[H^2] - [H]^2} \end{cases} \quad (3.10)$$

式(3.1)は次のように変形されることがわかる。

$$\sqrt{Q} = aH + b = a\left(H + \frac{b}{a}\right) \quad (3.11)$$

上式(3.11)の両辺を2乗すると、水位～流量($H \sim Q$)曲線の式(3.12)が得られる。

$$Q = a^2 \left(H + \frac{b}{a}\right)^2 \quad (3.12)$$

3. 水位～流量($H \sim Q$)曲線作成の実際例

一級河川・湧別川における丸瀬布観測地点(流域面積 $A = 802.0 \text{ km}^2$)において、水位～流量曲線がどのように作成されているかの実例を示す。

まず、丸瀬布における2001年の水位～流量曲線の作成結果を要約して、表-1に示す。曲線ⅡとVは同じ水位～流量曲線であるが、適用水位と適用期間別に使用曲線が異なることになる。

表-1 平成13年水位～流量曲線(丸瀬布)

| 曲線 | $H \sim Q$ 曲線 | 適用水位 | | 適用期間 |
|-----|---------------------------|-------------|-------------|--------------------|
| | | 下限水位 (m) | 上限水位 (m) | |
| I | $Q = 34.30(H - 173.58)^2$ | 173.59 | 174.40 | 1月1日1時～7月24日8時 |
| II | $Q = 27.23(H - 173.48)^2$ | 174.41 | 176.84 | 1月1日1時～7月24日8時 |
| III | $Q = 26.11(H - 173.41)^2$ | 173.42 | 178.29 | 7月24日9時～9月11日18時 |
| IV | $Q = 50.67(H - 173.82)^2$ | 173.83 | 174.75 | 9月11日19時～12月31日24時 |
| V | $Q = 27.23(H - 173.48)^2$ | 174.76 | 178.35 | 9月11日19時～12月31日24時 |

解析対象洪水は、平成13年(2001)9月10日から15日の台風15号の通過に伴う出水である。したがって、この洪水期間中の水位～流量($H \sim Q$)曲線は表-1に示される曲線IIIと曲線Vが使

用されることになる。曲線**III**と曲線**V**が作成された際の流量観測値及び水位流量曲線式計算書がそれぞれ、表-2に示されている。

なお、流量観測時での最大流量は $611.23\text{m}^3/\text{s}$ であり、比較的大きな流量観測に成功していると言える。表-2の計算書に基づき、水位～流量($H \sim Q$)曲線の回帰係数 a と b が式(3.10)を用いて、容易に計算されることになる。すなわち、以下にその関係式を示す。

曲線**III**

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{n[\sqrt{Q}H] - [\sqrt{Q}][H]}{n[H^2] - [H]^2} = \frac{13 \times 1169.2126 - 172.27 \times 77.99}{13 \times 494.4395 - 77.99^2} = 5.1102 \\ b = \frac{[H^2][\sqrt{Q}] - [H][\sqrt{Q}H]}{n[H^2] - [H]^2} = \frac{494.4395 \times 172.27 - 77.99 \times 1169.2126}{13 \times 494.4395 - 77.99^2} = 17.4059 \end{array} \right.$$

$$\sqrt{Q} = aH + b = 5.1102H - 17.4059 = 5.1102(H - 3.406)$$

$$Q = 26.11(H - 3.41)^2$$

$$Q = 26.11(H' - 173.41)^2 \quad (H' : \text{観測水位})$$

曲線**V**

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{n[\sqrt{Q}H] - [\sqrt{Q}][H]}{n[H^2] - [H]^2} = \frac{9 \times 1097.5836 - 156.32 \times 61.31}{9 \times 423.9235 - 61.31^2} = 5.2180 \\ b = \frac{[H^2][\sqrt{Q}] - [H][\sqrt{Q}H]}{n[H^2] - [H]^2} = \frac{423.9235 \times 156.32 - 61.31 \times 1097.5836}{9 \times 423.9235 - 61.31^2} = -18.1175 \end{array} \right.$$

$$\sqrt{Q} = aH + b = 5.2180H - 18.1175 = 5.2180(H - 3.4836)$$

$$Q = 27.23(H - 3.48)^2$$

$$Q = 27.23(H' - 173.48)^2 \quad (H' : \text{観測水位})$$

図-2には曲線**III**と曲線**V**の \sqrt{Q} と H の関係式が示されている。 \sqrt{Q} と H の直線近似度が高いことがわかる。

オホーツク海に注ぐ一級河川・湧別川の丸瀬布観測所($A = 802.0\text{km}^2$)における平成13(2001)年9月10日～15日までの洪水時実績水位と水位～流量関係式の**III**及び**V**曲線を用いて流量に変換した値が表-3に示されている。なお、丸瀬布地点での流域平均雨量も表-3に示されている。これらの雨量・流量データが今後議論される流出解析のための基礎資料となる。その解析例における洪水諸元を表-4に要約して示す。

表-2 水位流量曲線式計算書(曲線III, 曲線V)

| | | 河川 : 湧別川 | 観測所 : 丸瀬布(マルセップ) | | |
|-------|------------------|--------------------------|------------------|------------|-------------|
| 年 | | 平成13(2001)年 | | | |
| 曲線III | | 自 7月24日 9時 至 9月11日 18時 | | | |
| 零点標高 | | 170 [m] | | | |
| 年間番号 | $H (= H' - 170)$ | H^2 | Q | \sqrt{Q} | $H\sqrt{Q}$ |
| 7 | 5.00 | 25.0000 | 70.49 | 8.40 | 42.0000 |
| 15 | 6.76 | 45.6976 | 293.03 | 17.12 | 115.7312 |
| 16 | 6.50 | 42.2500 | 244.84 | 15.65 | 101.7250 |
| 17 | 6.45 | 41.6025 | 231.41 | 15.21 | 98.1045 |
| 18 | 5.70 | 32.4900 | 143.48 | 11.98 | 68.2860 |
| 19 | 5.68 | 32.2624 | 134.21 | 11.58 | 65.7744 |
| 21 | 4.06 | 16.4836 | 11.87 | 3.45 | 14.0070 |
| 22 | 3.80 | 14.4400 | 3.99 | 2.00 | 7.6000 |
| 23 | 3.82 | 14.5924 | 4.39 | 2.10 | 8.0220 |
| 24 | 8.02 | 64.3204 | 576.22 | 24.00 | 192.4800 |
| 25 | 8.21 | 67.4041 | 611.23 | 24.72 | 202.9512 |
| 26 | 7.13 | 50.8369 | 365.04 | 19.11 | 136.2543 |
| 27 | 6.86 | 47.0596 | 287.30 | 16.95 | 116.2770 |
| 合計 | 77.99 | 494.4395 | 2977.50 | 172.27 | 1169.2126 |
| 曲線V | | 自 9月11日 19時 至 12月31日 24時 | | | |
| 年間番号 | $H (= H' - 170)$ | H^2 | Q | \sqrt{Q} | $H\sqrt{Q}$ |
| 15 | 6.76 | 45.6976 | 293.03 | 17.12 | 115.7312 |
| 16 | 6.50 | 42.2500 | 244.84 | 15.65 | 101.7250 |
| 17 | 6.45 | 41.6025 | 231.41 | 15.21 | 98.1045 |
| 18 | 5.70 | 32.4900 | 143.48 | 11.98 | 68.2860 |
| 19 | 5.68 | 32.2624 | 134.21 | 11.58 | 65.7744 |
| 24 | 8.02 | 64.3204 | 576.22 | 24.00 | 192.4800 |
| 25 | 8.21 | 67.4041 | 611.23 | 24.72 | 202.9512 |
| 26 | 7.13 | 50.8369 | 365.04 | 19.11 | 136.2543 |
| 27 | 6.86 | 47.0596 | 287.30 | 16.95 | 116.2770 |
| 合計 | 61.31 | 423.9235 | 2886.76 | 156.32 | 1097.5836 |

表-3 丸瀬布 解析洪水資料（平成13年）

| 月 | 日 | 時 | 雨量 | 実績Q | 実績H |
|---|----|----|------|-------------------|--------|
| | | | mm/h | m ³ /s | m |
| 9 | 10 | 1 | 0.00 | 9.40 | 174.01 |
| | | 2 | 0.00 | 9.40 | 174.01 |
| | | 3 | 0.00 | 9.40 | 174.01 |
| | | 4 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 5 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 6 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 7 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 8 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 9 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 10 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 11 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 12 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 13 | 0.10 | 8.78 | 173.99 |
| | | 14 | 0.34 | 8.78 | 173.99 |
| | | 15 | 0.00 | 9.09 | 174.00 |
| | | 16 | 0.65 | 9.09 | 174.00 |
| | | 17 | 4.07 | 9.40 | 174.01 |
| | | 18 | 3.45 | 9.72 | 174.02 |
| | | 19 | 4.05 | 10.69 | 174.05 |
| | | 20 | 2.12 | 12.43 | 174.10 |
| | | 21 | 3.05 | 16.30 | 174.20 |
| | | 22 | 3.09 | 18.86 | 174.26 |
| | | 23 | 8.10 | 43.45 | 174.70 |
| | | 24 | 7.51 | 66.84 | 175.01 |
| 9 | 11 | 1 | 6.38 | 102.36 | 175.39 |
| | | 2 | 6.20 | 149.14 | 175.80 |
| | | 3 | 4.50 | 203.24 | 176.20 |
| | | 4 | 5.09 | 233.43 | 176.40 |
| | | 5 | 5.77 | 259.08 | 176.56 |
| | | 6 | 5.18 | 275.79 | 176.66 |
| | | 7 | 5.38 | 287.79 | 176.73 |
| | | 8 | 5.90 | 305.39 | 176.83 |
| | | 9 | 4.86 | 336.51 | 177.00 |
| | | 10 | 3.43 | 371.10 | 177.18 |
| | | 11 | 4.00 | 413.59 | 177.39 |
| | | 12 | 4.82 | 441.05 | 177.52 |
| | | 13 | 6.89 | 456.20 | 177.59 |
| | | 14 | 6.55 | 480.53 | 177.70 |
| | | 15 | 6.39 | 510.10 | 177.83 |
| | | 16 | 1.36 | 554.89 | 178.02 |
| | | 17 | 1.10 | 609.12 | 178.24 |
| | | 18 | 1.27 | 621.79 | 178.29 |
| | | 19 | 2.16 | 645.81 | 178.35 |
| | | 20 | 2.43 | 627.38 | 178.28 |
| | | 21 | 3.00 | 609.21 | 178.21 |
| | | 22 | 1.36 | 588.78 | 178.13 |
| | | 23 | 2.70 | 553.86 | 177.99 |
| | | 24 | 1.95 | 524.78 | 177.87 |
| 9 | 12 | 1 | 1.00 | 503.48 | 177.78 |
| | | 2 | 1.16 | 473.50 | 177.65 |
| | | 3 | 0.65 | 462.21 | 177.60 |
| | | 4 | 0.36 | 442.24 | 177.51 |
| | | 5 | 1.10 | 416.29 | 177.39 |
| | | 6 | 0.65 | 403.62 | 177.33 |
| | | 7 | 1.19 | 391.13 | 177.27 |
| | | 8 | 1.55 | 374.80 | 177.19 |
| | | 9 | 0.95 | 360.79 | 177.12 |
| | | 10 | 1.16 | 345.10 | 177.04 |
| | | 11 | 1.36 | 337.39 | 177.00 |
| | | 12 | 0.68 | 333.57 | 176.98 |
| | | 13 | 1.00 | 325.99 | 176.94 |
| | | 14 | 0.71 | 322.23 | 176.92 |
| | | 15 | 0.65 | 311.09 | 176.86 |
| | | 16 | 0.16 | 294.74 | 176.77 |
| | | 17 | 0.00 | 289.39 | 176.74 |
| | | 18 | 0.71 | 273.63 | 176.65 |
| | | 19 | 0.00 | 277.10 | 176.67 |
| | | 20 | 0.20 | 271.91 | 176.64 |
| | | 21 | 0.00 | 265.07 | 176.60 |
| | | 22 | 0.10 | 251.65 | 176.52 |
| | | 23 | 0.07 | 258.31 | 176.56 |
| | | 24 | 0.00 | 233.77 | 176.41 |
| 9 | 13 | 1 | 0.00 | 225.86 | 176.36 |
| | | 2 | 0.00 | 224.29 | 176.35 |
| | | 3 | 0.00 | 211.96 | 176.27 |
| | | 4 | 0.00 | 202.94 | 176.21 |
| | | 5 | 0.00 | 207.43 | 176.24 |
| | | 6 | 0.00 | 197.04 | 176.17 |
| | | 7 | 0.00 | 199.98 | 176.19 |
| | | 8 | 0.00 | 202.94 | 176.21 |
| | | 9 | 0.00 | 194.12 | 176.15 |
| | | 10 | 0.00 | 197.04 | 176.17 |
| | | 11 | 0.00 | 194.12 | 176.15 |
| | | 12 | 0.00 | 189.78 | 176.12 |
| | | 13 | 0.00 | 188.35 | 176.11 |
| | | 14 | 0.00 | 178.45 | 176.04 |
| | | 15 | 0.00 | 177.06 | 176.03 |
| | | 16 | 0.00 | 171.55 | 175.99 |
| | | 17 | 0.00 | 163.45 | 175.93 |
| | | 18 | 0.00 | 162.12 | 175.92 |
| | | 19 | 0.00 | 164.79 | 175.94 |
| | | 20 | 0.00 | 156.84 | 175.88 |
| | | 21 | 0.00 | 150.38 | 175.83 |
| | | 22 | 0.00 | 155.54 | 175.87 |
| | | 23 | 0.00 | 151.66 | 175.84 |
| | | 24 | 0.00 | 145.30 | 175.79 |
| 9 | 14 | 1 | 0.00 | 152.95 | 175.85 |
| | | 2 | 0.00 | 142.80 | 175.77 |
| | | 3 | 0.00 | 141.55 | 175.76 |
| | | 4 | 0.00 | 142.80 | 175.77 |
| | | 5 | 0.00 | 134.20 | 175.70 |
| | | 6 | 0.00 | 129.41 | 175.66 |
| | | 7 | 0.00 | 130.60 | 175.67 |
| | | 8 | 0.00 | 125.87 | 175.63 |
| | | 9 | 0.00 | 124.70 | 175.62 |
| | | 10 | 0.00 | 120.08 | 175.58 |
| | | 11 | 0.00 | 111.11 | 175.50 |
| | | 12 | 0.00 | 115.55 | 175.54 |
| | | 13 | 0.00 | 111.11 | 175.50 |
| | | 14 | 0.00 | 107.83 | 175.47 |
| | | 15 | 0.00 | 104.61 | 175.44 |
| | | 16 | 0.00 | 102.48 | 175.42 |
| | | 17 | 0.00 | 102.48 | 175.42 |
| | | 18 | 0.00 | 101.43 | 175.41 |
| | | 19 | 0.00 | 98.30 | 175.38 |
| | | 20 | 0.00 | 97.27 | 175.37 |
| | | 21 | 0.00 | 95.22 | 175.35 |
| | | 22 | 0.00 | 93.19 | 175.33 |
| | | 23 | 0.00 | 90.20 | 175.30 |
| | | 24 | 0.00 | 89.21 | 175.29 |
| 9 | 15 | 1 | 0.00 | 88.23 | 175.28 |
| | | 2 | 0.00 | 85.31 | 175.25 |
| | | 3 | 0.00 | 82.44 | 175.22 |
| | | 4 | 0.00 | 80.56 | 175.20 |
| | | 5 | 0.00 | 80.56 | 175.20 |
| | | 6 | 0.00 | 78.69 | 175.18 |
| | | 7 | 0.00 | 79.62 | 175.19 |
| | | 8 | 0.00 | 78.69 | 175.18 |
| | | 9 | 0.00 | 75.94 | 175.15 |
| | | 10 | 0.00 | 73.51 | 175.12 |
| | | 11 | 0.00 | 71.46 | 175.10 |
| | | 12 | 0.00 | 71.46 | 175.10 |
| | | 13 | 0.00 | 70.58 | 175.09 |
| | | 14 | 0.00 | 68.84 | 175.07 |
| | | 15 | 0.00 | 67.98 | 175.06 |
| | | 16 | 0.00 | 67.98 | 175.06 |
| | | 17 | 0.00 | 66.27 | 175.04 |
| | | 18 | 0.00 | 65.42 | 175.03 |
| | | 19 | 0.00 | 61.27 | 174.98 |
| | | 20 | 0.00 | 59.64 | 174.96 |
| | | 21 | 0.00 | 59.64 | 174.96 |
| | | 22 | 0.00 | 58.84 | 174.95 |
| | | 23 | 0.00 | 58.84 | 174.95 |
| | | 24 | 0.00 | 57.25 | 174.93 |

すなわち、流域平均雨量の総雨量は 150.61mm であり、ピーク水位は 178.35m(9月11日19時生起)に達し、警戒水位を約 1.5m 超過している。ピーク流量は $645.81 \text{ m}^3/\text{s}$ であり、したがって、比流量は $0.805 \text{ m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ となる。一般的に、比流量が 0.5 を超えると洪水と定義できることから、今回の洪水は比較的大きな出水規模と言える。なお、今回の洪水時のピーク流量は $645.81 \text{ m}^3/\text{s}$ であるのに対して、表-2 に示されるように、平成 13 年の流量観測時の最大値は $611.23 \text{ m}^3/\text{s}$ であった。したがって、ピーク近傍での流量観測に成功していることは注目に値する。

図-3 と図-4 には、それぞれ水位時間曲線と洪水ハイドログラフが示されている。洪水の上昇が早く、短時間で警戒水位に達した比較的大きな出水事例と言える。

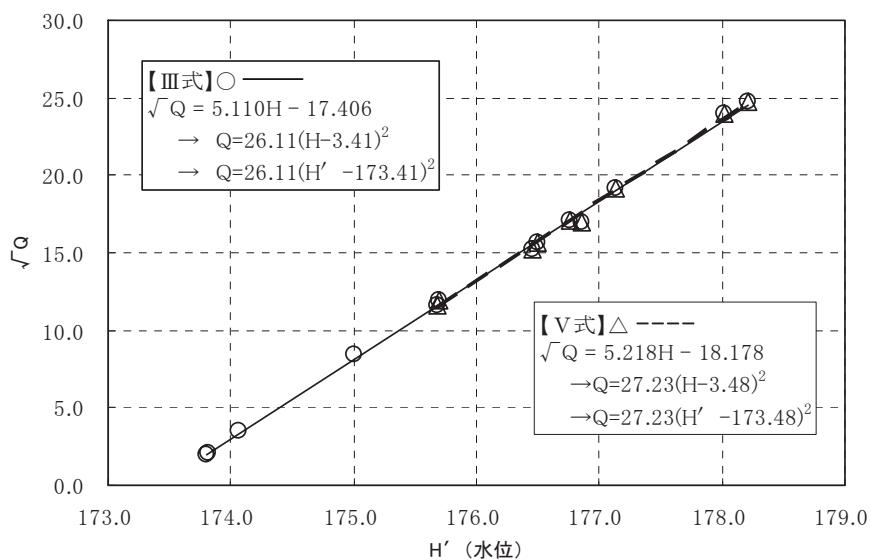


図-2 $H \sim \sqrt{Q}$ の関係式（丸瀬布；平成 13 年）

表-4 解析例における洪水諸元

| | |
|-----------------|---|
| 水系名 | 湧別川（一級河川） |
| 河川名 | 湧別川 |
| 流量観測所 | 丸瀬布 |
| 流域面積 | $A=802.0 \text{ km}^2$ |
| 洪水年月日 | 平成 13 (2001) 年 9 月 10 日～9 月 15 日 |
| 総雨量（流域平均） | 150.61mm |
| ピーク水位 | 178.35m (指定水位: 176.80m, 警戒水位: 176.95m) |
| ピーク流量 | $645.81 \text{ m}^3/\text{s}$ |
| 比流量（ピーケ流量/流域面積） | $0.805 (\text{m}^3/\text{s}/\text{km}^2)$ |

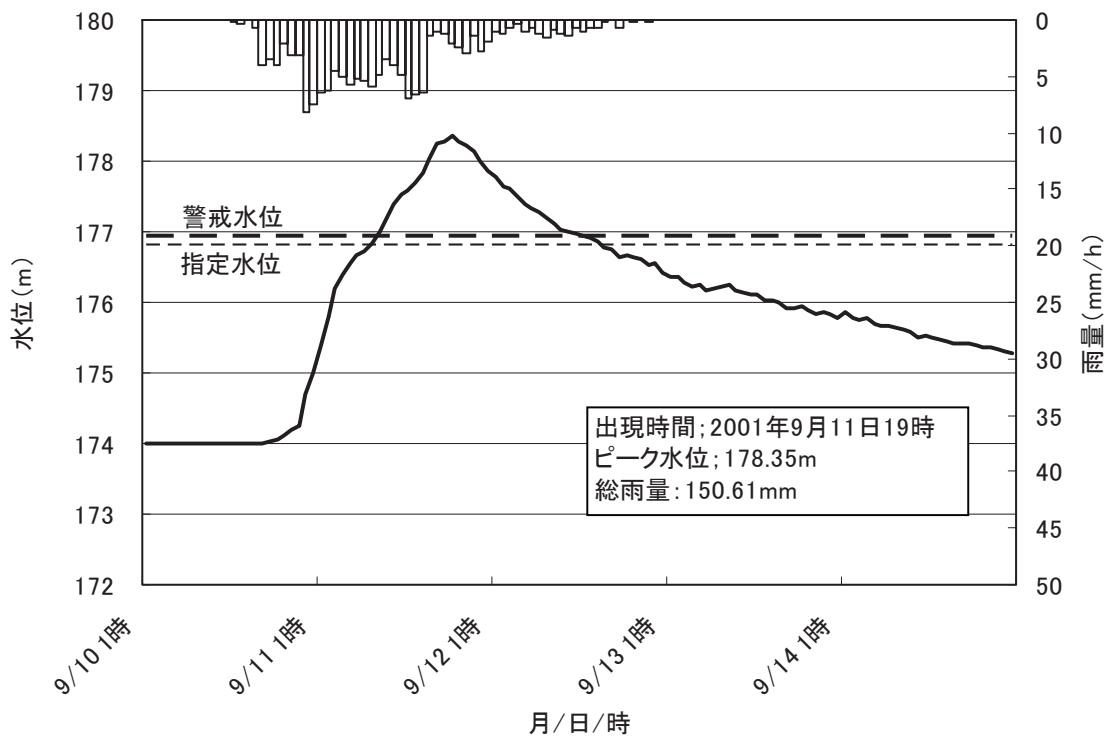


図-3 水位時間曲線（丸瀬布；平成 13 年）

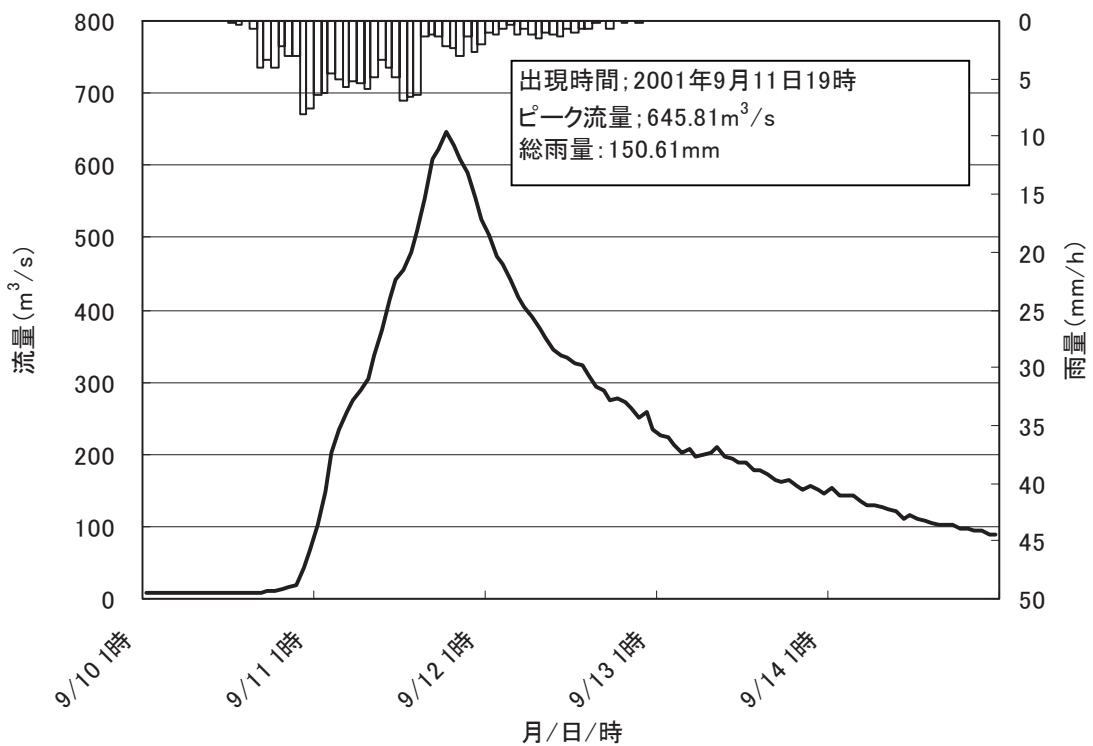


図-4 洪水ハイドログラフ（丸瀬布；平成 13 年）

4. 直接流出成分と有効雨量の算定

雨量の単位は[mm/h]、流量のそれは [m^3/s] であり、次式を用いて流量 Q を流出高 q に変換する。

$$q = \frac{3.6Q}{A} \quad (3.13)$$

ここで、 q ：流出高(mm/h), Q ：流量(m^3/s), A ：流域面積(km^2)

一般に、全流出量は表面流出・中間流出・地下水流出の3成分からなると言われている。また、「表面・中間流出成分」は比較的早く流出してくることから「直接流出成分」、「地下水流出成分」は長時間かけて流出してくることから、「基底流出成分」と呼ばれることが多い。これらの流出成分の分離には、しばしば「フィルター分離法」が使われる。流出成分の分離をより簡単に行うには、流量ないし流出高を片対数紙上にプロットすると、ハイドログラフ低減部において勾配変化がはっきりした2本ないし3本の直線部分が現れる。表-3に示される丸瀬布地点の観測流出高(q_0)を片対数紙上にプロットした結果が図-5に示されている。流出開始時点(図中の q_1)と第2折点(図中の q_2)を結ぶ線より上の部分が「直接流出成分」、下の部分が「基底流出成分」となる。

基底流出成分を $q_B(t) = at + b$ で表現し、流出開始点(t_1)と第2折点(t_2)の時間と流出高より、 a と b を得る。ここでは、9月10日19時を流出開始点($t_1 = 0$)として、その時の流出高を q_1 、9月14日17時を第2折点($t_2 = 94$)として、その時の流出高を q_2 と設定した。すなわち、 a と b は次式で計算される。

$$a = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}, b = q_1$$

これらの式より、 a と b は次のように求まる。

$$\begin{cases} a = \frac{0.4600 - 0.0480}{94} = 0.0044 \\ b = 0.0480 \end{cases}$$

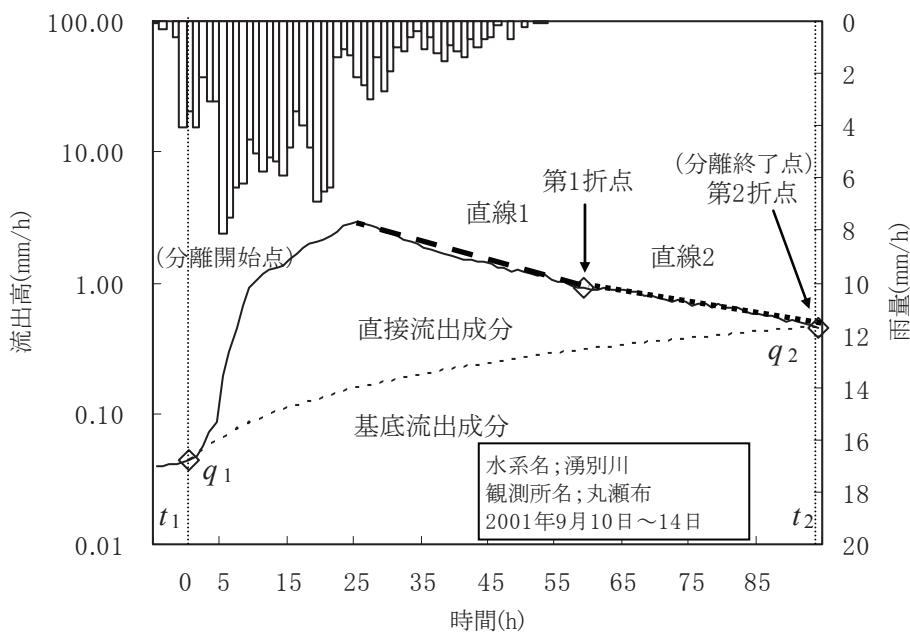


図-5 直接流出高と基底流出高の分離（丸瀬布；平成13年）

したがって、基底流出成分 $q_b(t)$ は次式で表される。

$$q_b(t) = 0.0044t + 0.0480 \quad (3.14)$$

ここで、 $q_b(t)$ は時刻 t における基底流出高を表す。直接流出成分は観測流出高から基底流出成分を引くことにより求められる。式(3.14)の基底流出成分算定式を用いて、直接流出高を求めた結果が、表-5 に示される。

図-4 のハイドログラフを見ると降雨が開始し、その後数時間経過して流出が始まっているが、降った雨は即流出には至らず、土壤が十分に湿っていない場合には土壤に保水される。このような理由から流出開始の遅れを引き起こす。降雨開始から流出開始までの雨量は初期損失雨量と呼ばれ、直接流出量の計算にあたっては、総雨量から初期損失雨量は差し引かれる。したがって、表-5 に示される 9 月 10 日 19 時までの雨量 12.66mm は初期損失雨量とみなされる。

有効雨量は初期損失雨量を除いた流出開始以降の観測雨量に流出率を乗じると求まる。流出率は、次式(3.15)で定義される。

$$f = q_T - r_T \quad (3.15)$$

ここで、 f : 流出率、 q_T : 総直接流出高、 r_T : 初期損失を除いた総雨量

表-5において、総直接流出高は $q_T = 88.3467\text{mm}$ 、初期損失量を除いた総雨量は $r_T = 137.95\text{mm}$ となる。したがって、解析事例の流出率は $0.6406 (= 88.3647 / 137.95)$ となる。流出率を各時刻の観測雨量に乗じて有効雨量を求めた結果が表-5 に示されている。また、図-6 には有効雨量系列と直接流出ハイドログラフの関係が示されている。

[補足] 基底流出成分における減衰係数 λ の算定法

今、ピーク流量時を $t=0$ とすれば、ハイドログラフ低減部は次式で表現される。

$$q(t) = q_p \exp(-\lambda t) \quad (3.16)$$

ここに、 q_p : ピーク流出高、 λ : 減衰係数、 t : ピーク時以降の時間

雨が降り止んだ状態を想定すれば、 t は十分に大きな値を選択することが望ましい。

一般的に、ピーク時以降の流出高 (q_p / q) を半対数紙上にプロットすれば、第一折点と第二折点をより明確に見つけることができる場合が多い(図-7 参照)。この 2 点を結ぶ直線から λ の値が推定される。

ピーク時以降の第一折点は t_1 で q_1 が得られる。同様に、第二折点の近傍では t_2 で q_2 が得られる。したがって、 $q_1 = q_p \exp(-\lambda t_1)$ と $q_2 = q_p \exp(-\lambda t_2)$ より λ は次式で計算される。

$$\lambda = \ln(q_1 / q_2) / (t_2 - t_1) \quad (3.17)$$

この減衰係数 λ は基底流出成分(あるいは地下水流出成分)を規定する河川固有の値と考えられている。

表-5(1) 直接流出高と有効雨量の算定

| 月日 | 時間 | 累計時間 | 雨量 | 水位 | 流量 | 流出高 | 基底流出高 | 直接流出高 | 有効雨量 |
|------|----|------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | | r_o | H | Q | q_o | q_B | q | r |
| 9/10 | 1 | | 0.00 | 174.01 | 9.40 | 0.0422 | | | |
| | 2 | | 0.00 | 174.01 | 9.40 | 0.0422 | | | |
| | 3 | | 0.00 | 174.01 | 9.40 | 0.0422 | | | |
| | 4 | | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 5 | | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 6 | | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 7 | | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 8 | | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 9 | 初期損失 雨量 | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 10 | | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 11 | | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 12 | | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 13 | | 0.10 | 173.99 | 8.78 | 0.0394 | | | |
| 9/10 | 14 | | 0.34 | 173.99 | 8.78 | 0.0394 | | | |
| | 15 | | 0.00 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 16 | | 0.65 | 174.00 | 9.09 | 0.0408 | | | |
| | 17 | | 4.07 | 174.01 | 9.40 | 0.0422 | | | |
| | 18 | | 3.45 | 174.02 | 9.72 | 0.0436 | | | |
| | 19 | 0 | 4.05 | 174.05 | 10.69 | 0.0480 | 0.0480 | 0.0000 | |
| | 20 | 1 | 2.12 | 174.10 | 12.43 | 0.0558 | 0.0524 | 0.0034 | 1.3580 |
| | 21 | 2 | 3.05 | 174.20 | 16.30 | 0.0731 | 0.0568 | 0.0164 | 1.9537 |
| | 22 | 3 | 3.09 | 174.26 | 18.86 | 0.0847 | 0.0612 | 0.0235 | 1.9793 |
| | 23 | 4 | 8.10 | 174.70 | 43.45 | 0.1950 | 0.0655 | 0.1295 | 5.1885 |
| | 24 | 5 | 7.51 | 175.01 | 66.84 | 0.3000 | 0.0699 | 0.2301 | 4.8106 |
| 9/11 | 1 | 6 | 6.38 | 175.39 | 102.36 | 0.4595 | 0.0743 | 0.3852 | 4.0867 |
| | 2 | 7 | 6.20 | 175.80 | 149.14 | 0.6695 | 0.0787 | 0.5908 | 3.9714 |
| | 3 | 8 | 4.50 | 176.20 | 203.24 | 0.9123 | 0.0831 | 0.8292 | 2.8825 |
| | 4 | 9 | 5.09 | 176.40 | 233.43 | 1.0478 | 0.0875 | 0.9603 | 3.2604 |
| | 5 | 10 | 5.77 | 176.56 | 259.08 | 1.1629 | 0.0918 | 1.0711 | 3.6960 |
| | 6 | 11 | 5.18 | 176.66 | 275.79 | 1.2379 | 0.0962 | 1.1417 | 3.3181 |
| | 7 | 12 | 5.38 | 176.73 | 287.79 | 1.2918 | 0.1006 | 1.1912 | 3.4462 |
| | 8 | 13 | 5.90 | 176.83 | 305.39 | 1.3708 | 0.1050 | 1.2659 | 3.7793 |
| | 9 | 14 | 4.86 | 177.00 | 336.51 | 1.5105 | 0.1094 | 1.4011 | 3.1131 |
| | 10 | 15 | 3.43 | 177.18 | 371.10 | 1.6658 | 0.1138 | 1.5520 | 2.1971 |
| | 11 | 16 | 4.00 | 177.39 | 413.59 | 1.8565 | 0.1181 | 1.7384 | 2.5622 |
| | 12 | 17 | 4.82 | 177.52 | 441.05 | 1.9798 | 0.1225 | 1.8573 | 3.0875 |
| | 13 | 18 | 6.89 | 177.59 | 456.20 | 2.0478 | 0.1269 | 1.9209 | 4.4134 |
| | 14 | 19 | 6.55 | 177.70 | 480.53 | 2.1570 | 0.1313 | 2.0257 | 4.1956 |
| | 15 | 20 | 6.39 | 177.83 | 510.10 | 2.2897 | 0.1357 | 2.1540 | 4.0932 |
| | 16 | 21 | 1.36 | 178.02 | 554.89 | 2.4908 | 0.1401 | 2.3507 | 0.8712 |
| | 17 | 22 | 1.10 | 178.24 | 609.12 | 2.7342 | 0.1444 | 2.5898 | 0.7046 |
| | 18 | 23 | 1.27 | 178.29 | 621.79 | 2.7911 | 0.1488 | 2.6423 | 0.8135 |
| | 19 | 24 | 2.16 | 178.35 | 645.81 | 2.8989 | 0.1532 | 2.7457 | 1.3836 |
| | 20 | 25 | 2.43 | 178.28 | 627.38 | 2.8162 | 0.1576 | 2.6586 | 1.5566 |
| | 21 | 26 | 3.00 | 178.21 | 609.21 | 2.7346 | 0.1620 | 2.5727 | 1.9217 |
| | 22 | 27 | 1.36 | 178.13 | 588.78 | 2.6429 | 0.1664 | 2.4766 | 0.8712 |
| | 23 | 28 | 2.70 | 177.99 | 553.86 | 2.4862 | 0.1707 | 2.3154 | 1.7295 |
| | 24 | 29 | 1.95 | 177.87 | 524.78 | 2.3556 | 0.1751 | 2.1805 | 1.2491 |
| 9/12 | 1 | 30 | 1.00 | 177.78 | 503.48 | 2.2600 | 0.1795 | 2.0805 | 0.6406 |
| | 2 | 31 | 1.16 | 177.65 | 473.50 | 2.1254 | 0.1839 | 1.9416 | 0.7430 |
| | 3 | 32 | 0.65 | 177.60 | 462.21 | 2.0748 | 0.1883 | 1.8865 | 0.4164 |
| | 4 | 33 | 0.36 | 177.51 | 442.24 | 1.9851 | 0.1927 | 1.7925 | 0.2306 |
| | 5 | 34 | 1.10 | 177.39 | 416.29 | 1.8687 | 0.1970 | 1.6716 | 0.7046 |
| | 6 | 35 | 0.65 | 177.33 | 403.62 | 1.8117 | 0.2014 | 1.6103 | 0.4164 |
| | 7 | 36 | 1.19 | 177.27 | 391.13 | 1.7557 | 0.2058 | 1.5499 | 0.7623 |
| | 8 | 37 | 1.55 | 177.19 | 374.80 | 1.6824 | 0.2102 | 1.4722 | 0.9929 |
| | 9 | 38 | 0.95 | 177.12 | 360.79 | 1.6195 | 0.2146 | 1.4049 | 0.6085 |
| | 10 | 39 | 1.16 | 177.04 | 345.10 | 1.5491 | 0.2189 | 1.3301 | 0.7430 |
| | 11 | 40 | 1.36 | 177.00 | 337.39 | 1.5145 | 0.2233 | 1.2911 | 0.8712 |
| | 12 | 41 | 0.68 | 176.98 | 333.57 | 1.4973 | 0.2277 | 1.2696 | 0.4356 |
| | 13 | 42 | 1.00 | 176.94 | 325.99 | 1.4633 | 0.2321 | 1.2312 | 0.6406 |
| | 14 | 43 | 0.71 | 176.92 | 322.23 | 1.4464 | 0.2365 | 1.2099 | 0.4548 |
| | 15 | 44 | 0.65 | 176.86 | 311.09 | 1.3964 | 0.2409 | 1.1555 | 0.4164 |
| | 16 | 45 | 0.16 | 176.77 | 294.74 | 1.3230 | 0.2452 | 1.0778 | 0.1025 |
| | 17 | 46 | 0.00 | 176.74 | 289.39 | 1.2990 | 0.2496 | 1.0494 | 0.0000 |
| | 18 | 47 | 0.71 | 176.65 | 273.63 | 1.2283 | 0.2540 | 0.9743 | 0.4548 |
| | 19 | 48 | 0.00 | 176.67 | 277.10 | 1.2438 | 0.2584 | 0.9854 | 0.0000 |
| | 20 | 49 | 0.20 | 176.64 | 271.91 | 1.2205 | 0.2628 | 0.9578 | 0.1281 |
| | 21 | 50 | 0.00 | 176.60 | 265.07 | 1.1898 | 0.2672 | 0.9227 | 0.0000 |
| | 22 | 51 | 0.10 | 176.52 | 251.65 | 1.1296 | 0.2715 | 0.8580 | 0.0641 |
| | 23 | 52 | 0.07 | 176.56 | 258.31 | 1.1595 | 0.2759 | 0.8836 | 0.0448 |
| | 24 | 53 | 0.00 | 176.41 | 233.77 | 1.0493 | 0.2803 | 0.7690 | 0.0000 |

表-5(2) 直接流出高と有効雨量の算定

| | | | | | | | | | |
|------|----|----|------|--------|----------|----------|----------|--------|---------|
| 9/13 | 1 | 54 | 0.00 | 176.36 | 225.86 | 1.0138 | 0.2847 | 0.7291 | 0.0000 |
| | 2 | 55 | 0.00 | 176.35 | 224.29 | 1.0068 | 0.2891 | 0.7177 | 0.0000 |
| | 3 | 56 | 0.00 | 176.27 | 211.96 | 0.9514 | 0.2935 | 0.6580 | 0.0000 |
| | 4 | 57 | 0.00 | 176.21 | 202.94 | 0.9110 | 0.2978 | 0.6131 | 0.0000 |
| | 5 | 58 | 0.00 | 176.24 | 207.43 | 0.9311 | 0.3022 | 0.6289 | 0.0000 |
| | 6 | 59 | 0.00 | 176.17 | 197.04 | 0.8845 | 0.3066 | 0.5779 | 0.0000 |
| | 7 | 60 | 0.00 | 176.19 | 199.98 | 0.8977 | 0.3110 | 0.5867 | 0.0000 |
| | 8 | 61 | 0.00 | 176.21 | 202.94 | 0.9110 | 0.3154 | 0.5956 | 0.0000 |
| | 9 | 62 | 0.00 | 176.15 | 194.12 | 0.8714 | 0.3198 | 0.5516 | 0.0000 |
| | 10 | 63 | 0.00 | 176.17 | 197.04 | 0.8845 | 0.3241 | 0.5603 | 0.0000 |
| | 11 | 64 | 0.00 | 176.15 | 194.12 | 0.8714 | 0.3285 | 0.5428 | 0.0000 |
| | 12 | 65 | 0.00 | 176.12 | 189.78 | 0.8519 | 0.3329 | 0.5190 | 0.0000 |
| | 13 | 66 | 0.00 | 176.11 | 188.35 | 0.8454 | 0.3373 | 0.5082 | 0.0000 |
| | 14 | 67 | 0.00 | 176.04 | 178.45 | 0.8010 | 0.3417 | 0.4594 | 0.0000 |
| | 15 | 68 | 0.00 | 176.03 | 177.06 | 0.7948 | 0.3461 | 0.4487 | 0.0000 |
| | 16 | 69 | 0.00 | 175.99 | 171.55 | 0.7701 | 0.3504 | 0.4196 | 0.0000 |
| | 17 | 70 | 0.00 | 175.93 | 163.45 | 0.7337 | 0.3548 | 0.3789 | 0.0000 |
| | 18 | 71 | 0.00 | 175.92 | 162.12 | 0.7277 | 0.3592 | 0.3685 | 0.0000 |
| | 19 | 72 | 0.00 | 175.94 | 164.79 | 0.7397 | 0.3636 | 0.3761 | 0.0000 |
| | 20 | 73 | 0.00 | 175.88 | 156.84 | 0.7040 | 0.3680 | 0.3361 | 0.0000 |
| | 21 | 74 | 0.00 | 175.83 | 150.38 | 0.6750 | 0.3724 | 0.3027 | 0.0000 |
| | 22 | 75 | 0.00 | 175.87 | 155.54 | 0.6982 | 0.3767 | 0.3214 | 0.0000 |
| | 23 | 76 | 0.00 | 175.84 | 151.66 | 0.6808 | 0.3811 | 0.2996 | 0.0000 |
| | 24 | 77 | 0.00 | 175.79 | 145.30 | 0.6522 | 0.3855 | 0.2667 | 0.0000 |
| 9/14 | 1 | 78 | 0.00 | 175.85 | 152.95 | 0.6866 | 0.3899 | 0.2967 | 0.0000 |
| | 2 | 79 | 0.00 | 175.77 | 142.80 | 0.6410 | 0.3943 | 0.2467 | 0.0000 |
| | 3 | 80 | 0.00 | 175.76 | 141.55 | 0.6354 | 0.3987 | 0.2367 | 0.0000 |
| | 4 | 81 | 0.00 | 175.77 | 142.80 | 0.6410 | 0.4030 | 0.2379 | 0.0000 |
| | 5 | 82 | 0.00 | 175.70 | 134.20 | 0.6024 | 0.4074 | 0.1950 | 0.0000 |
| | 6 | 83 | 0.00 | 175.66 | 129.41 | 0.5809 | 0.4118 | 0.1691 | 0.0000 |
| | 7 | 84 | 0.00 | 175.67 | 130.60 | 0.5862 | 0.4162 | 0.1700 | 0.0000 |
| | 8 | 85 | 0.00 | 175.63 | 125.87 | 0.5650 | 0.4206 | 0.1444 | 0.0000 |
| | 9 | 86 | 0.00 | 175.62 | 124.70 | 0.5598 | 0.4250 | 0.1348 | 0.0000 |
| | 10 | 87 | 0.00 | 175.58 | 120.08 | 0.5390 | 0.4293 | 0.1097 | 0.0000 |
| | 11 | 88 | 0.00 | 175.50 | 111.11 | 0.4987 | 0.4337 | 0.0650 | 0.0000 |
| | 12 | 89 | 0.00 | 175.54 | 115.55 | 0.5187 | 0.4381 | 0.0806 | 0.0000 |
| | 13 | 90 | 0.00 | 175.50 | 111.11 | 0.4987 | 0.4425 | 0.0563 | 0.0000 |
| | 14 | 91 | 0.00 | 175.47 | 107.83 | 0.4840 | 0.4469 | 0.0372 | 0.0000 |
| | 15 | 92 | 0.00 | 175.44 | 104.61 | 0.4696 | 0.4513 | 0.0183 | 0.0000 |
| | 16 | 93 | 0.00 | 175.42 | 102.48 | 0.4600 | 0.4556 | 0.0044 | 0.0000 |
| | 17 | 94 | 0.00 | 175.42 | 102.48 | 0.4600 | 0.4600 | 0.0000 | 0.0000 |
| | 18 | | 0.00 | 175.41 | 101.43 | 0.4553 | | | |
| | 19 | | 0.00 | 175.38 | 98.30 | 0.4412 | | | |
| | 20 | | 0.00 | 175.37 | 97.27 | 0.4366 | | | |
| | 21 | | 0.00 | 175.35 | 95.22 | 0.4274 | | | |
| | 22 | | 0.00 | 175.33 | 93.19 | 0.4183 | | | |
| | 23 | | 0.00 | 175.30 | 90.20 | 0.4049 | | | |
| | 24 | | 0.00 | 175.29 | 89.21 | 0.4004 | | | |
| 9/15 | 1 | | | 175.28 | 88.23 | 0.3960 | | | |
| | 2 | | | 175.25 | 85.31 | 0.3829 | | | |
| | 3 | | | 175.22 | 82.44 | 0.3701 | | | |
| | 4 | | | 175.20 | 80.56 | 0.3616 | | | |
| | 5 | | | 175.20 | 80.56 | 0.3616 | | | |
| | 6 | | | 175.18 | 78.69 | 0.3532 | | | |
| | 7 | | | 175.19 | 79.62 | 0.3574 | | | |
| | 8 | | | 175.18 | 78.69 | 0.3532 | | | |
| | 9 | | | 175.15 | 75.94 | 0.3409 | | | |
| | 10 | | | 175.12 | 73.51 | 0.3300 | | | |
| | 11 | | | 175.10 | 71.46 | 0.3208 | | | |
| | 12 | | | 175.10 | 71.46 | 0.3208 | | | |
| | 13 | | | 175.09 | 70.58 | 0.3168 | | | |
| | 14 | | | 175.07 | 68.84 | 0.3090 | | | |
| | 15 | | | 175.06 | 67.98 | 0.3051 | | | |
| | 16 | | | 175.06 | 67.98 | 0.3051 | | | |
| | 17 | | | 175.04 | 66.27 | 0.2975 | | | |
| | 18 | | | 175.03 | 65.42 | 0.2937 | | | |
| | 19 | | | 174.98 | 61.27 | 0.2750 | | | |
| | 20 | | | 174.96 | 59.64 | 0.2677 | | | |
| | 21 | | | 174.96 | 59.64 | 0.2677 | | | |
| | 22 | | | 174.95 | 58.84 | 0.2641 | | | |
| | 23 | | | 174.95 | 58.84 | 0.2641 | | | |
| | 24 | | | 174.93 | 57.25 | 0.2570 | | | |
| | | | | 150.61 | 25323.40 | 27600.34 | 123.8918 | | 88.3647 |
| | | | | | | | | | 88.3647 |

初期損失雨量=12.66mm, 総雨量=137.95mm, 総直接流出高=88.3647mm, 流出率=0.6406

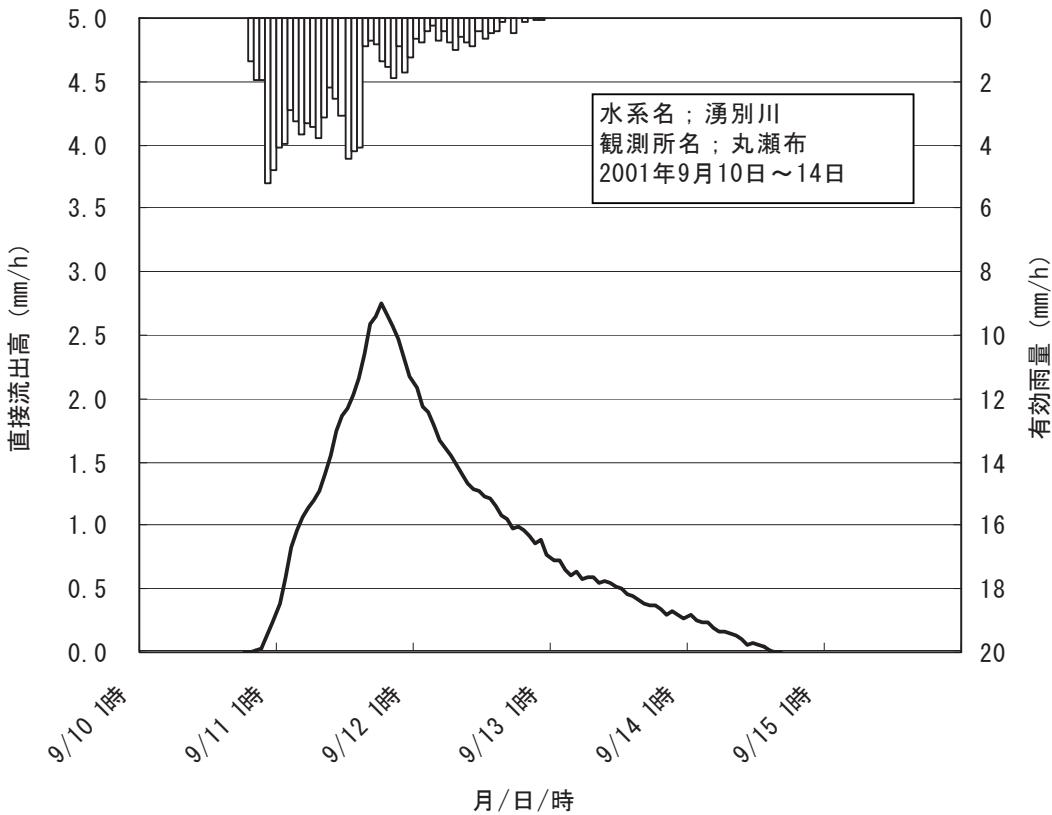


図-6 有効雨量と直接流出高（丸瀬布；平成13年）

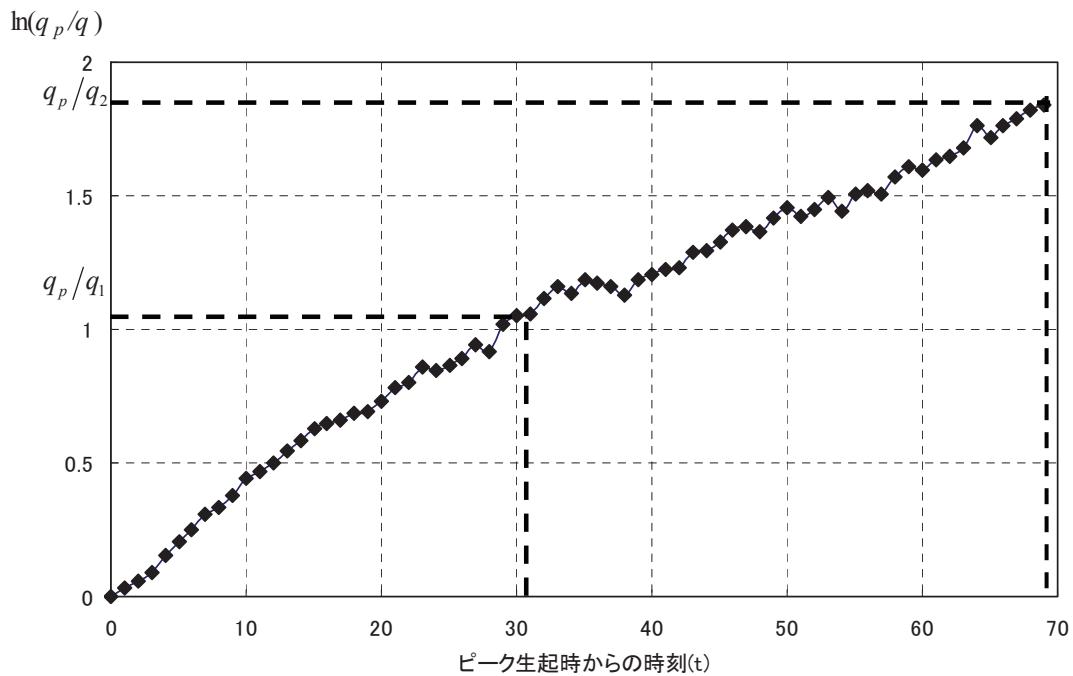


図-7 ハイドログラフ低減部の特性

5. 貯留高の算出

流出解析の代表的な手法の一つとして貯留関数法がある。この方法においては、貯留量と流量の関係式(貯留方程式)がもっとも重要となる。貯留関数法では以下の式が基礎となる。

$$\begin{cases} \text{連続式} & : \frac{ds}{dt} = r(t) - q(t) \\ \text{貯留方程式} & : s = f(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

s : 貯留高(mm), t : 時間(h), r : 有効雨量(mm/h), q : 直接流出高(mm/h), $f(\bullet)$: 関数すなわち、貯留関数法を用いた流出解析の成否は式(3.18)に示される貯留高と流出高の関係をいかに的確に表現するかにかかっている。

式(3.18)を差分表示すると次式が得られる。

$$\begin{cases} s(t+1) = s(t) + \left\{ r(t+1) \times \Delta t - \frac{q(t+1) + q(t)}{2} \times \Delta t \right\} \\ s(0) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

ここで、 Δt はサンプリング時間間隔である。

丸瀬布地点における直接流出高と有効雨量を用いて、式(3.19)によって貯留高を求める計算例が表-6に示されている。

表-7には全データを用いた貯留高の計算値が示されている。有効雨量と直接流出高の総量はともに等しいことから、最後の貯留高はゼロになることに注意すべきである。

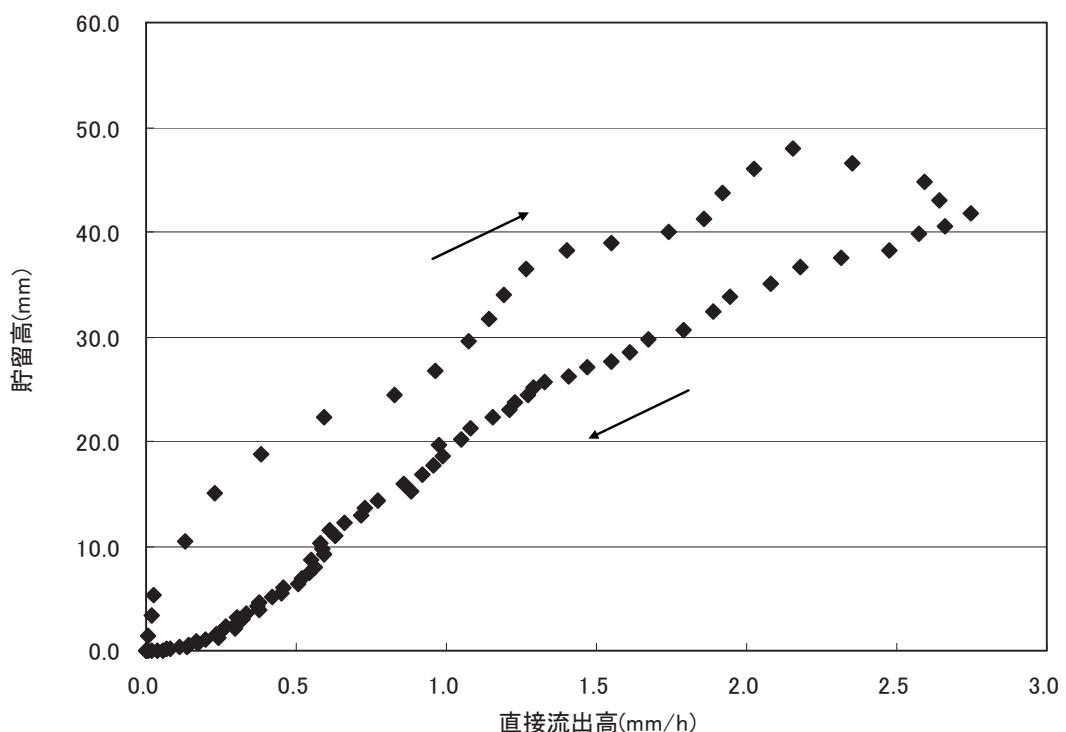
また、貯留高と直接流出高の関係については、それぞれ図-8と図-9(対数表示)に示すとおりである。

表-6 貯留高の計算例（丸瀬布；平成13年）

| 時 間 t_n (hr) | 直接流出高 q_n (mm/h) | 有効雨量 r_n (mm/h) | 貯留高 s_n (mm) $s_n = s_{n-1} + \left\{ r_n \cdot \Delta t - \frac{q_n + q_{n-1}}{2} \cdot \Delta t \right\}$ |
|-------------------|-----------------------|----------------------|---|
| $t_0 = 0$ | $q_0 = 0.0000$ | | $s_0 = 0.000$: 初期値, $\Delta t = t_n - t_{n-1} = 1(hr)$ |
| $t_1 = 1$ | $q_1 = 0.0034$ | $r_1 = 1.3580$ | $s_1 = s_0 + r_1 \times \Delta t - \frac{q_1 + q_0}{2} \times \Delta t$ $= 0.000 + 1.3580 \times 1 - \frac{0.0034 + 0.0000}{2} \times 1 = 1.3563$ |
| $t_2 = 2$ | $q_2 = 0.0164$ | $r_2 = 1.9537$ | $s_2 = 1.3563 + 1.9537 \times 1 - \frac{0.0164 + 0.0034}{2} \times 1 = 3.3001$ |
| $t_3 = 3$ | $q_3 = 0.0235$ | $r_3 = 1.9793$ | $s_3 = 3.3001 + 1.9793 \times 1 - \frac{0.0235 + 0.0164}{2} \times 1 = 5.2594$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| t_{94} | q_{94} | r_{94} | s_{94} |

表-7 貯留高と流出高の関係（丸瀬布；平成13年）

| 時間 <i>t</i> | 有効雨量 <i>r</i> | 直接流出量 <i>q</i> | 貯留高 <i>s</i> |
|----------------|------------------|-------------------|-----------------|
| 0 | | 0.0000 | 0.0000 |
| 1 | 1.3580 | 0.0034 | 1.3563 |
| 2 | 1.9537 | 0.0164 | 3.3001 |
| 3 | 1.9793 | 0.0235 | 5.2594 |
| 4 | 5.1885 | 0.1295 | 10.3714 |
| 5 | 4.8106 | 0.2301 | 15.0022 |
| 6 | 4.0867 | 0.3852 | 18.7813 |
| 7 | 3.9714 | 0.5908 | 22.2648 |
| 8 | 2.8825 | 0.8292 | 24.4373 |
| 9 | 3.2604 | 0.9603 | 26.8029 |
| 10 | 3.6960 | 1.0711 | 29.4832 |
| 11 | 3.3181 | 1.1417 | 31.6949 |
| 12 | 3.4462 | 1.1912 | 33.9746 |
| 13 | 3.7793 | 1.2659 | 36.5253 |
| 14 | 3.1131 | 1.4011 | 38.3049 |
| 15 | 2.1971 | 1.5520 | 39.0255 |
| 16 | 2.5622 | 1.7384 | 39.9425 |
| 17 | 3.0875 | 1.8573 | 41.2321 |
| 18 | 4.4134 | 1.9209 | 43.7565 |
| 19 | 4.1956 | 2.0257 | 45.9788 |
| 20 | 4.0932 | 2.1540 | 47.9821 |
| 21 | 0.8712 | 2.3507 | 46.6009 |
| 22 | 0.7046 | 2.5898 | 44.8352 |
| 23 | 0.8135 | 2.6423 | 43.0327 |
| 24 | 1.3836 | 2.7457 | 41.7223 |
| 25 | 1.5566 | 2.6586 | 40.5767 |
| 26 | 1.9217 | 2.5727 | 39.8828 |
| 27 | 0.8712 | 2.4766 | 38.2293 |
| 28 | 1.7295 | 2.3154 | 37.5628 |
| 29 | 1.2491 | 2.1805 | 36.5640 |
| 30 | 0.6406 | 2.0805 | 35.0740 |
| 31 | 0.7430 | 1.9416 | 33.8060 |
| 32 | 0.4164 | 1.8865 | 32.3084 |
| 33 | 0.2306 | 1.7925 | 30.6995 |
| 34 | 0.7046 | 1.6716 | 29.6720 |
| 35 | 0.4164 | 1.6103 | 28.4474 |
| 36 | 0.7623 | 1.5499 | 27.6296 |
| 37 | 0.9929 | 1.4722 | 27.1114 |
| 38 | 0.6085 | 1.4049 | 26.2813 |
| 39 | 0.7430 | 1.3301 | 25.6569 |
| 40 | 0.8712 | 1.2911 | 25.2174 |
| 41 | 0.4356 | 1.2696 | 24.3726 |
| 42 | 0.6406 | 1.2312 | 23.7628 |
| 43 | 0.4548 | 1.2099 | 22.9970 |
| 44 | 0.4164 | 1.1555 | 22.2306 |
| 45 | 0.1025 | 1.0778 | 21.2165 |
| 46 | 0.0000 | 1.0494 | 20.1529 |
| 47 | 0.4548 | 0.9743 | 19.5959 |
| 48 | 0.0000 | 0.9854 | 18.6160 |
| 49 | 0.1281 | 0.9578 | 17.7725 |
| 50 | 0.0000 | 0.9227 | 16.8323 |
| 51 | 0.0641 | 0.8580 | 16.0060 |
| 52 | 0.0448 | 0.8836 | 15.1800 |
| 53 | 0.0000 | 0.7690 | 14.3537 |
| 54 | 0.0000 | 0.7291 | 13.6047 |
| 55 | 0.0000 | 0.7177 | 12.8813 |
| 56 | 0.0000 | 0.6580 | 12.1934 |
| 57 | 0.0000 | 0.6131 | 11.5579 |
| 58 | 0.0000 | 0.6289 | 10.9369 |
| 59 | 0.0000 | 0.5779 | 10.3335 |
| 60 | 0.0000 | 0.5867 | 9.7513 |
| 61 | 0.0000 | 0.5956 | 9.1601 |
| 62 | 0.0000 | 0.5516 | 8.5865 |
| 63 | 0.0000 | 0.5603 | 8.0306 |
| 合計 | | 88.365 | 88.365 |

図-8 貯留高と直接流出高($s \sim q$)の関係

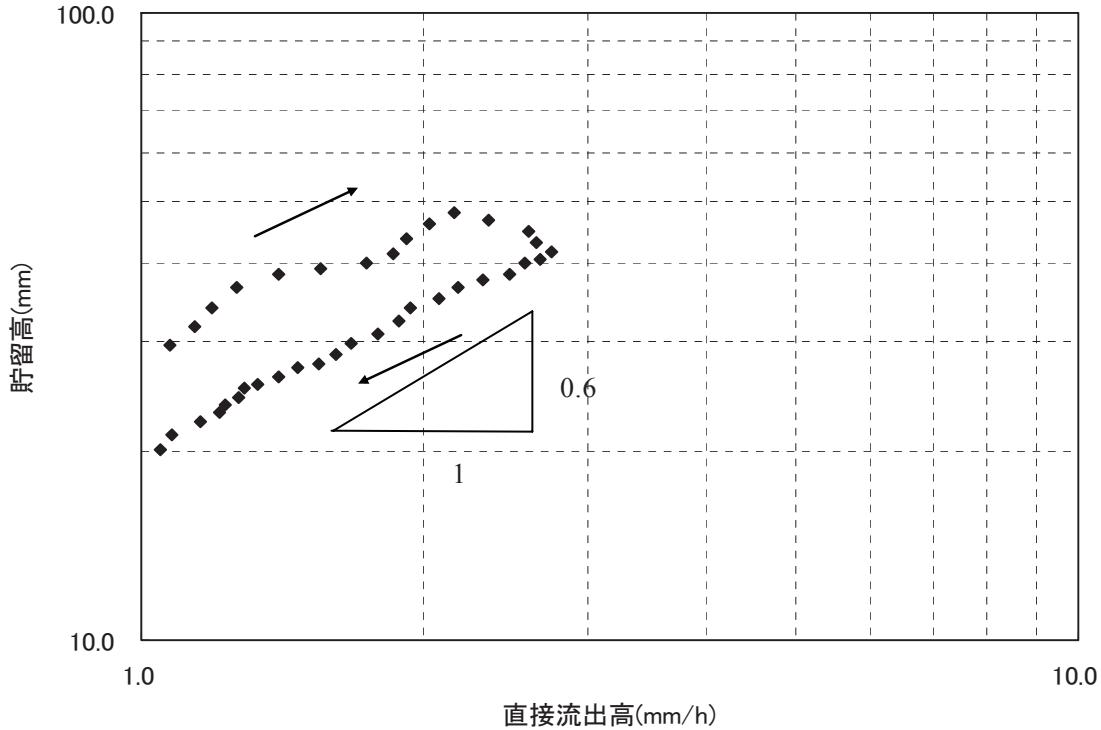
図-9 貯留高と直接流出高($s \sim q$)の関係(対数表示)

図-8と図-9を見ると、貯留高と流出高($s \sim q$)曲線は時計まわりのループを描いていることが分かる。したがって、前述したように、式(3.18)に示される $s = f(q)$ の関係式は、図-8ないし図-9に示される $s \sim q$ 曲線の二価性をできるだけ正確に表現できる関数形が望ましい。

なお、 $s \sim q$ 曲線の二価性を表現するためには、ハイドログラフの上昇部では $dq/dt > 0$ 、低減部では $dq/dt < 0$ となることを考慮して、 $s = f(q, dq/dt)$ の関数形を選択すればよいことがわかる。また、 $s \sim q$ 曲線の貯留方程式として、線形形式と非線形形式が考えられる。

以後の貯留関数法を用いた洪水解析では、次式に示す4個の貯留方程式について議論を進めることにする。

・ 線形方程式

(a) 一価関数 : $s = kq$ (k : 係数)

(b) 二価関数 : $s = k_1 q + k_2 \frac{dq}{dt}$ (k_1, k_2 : 係数)

・ 非線形方程式

(c) 一価関数 : $s = k_{11} q^{p_1}$ (k_{11}, p_1 : 係数)

(d) 二価関数 : $s = k_{11} q^{p_1} + k_{12} \frac{dq}{dt} (q^{p_2})$ (k_{11}, k_{12}, p_1, p_2 : 係数)

図-8に示したように、実現象の $s \sim q$ 曲線は一価関数で表現できないにしても、現象の本質や貯留関数法による流出解析を理解する上では、線形方程式の解法をはじめに手がけ、その後非線形方程式の解法に移行するのが得策である。

なお、 $s \sim q$ 曲線の非線形性を調べるためにには、図-9に示したように、 s と q を対数紙上にプロットして、その勾配が 1 に近いかどうかで判断可能である。すなわち、上記(c)項の貯留方程式で $\ln s$ と $\ln q$ の関係から勾配が p で与えられることになる。図-9 中の三角形で示したように、この解析事例では $p = 0.6$ に近い値が得られている。

文責 東海林 勉
佐藤 嘉昭

参考文献

- 1) 角屋 瞳ほか：講座 流出解析手法(その 1～15)，農業土木学会誌第 47 卷第 10 号～第 49 卷第 6 号，1979～1981.
- 2) 神田 徹・藤田睦博：新体系土木工学 26，水文学－確率論的手法とその応用－，土木学会編，275p.，技報堂出版，1983.
- 3) 永井明博・田中丸治哉・角屋 瞳：ダム管理の水文学，森北出版，146p.，2003.
- 4) 北海道開発局開発土木研究所・若手水文学研究会：現場のための水文学，98p.，1994.

第4回 流出解析ゼミ

— 貯留関数法による流出計算とその数値解法 —

「第3回ゼミ」では、実際に起きた洪水の観測資料から流出解析に用いるデータセット(直接流出高、有効雨量)を作成し、貯留高と流出高の関係を詳査した。ここでは、微分方程式の数値解法を解説し、一価の線形(非線形)貯留関数方程式及び二価の線形(非線形)貯留関数方程式を用いた4種類の洪水流出計算手法について述べる。

1. 微分方程式の数値解法

降雨～流出過程を含む物理現象は、次に示す微分方程式で表現されることが多い。ここでは、まず、1階微分方程式($n=1$)の解法、次いで n 階微分方程式の解法を解説する。 n 階微分方程式とは下記に示される常微分方程式である。

$$\frac{d^n y}{dt^n} = a_n \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-1} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \cdots + a_2 \frac{dy}{dt} + a_1 y + x \quad (4.1)$$

ここに、 n :微分方程式の階数、 t :時間、 $a_1 \sim a_n$:定数、 x :システム入力、 y :システム出力

1.1 1階微分方程式

$n=1$ の場合、上式は次のようになる。

$$\frac{dy}{dt} = ay + x \quad (4.2)$$

この方程式の解は、次のように与えられる。

$$y = e^{at} y_0 + e^{at} \int_0^t e^{a\tau} x(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

ここで y_0 は、 $y(t)$ の初期値である。

雨量観測値や流量観測値は、1時間や10分間隔といった離散値で与えられる。そこで、時刻 k の値 y_k から時刻 $k+1$ の解 y_{k+1} を求めるを考える。サンプリング間隔(あるいは計算時間間隔)を T とすると、式(4.3)の差分表示解 y_{k+1} は次式で与えられる。

$$y_{k+1} = e^{aT} y_k + e^{aT} \int_0^T e^{-a\tau} x_k d\tau = e^{aT} y_k + (e^{aT} - 1) a^{-1} x_k \quad (4.4)$$

あるいは、

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \phi y_k + \gamma x_k \\ \begin{cases} \phi = e^{aT} \\ \gamma = (e^{aT} - 1) a^{-1} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

すなわち、サンプリング間隔(あるいは計算時間間隔) T と微分方程式の係数 a が与えられると、係数 ϕ 、 γ が決定され、サンプリング間隔毎のシステム出力が得られる。式(4.5)の漸化式を適用することにより、次に示すようにサンプリング間隔ごとのシステム出力が計算できる。

$$\begin{cases} y_1 = \phi y_0 + \gamma x_0 \\ y_2 = \phi y_1 + \gamma x_1 \\ \vdots \\ y_{k+1} = \phi y_k + \gamma x_k \end{cases} \quad (4.6)$$

1.2 n 階微分方程式

n 階微分方程式の解法を示す前に、まず、2 階微分方程式の解法を示す。式(4.1)における $n=2$ の微分方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a_2 \frac{dy}{dt} + a_1 y + x \quad (4.7)$$

上式において、次のように変数変換を行う。

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (4.8)$$

上式の両辺を t について微分すると、

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = a_2 y_2 + a_1 y_1 + x \end{cases} \quad (4.9)$$

となり、次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

上記の手順に従って、式(4.1)の n 階微分方程式に拡張すると、次に示すように行列表示されることが分かる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

ここで、

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_m = \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} \quad (m=2,3,\dots,n) \end{cases} \quad (4.12)$$

式(4.11)は次のように行列表示される。

$$\frac{dy}{dt} = Ay + X \quad (4.13)$$

ここで、

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

上述したように、 n 階微分方程式も、式(4.2)と同じ形式で式(4.13)を用いて表すことができる。従つて、1 階微分方程式の解法で示した式(4.4)と式(4.5)を行列演算に拡張できれば、1 階微分方程式と同じ手順で n 階微分方程式の数値解が得られることになる。

スカラー量と行列の違いはあるものの、1 階微分方程式と同じ考え方で n 階微分方程式の解を差分漸化式で表すことができる。表-1 には 1 階微分方程式の解、表-2 には n 階微分方程式の解を整理して示す。

指数関数 e^{aT} をマクローリン展開すると、次のように級数和で表すことができる。

$$e^{aT} = 1 + aT + \frac{1}{2}(aT)^2 + \frac{1}{6}(aT)^3 + \frac{1}{24}(aT)^4 + \cdots + \frac{1}{m!}(aT)^m \quad (4.17)$$

表-1 1 階微分方程式解

| | | |
|---------------|---|--------|
| 方程式系 | $\frac{dy}{dt} = ay + x$ | 式(4.2) |
| 積分表示 | $y = e^{at}y_0 + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} x(\tau) d\tau$ | 式(4.3) |
| 差分表示 (係 数) | $y_{k+1} = \phi y_k + \gamma x_k$ $\phi = e^{aT}, \gamma = (e^{aT} - 1)a^{-1}$ | 式(4.5) |
| 変数説明 | y_0 : y の初期値 T : サンプリング時間間隔(計算時間間隔) | |

表-2 n 階微分方程式解

| | | |
|----------------|--|---------|
| 方程式系 | $\frac{d^n y}{dt^n} = a_n \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-1} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 y + x$ | 式(4.1) |
| ベクトル表示 | $\frac{dy}{dt} = Ay + x$ | 式(4.13) |
| 積分表示 | $y = e^{At} y_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} x(\tau) d\tau$ | 式(4.15) |
| 差分表示 (係数行列) | $y_{k+1} = \Phi y_k + \Gamma x_k$ $\Phi = e^{AT}, \Gamma = [e^{AT} - 1] A^{-1}$ | 式(4.16) |
| 変数説明 | y_0 : y の初期値 T : サンプリング時間間隔(計算時間間隔) y : $(n \times 1)$ 行列 A : $(n \times n)$ 行列 x : $(n \times 1)$ 行列 Φ : $(n \times n)$ 行列 Γ : $(n \times n)$ 行列 I : $(n \times n)$ の単位行列 A^{-1} : A の逆行列 | |

表-2 中に示される係数行列 e^{AT} は、上式の a を行列 A に置き換えればよいことが知られており、表-2 中の式(4.16)に示される係数行列 Φ と Γ は次式で計算される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \frac{1}{24} A^4 T^4 \dots \\ \Gamma = [e^{AT} - I] A^{-1} \\ = \left[I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \frac{1}{24} A^4 T^4 + \dots - I \right] A^{-1} \\ = T \left[I + \frac{1}{2} AT + \frac{1}{6} A^2 T^2 + \frac{1}{24} A^3 T^3 + \dots \right] \end{array} \right. \quad (4.18)$$

2. 一価の線形貯留方程式の数値解法

雨量と流出高の関係は連続方程式によって表されるが、貯留方程式は図-1 の貯留高と直接流出高の関係によって、以下のように分類される。

- ・線形方程式

一価関数: $s = kq$ (k : 定数)

二価関数: $s = k_1 q + k_2 \frac{dq}{dt}$ (k_1, k_2 : 定数)

・非線形方程式

一価関数 : $s = k_{11}q^{p_1}$ (k_{11}, p_1 : 定数)

二価関数 : $s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2})$ (k_{11}, k_{12}, p_1, p_2 : 定数)

最も簡単な一価の線形貯留関数法は、以下の式(4.19)と式(4.20)を用いる。

$$s = kq \quad (4.19)$$

$$\frac{ds}{dt} = r(t) - q(t) \quad (4.20)$$

ここに、 s ：貯留高(mm), k ：貯留係数, $q(t)$ ：直接流出高(mm/h), $r(t)$ ：有効雨量(mm/h), t ：時間(h)

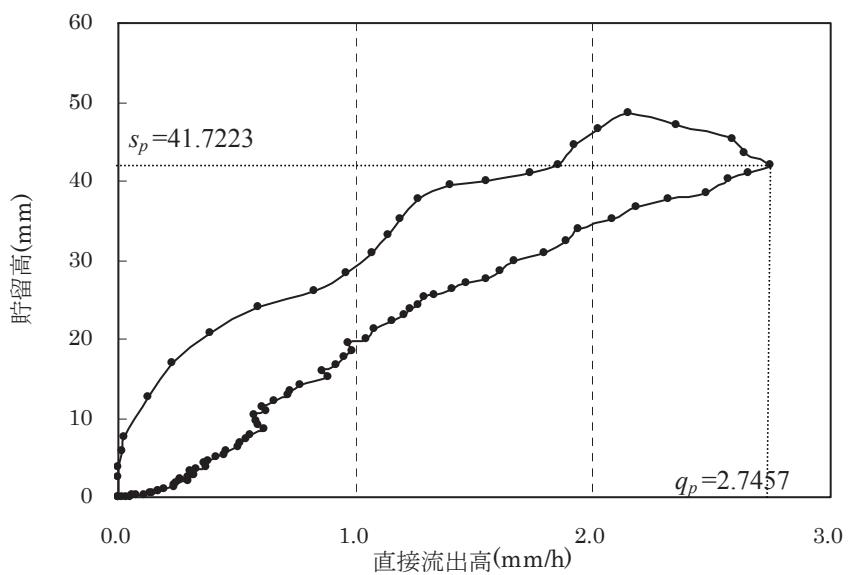


図-1 貯留高と直接流出高の関係
(平成13年9月洪水 湧別川丸瀬布観測所)

貯留係数 k を簡便に求める一例として、式(4.19)に従いピーク流出高 q_p とその際の貯留量 s_p を用いると、式(4.21)で与えられる。

$$k = \frac{s_p}{q_p} = \frac{41.7233}{2.7457} = 15.1955 \quad (4.21)$$

式(4.20)は式(4.21)によって次のように変形できる。

$$\frac{ds}{dt} = k \frac{dq}{dt} = r(t) - q(t)$$

上式は次のように整理される。

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{k}q(t) + \frac{1}{k}r(t) = aq(t) + d \quad (4.22)$$

ここで、 $a = -\frac{1}{k}$, $d = \frac{r(t)}{k}$ とする。

漸化式法による流出解析法(一価の線形貯留方程式)

各時間の直接流出高を漸化式で表すと次のようになる。

$$q_{i+1} = \phi q_i + \gamma d_i \quad (4.23)$$

$$\begin{cases} \phi = e^{aT} \\ \gamma = (\phi - 1)a^{-1} \end{cases}$$

ここに、 i ：離散時刻(タイム・ステップ), T ：計算時間間隔

$$\begin{cases} q_1 = \phi q_0 + \gamma d_0 & (q_0 = 0) \\ q_2 = \phi q_1 + \gamma d_1 \\ \vdots \\ q_i = \phi q_{i-1} + \gamma d_{i-1} \\ q_{i+1} = \phi q_i + \gamma d_i \end{cases} \quad (4.24)$$

ここで、 $d_i : r_{i+1}/k$ で与えられる降雨量の離散値

この漸化式に降雨量を入力することによって、各時刻の直接流出高を求めることができる。

文責 佐藤 嘉昭
東海林 勉

3. 二価の線形貯留方程式の数値解法

前項では一価の線形貯留関数法について述べてきたが、貯留高と直接流出高の関係が上昇期と下降期でループを描く場合は、一価の貯留方程式の適用には難点がある。そこで今回は二価の線形貯留関数方程式について考察を進める。

図-2 のように直接流出高と貯留高の関係が上昇期と下降期でループを描くような二価の線形貯留方程式は次のように表わされる。

$$s = k_1 q + k_2 \frac{dq}{dt} \quad (4.25)$$

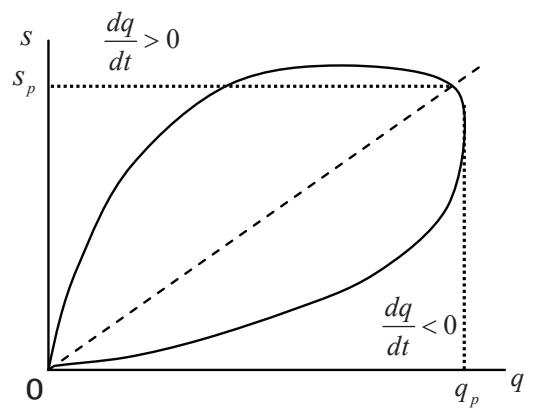


図-2 流出高と貯留高の二価関数

$$\frac{ds}{dt} = r - q \quad (4.26)$$

ここに、 s ：貯留高(mm), $k_1 \cdot k_2$ ：モデル定数, r ：有効雨量(mm/h), q ：直接流出高(mm/h)

k_1 は前述したとおり、ピーク時は $dq/dt = 0$ となることから、 $k_1 = s_p/q_p = 15.1955$ で求まり、未知定数は k_2 のみとなる。

k_2 の近似解を以下 の方法で求める。今、ピーク流量時を $t=0$ とすれば、ハイドログラフ低減部は次式で表現される。

$$q(t) = q_p \exp(-\lambda t) \quad (4.27)$$

ここに、 λ ：減衰係数, t ：ピーク時以降の時間

二価の線形貯留関数法は式(4.25)と式(4.26)から、式(4.28)で与えられる。

$$k_2 \frac{d^2q}{dt^2} + k_1 \frac{dq}{dt} + q = r \quad (4.28)$$

雨が降り止んだ後($r=0$)、 $q = q_p \exp(-\lambda t)$ を式(4.28)に代入すれば、次式が得られる。

$$(k_2 \lambda^2 - k_1 \lambda + 1)q_p \exp(-\lambda t) = 0 \quad (4.29)$$

すなわち、

$$k_2 = \frac{\lambda k_1 - 1}{\lambda^2} \quad (4.30)$$

従って、減衰係数 λ が既知であれば、 k_2 の近似解を得ることができる。雨が降り止んだ状態を想定すれば、 t は十分に大きな値を選択することが望ましい。一般的に、図-3のようにピーク時以降の直接流出高を半対数紙上にプロットすれば、第一折点と第二折点を見出すことができ、この2点を結ぶ直線から λ の値が推定される。

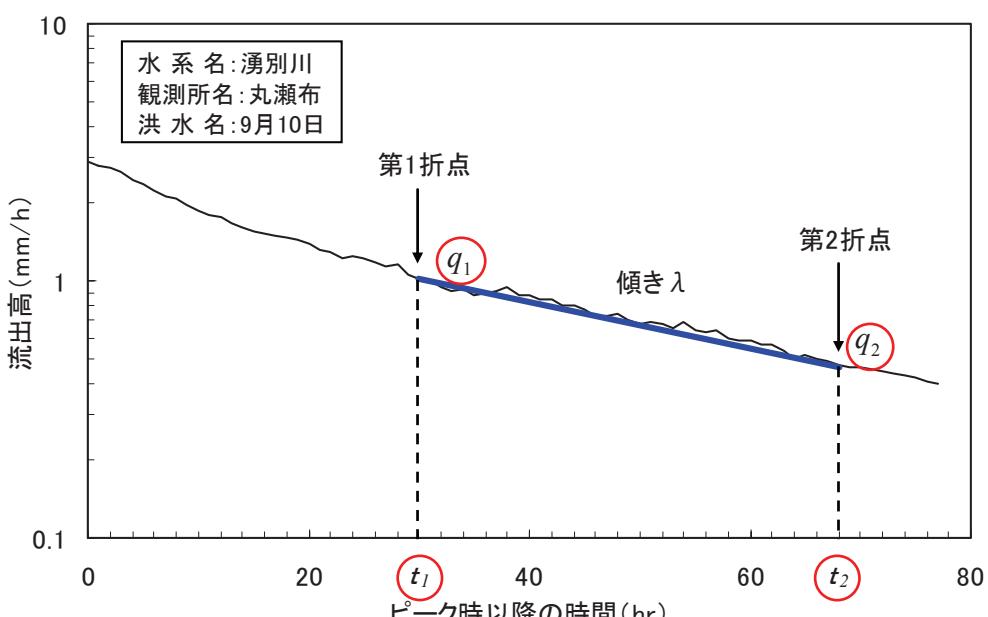


図-3 ハイドログラフの低減部

丸瀬布のデータでは、ピーク時以降の第一折点は $t_1=30$ で $q_1=0.7291$ が得られる。同様に、第二折点の近傍では $t_2 = 68$ で $q_2 = 0.0183$ が得られる。従って、 $q_1 = q_p \exp(-\lambda t_1)$ と $q_2 = q_p \exp(-\lambda t_2)$ より λ は次式で計算される。

$$\lambda = \frac{\ln(q_1/q_2)}{t_2 - t_1} = 0.0970 \quad (4.31)$$

$k_1 = 15.1955$ と $\lambda = 0.0970$ の値を式(4.30)に代入すれば、 $k_2 = 50.3734$ が得られる。これで未知定数は全て求まったので、次に二価の線形貯留方程式の解析法を示す。

漸化式法による流出解析法（二価の線形貯留方程式）

二価の貯留関数法の場合も一価の場合と同様に漸化式を用いて微分方程式を解くことができる。以下にその解析法を示す。

まず、式(4.25)を式(4.26)に代入すると、式(4.32)となる。

$$\frac{ds}{dt} = k_1 \frac{dq}{dt} + k_2 \frac{d^2q}{dt^2} = r - q \quad (4.32)$$

さらに整理して、式(4.33)に変形される。

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{k_1}{k_2} \frac{dq}{dt} - \frac{q}{k_2} + \frac{r}{k_2} \quad (4.33)$$

ここで、 $a_1 = -\frac{1}{k_2}$, $a_2 = -\frac{k_1}{k_2}$, $d_1 = \frac{r}{k_2}$ とおくと、式(4.33)は次式で整理される。

$$\frac{d^2q}{dt^2} = a_2 \frac{dq}{dt} + a_1 q + d_1 \quad (4.34)$$

式(4.34)について、次のように変数変換を行う。

$$\begin{cases} q_1 = q \\ q_2 = \frac{dq}{dt} \end{cases} \quad (4.35)$$

式(4.35)を t について微分すると式(4.36)となる。

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq}{dt} = q_2 \\ \frac{dq_2}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = a_2 q_2 + a_1 q_1 + d_1 \end{cases} \quad (4.36)$$

式(4.36)をマトリクス表示すると式(4.37)となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

ここで、 $Y = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix}$ と表示すると、次式が得られる。

$$\frac{dY}{dt} = AY + D \quad (4.38)$$

上式は、一価の貯留方程式と同形式で表現されていることがわかる。さらに、式(4.38)を差分表示すると式(4.39)が得られる。

$$Y_{k+1} = \Phi Y_k + \Gamma D_k \quad (4.39)$$

ここで、 $\Phi = \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}$ とおき、行列表示すると式(4.40)となる。

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix}_k \quad (4.40)$$

$$\text{初期条件: } (q_1)_0 = 0, (q_2)_0 = 0$$

式(4.40)の右辺の第2項 $\begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix}_k$ の1行目の値が0なので、式(4.40)は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi & \phi \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} (d_1)_k \quad (4.41)$$

ここで、 $(d_1)_k$ は r_{k+1}/k_2 で与えられる降雨量の離散量である。すなわち、 γ_1 と γ_3 の値は計算には不要ないことがわかる。

また、行列 Φ と Γ は前述のとおり、次式で計算される。

$$\Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2}A^2T^2 + \frac{1}{6}A^3T^3 + \frac{1}{24}A^4T^4 + \dots \quad (4.42)$$

ここに、 A : 行列($n \times n$)、 I : 単位行列、 T : 計算時間隔

同様に、 Γ は式(4.42)を用いて式(4.43)となる。

$$\begin{aligned}
\Gamma &= [\Phi - I] A^{-1} \\
&= \left[AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \frac{1}{24} A^4 T^4 + \dots \right] A^{-1} \\
&= \left[T + \frac{1}{2} AT^2 + \frac{1}{6} A^2 T^3 + \frac{1}{24} A^3 T^4 + \dots \right] \\
&= T \left[I + \frac{1}{2} AT + \frac{1}{6} A^2 T^2 + \frac{1}{24} A^3 T^3 + \dots \right]
\end{aligned} \tag{4.43}$$

計算時間間隔 T は、 $T \leq 1$ とする。これは T が 1 より大きくなると、項数が増えるにしたがい Φ と Γ の要素値が大きくなつて発散するからである。

また、 A^2 、 A^3 、 A^4 は以下の手順で計算される。

$$\begin{cases} A^2 = AA \\ A^3 = A^2 A \\ A^4 = A^3 A \end{cases} \tag{4.44}$$

$a_3 = a_1 + a_2^2$ とおくと、 A^2 は次式で与えられる。

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 a_2 & a_1 + a_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 a_2 & a_3 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

また、 $a_4 = a_1 + a_3$ とおくと、 A^3 、 A^4 は式(4.46)と式(4.47)で与えられる。

$$A^3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_3 \\ a_1 a_3 & a_1 a_2 + a_2 a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_4 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_3 & a_1 a_2 + a_2 a_3 \\ a_1 a_2 a_4 & a_1 a_3 + a_2^2 a_4 \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

行列 Φ と Γ の要素 $\phi \sim \phi_4$ 及び γ_2 、 γ_4 は、式(4.42)と式(4.43)に、式(4.45)と式(4.46)及び(4.47)を代入すれば、次式で整理されることが分かる。

$$\phi = 1 + \frac{1}{2} a_1 T^2 + \frac{1}{6} a_1 a_2 T^3 + \frac{1}{24} a_1 a_3 T^4 \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
\phi &= T + \frac{1}{2} a_2 T^2 + \frac{1}{6} a_3 T^3 + \frac{1}{24} a_2 a_4 T^4 \\
&= T \left[1 + \frac{1}{2} a_2 T + \frac{1}{6} a_3 T^2 + \frac{1}{24} a_2 a_4 T^3 \right]
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}\phi_3 &= a_1 T + \frac{1}{2} a_1 a_2 T^2 + \frac{1}{6} a_1 a_3 T^3 + \frac{1}{24} a_1 a_2 a_4 T^4 \\ &= a_1 T \left[1 + \frac{1}{2} a_2 T + \frac{1}{6} a_3 T^2 + \frac{1}{24} a_2 a_4 T^3 \right] = a_1 \phi_2 \gamma_2\end{aligned}\quad (4.50)$$

$$\phi_4 = 1 + a_2 T + \frac{1}{2} a_3 T^2 + \frac{1}{6} a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{24} (a_1 a_3 + a_2^2 a_4) T^4 \quad (4.51)$$

$$\gamma_2 = T \left[\frac{1}{2} T + \frac{1}{6} a_2 T^2 + \frac{1}{24} a_3 T^3 \right] = T^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} a_2 T + \frac{1}{24} a_3 T^2 \right] \quad (4.52)$$

$$\gamma_4 = T \left[1 + \frac{1}{2} a_2 T + \frac{1}{6} a_3 T^2 + \frac{1}{24} a_2 a_4 T^3 \right] = \phi_2 \quad (4.53)$$

式(4.41)を展開すると、 q_1 と q_2 は式(4.54)より二価の線形貯留方程式の解が求まる。

$$\begin{cases} (q_1)_{k+1} = \phi_1 (q_1)_k + \phi_2 (q_2)_k + \gamma_2 (d_1)_k \\ (q_2)_{k+1} = \phi_3 (q_1)_k + \phi_4 (q_2)_k + \gamma_4 (d_1)_k \end{cases} \quad (4.54)$$

文責 三田村 一弘
東海林 勉

4. 一価の非線形貯留方程式の数値解法

式(4.55)と式(4.56)は一価の非線形貯留方程式による貯留関数法であり、数値解法によって解かざるを得ない。

$$s = k_{11} q^{p_1} \quad (4.55)$$

$$\frac{ds}{dt} = r - q \quad (4.56)$$

ここに、 s : 貯留高(mm), k_{11} : 貯留係数, p_1 : 貯留指数, r : 有効雨量(mm/h), q : 流出高(mm/h)
数値解析の便宜上、次の変数変換を行う。

$$x = q^{p_1} \quad (4.57)$$

式(4.57)の関係式を用いると、式(4.55)は次のように変形される。

$$s = k_{11} x \quad (4.58)$$

式(4.58)を t に関して微分し、式(4.56)の連続式を用いると次式が得られる。

$$\frac{ds}{dt} = k_{11} \frac{dx}{dt} = r - x^{1/p_1} \quad (4.59)$$

式(4.59)の関係式から、次の非線形微分方程式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = -\frac{x^{1/p_1}}{k_{11}} + \frac{r}{k_{11}} \quad (4.60)$$

$f(x)$ を x^* (既知量)のまわりで1次の項までテーラー級数展開すると、次の線形微分方程式が得られる。

$$f(x) = f(x^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x - x^*) = f(x^*) + a(x - x^*) = ax + d \quad (4.61)$$

ここで、

$$\begin{cases} a = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{k_{11} p_1} (x^*)^{1/p_1 - 1} \\ d = f(x^*) - ax^* = \frac{1}{k_{11}} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) (x^*)^{1/p_1} + \frac{r}{k_{11}} \end{cases} \quad (4.62)$$

式(4.60)と式(4.61)より、次式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = ax + d \quad (4.63)$$

上式の線形微分方程式は、式(4.64)の差分漸化式で表される。すなわち、 $x^* = x_k$ の値を使って、 ϕ と γ を求めて、 x_{k+1} を計算する。

$$x_{k+1} = \phi_k x_k + \gamma_k d_k \quad (4.64)$$

$$\begin{cases} x_1 = \phi_0 x_0 + \gamma_0 d_0 \\ (a = 0, \quad d_0 = r_1/k_{11}, \quad x_0 = 0, \quad \phi_0 = 1, \quad \gamma_0 = T) \\ x_2 = \phi_1 x_1 + \gamma_1 d_1 \\ \vdots \\ x_k = \phi_{k-1} x_{k-1} + \gamma_{k-1} d_{k-1} \\ x_{k+1} = \phi_k x_k + \gamma_k d_k \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\phi_k = \exp(aT) = 1 + aT + \frac{1}{2}(aT)^2 + \frac{1}{6}(aT)^3 + \frac{1}{24}(aT)^4 \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= [\exp(aT) - 1] a^{-1} \\ &= T \left[1 + \frac{1}{2}(aT) + \frac{1}{6}(aT)^2 + \frac{1}{24}(aT)^3 \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

ここで、 k ：離散時刻(タイム・ステップ)、 T ：計算時間間隔

任意の離散時刻 k における直接流出高は、式(4.57)の逆変換により次式で求められる。

$$q_k = x_k^{1/p_1} \quad (4.68)$$

式(4.66)と式(4.67)に示される係数算定式は、一価の線形貯留関数法におけるそれと同一であることに注意すべきである。唯一の違いは、非線形貯留関数モデルにおいて、計算時間間隔 T ごとにこれらの係数が変化する点である。

式(4.64)の漸化式を用いれば、任意の離散時刻 $(k+1)$ における計算流出高 q を計算できる点で、計算機演算に最適な計算手法と言えよう。任意の計算ステップ $(k+1)$ における変数 q の値を、前の計算ステップ k の値から順次計算できることを意味する。

非線形方程式の線形化解法では、 x^* の決定方法が問題となる。式(4.64)によって x_{k+1} を計算しようとすれば、すでに x_k の値は既知であるから、実用的には $x^* = x_k$ とするのが自然であろう。すなわち、式(4.62)における a と d の係数を k ステップにおける x の計算値を用いて算定すればよい。この操作に伴い、変形数行列 ϕ_k と γ_k は計算時間間隔 T ごとに一定値をとる。

非線形微分方程式(4.60)の線形近似解法による精度は、計算時間間隔 T に依存する。すなわち、1 時間を 10 等分 ($T = 1/10$) するよりは、20 等分 ($T = 1/20$) した方が精度は向上する。しかしながら、流出計算時間は増大する。実用的には $T = 1/6$ (10 分間隔) で十分な計算精度が得られることが確認されている。

文責 東海林 勉

5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法

式(4.69)と式(4.70)は二価の非線形貯留方程式による貯留関数モデルであり、数値解法によって解かざるを得ない。

$$\begin{cases} s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (4.69)$$

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r - q \end{cases} \quad (4.70)$$

ここで、 s : 貯留高(mm), k_{11}, k_{12} : 貯留係数, p_1, p_2 : 貯留指数, r : 有効雨量(mm/h), q : 流出高(mm/h)

数値解析の便宜上、次の変数変換を行う。

$$\begin{cases} x_1 = q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (4.71)$$

上式を t について微分すると、式(4.72)になる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \frac{d}{dt}(q) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(q) \end{cases} \quad (4.72)$$

式(4.71)と式(4.72)の関係式を用いると、式(4.69)は次のように変形される。

$$s = k_{11} x_1^{p_1/p_2} + k_{12} x_2 \quad (4.73)$$

式(4.73)を t に関して微分し、式(4.70)の連続式を用いると次式が得られる。

$$\frac{ds}{dt} = k_{11} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \frac{dx_1}{dt} + k_{12} \frac{dx_2}{dt} = r - x_1^{1/p_2} \quad (4.74)$$

式(4.74)と式(4.72)の関係式から、次の非線形連立常微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (4.75)$$

直接流出量の計算にあたっては、式(4.76)の初期条件を設定する必要がある。

$$x_1|_{t=0} = x_2|_{t=0} = 0 \quad (4.76)$$

非線形常微分方程式の数値解法は種々ある。そのうち、ルンゲ・クッタ・ギル法は計算が速く、精度が高いので多用されている。本節では線形化による近似解法を試みる。式(4.75)をベクトル表示すると、式(4.77)が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (4.77)$$

ここで

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (4.79)$$

今、 $F(X)$ が十分になめらかな関数として、 $F(X)$ をあらかじめ既知な $X = X^*$ において 1 次の項までテーラー級数展開すると、式(4.80)が与えられる。

$$F(X) = F(X^*) + A(X^*)(X - X^*) \quad (4.80)$$

ここで、 $A(X^*)$ はヤコビアン行列で、次式で定義される。

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{X=X^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

式(4.81)の行列要素、 a_1 と a_2 は次式で与えられる。

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-2} (x_2^*) - \frac{1}{k_{12} p_2} (x_1^*)^{1/p_2-1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1} \end{cases} \quad (4.82)$$

式(4.77)の右辺 $F(X)$ に式(4.80)を代入すると、式(4.83)が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (4.83)$$

ここで

$$\begin{aligned} D(X^*) &= F(X^*) - A(X^*)X^* \\ &= \begin{bmatrix} f_1(x_1^*, x_2^*) \\ f_2(x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= f_2(x_1^*, x_2^*) - a_1 x_1^* - a_2 x_2^* \\ &= \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-1} (x_2^*) + \frac{1}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \end{aligned} \quad (4.85)$$

式(4.83)は線形微分方程式であるが、計算機を用いた計算にはなじまない。そこで、 $A(X^*)$ と $D(X^*)$ が定係数行列であるとき、その理論解は次式で表される差分方程式に変換できる。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (4.86)$$

ここで、 X_k は任意の計算時間ステップ k における X の値である。また、各変数行列の要素は次式で定義される。

$$X_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k, \quad D_k = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix}_k \quad (4.87)$$

なお、行列 Φ_k と Γ_k は次式によって計算される。

$$\begin{aligned}\Phi_k &= \exp(AT) = I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \frac{1}{24}(AT)^4 \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.88)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_k &= [\exp(AT) - I] A^{-1} \\ &= T \left[I + \frac{1}{2}(AT) + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 \right] \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.89)$$

式(4.88)と式(4.89)中の T は計算時間間隔であり、 I は (2×2) の単位行列である。また、 A は式(4.81)の行列である。

Φ_k と Γ_k の要素を計算するには、式(4.81)を用いて行列 A^2, A^3, A^4 の演算を行い、その結果を式(4.88)と式(4.89)に代入し整理した結果を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_1 = 1 + \frac{1}{2}a_1T^2 + \frac{1}{6}a_1a_2T^3 + \frac{1}{24}a_1a_3T^4 \\ \phi_2 = T(1 + \frac{1}{2}a_2T + \frac{1}{6}a_3T^2 + \frac{1}{24}a_2a_4T^3) \\ \phi_3 = a_1\phi_2 \\ \phi_4 = 1 + a_2T + \frac{1}{2}a_3T^2 + \frac{1}{6}a_2a_4T^3 + \frac{1}{24}(a_1a_3 + a_2^2a_4)T^4 \end{cases}\quad (4.90)$$

$$\begin{cases} \gamma_2 = T \left(\frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_2T^2 + \frac{1}{24}a_3T^3 \right) \\ \gamma_4 = \phi_2 \end{cases}\quad (4.91)$$

ここで、

$$a_3 = a_1 + a_2^2, \quad a_4 = a_1 + a_3 \quad (4.92)$$

式(4.90)～式(4.92)に示される係数算定式は、二価の線形貯留関数法におけるそれと同一であることに注意すべきである。唯一の違いは、非線形貯留関数モデルにおいて、これらの係数が計算時間間隔 T ごとに変化する点である。

なお、行列 Γ_k の要素のうち、 γ_2 と γ_4 のみが実際の計算に必要となる。その理由は、式(4.87)に示されるベクトル D_k の要素のうち、最初の要素がゼロだからである。上に求めた行列の要素を式(4.86)に代入すると、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} (d_1)_k \quad (4.93)$$

式(4.93)の行列を展開すると、次に示すようにさらに計算が容易になる。

$$\begin{cases} (x_1)_{k+1} = \phi_1(x_1)_k + \phi_2(x_2)_k + \gamma_2(d_1)_k \\ (x_2)_{k+1} = \phi_3(x_1)_k + \phi_4(x_2)_k + \gamma_4(d_1)_k \end{cases} \quad (4.94)$$

式(4.94)の漸化式を用いれば、任意の離散時刻 $(k+1)$ における $x_1 (= q^{p_2})$ と $x_2 (= d(q^{p_2})/dt)$ の値を計算できる点で計算機演算に最適な計算手法と言えよう。最後に任意の離散時刻 k における所要の流出高も式(4.71)の逆変換で次式より算出される。

$$q = x_1^{1/p_2} \quad (4.95)$$

式(4.94)は任意の計算ステップ $(k+1)$ における変数 x_1 と x_2 の値を、前の計算ステップ k の値から順次計算できることを意味する。すなわち、 $(k+1)$ ステップでの計算流出高 q は、 k ステップにおける勾配と曲率の影響を取り入れていることがわかる。この特性は、とくにハイドログラフのピーク近傍での流量予測に効果が現われると考えられる。

非線形方程式の線形化解法では、 X^* の決定方法が問題となる。式(4.86)によって X_{k+1} を計算しようとすれば、すでに X_k の値は既知であるから、実用的には $X^* = X_k$ とするのが自然であろう。すなわち、式(4.82)と式(4.85)における a_1, a_2 及び d_1 の係数を k ステップでの x_1 と x_2 の計算値を用いて算定すればよい。この操作に伴い、変形数行列 Φ_k と Γ_k は計算時間間隔 T ごとに一定値をとることになる。

非線形微分方程式(4.75)の線形近似解法による精度は、計算時間間隔 T に依存する。すなわち、1 時間を 10 等分 ($T = 1/10$) するよりは、20 等分 ($T = 1/20$) した方が精度は向上する。しかしながら、流出計算時間は増大する。実用的には $T = 1/6$ (10 分間隔) で十分な計算精度が得られることが確認されている。

式(4.69)に示される二価の非線形貯留方程式は、後述するように、Kinematic wave 法の解から導出された理論式である。したがって、モデル定数 k_{11}, k_{12}, p_1 及び p_2 は Kinematic wave 定数と物理的にも関連づけられる。今、マニング則による洪水流出現象を想定すれば、モデル定数は次式で表されることが知られている。

$$\begin{cases} k_{11} = 2.8235 f_c A^{0.24} \\ k_{12} = 0.2835 k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ f_c = (n / \sqrt{i})^{0.6} \end{cases} \quad (4.96)$$

ここで、 A : 流域面積(km^2)、 \bar{r} : 平均有効雨量強度(mm/h)、 n : 等価粗度($\text{s}/\text{m}^{1/3}$)、 i : 平均斜面勾配

式(4.96)に含まれる唯一の未知定数は、 $f_c = (n / \sqrt{i})^{0.6}$ の値であるが、対象流域での等価粗度と平均斜面勾配の代表値を決定することは容易ではない。一般に、山地河川流域を対象とする場合、 f_c 値のオーダーは 1~2 となることが知られている。

文責 東海林 勉

参考文献

- 1) Takahashi, Y., Rabins, Y.M. and Auslander, D.M. : Control and Dynamic Systems, Addison-Wesley Publishing Company, 800p., 1972.
- 2) 高橋安人：システムと制御，岩波書店，1974.
- 3) 戸川隼人：微分方程式の数値計算，オーム社，1981.
- 4) 星 清：やさしい微分方程式の数値解法，北海道開発局土木試験所月報，No. 395, pp. 29-38, 1986.
- 5) 岳 生・端野道夫：日降水時系列データを用いた日流出量の積率推定法とその検証，土木学会論文集 No. 533/ II-34, pp. 41-50, 1996.
- 6) 河川計画専門委員会計画論検討ワーキンググループ：高水計画における流出解析手法について—貯留関数法を中心として—，(社)建設コンサルタント協会，72p., 1999.

第5回 流出解析ゼミ

— 数学的最適化手法の基礎理論 —

「第4回ゼミ」では、4種類の貯留関数法を用いた流出計算法を紹介した。ここでは、流出モデル定数の数学的最適化手法に関する基礎概念を述べる。このとき、最適化に必要な一次微係数と二次微係数を解析的に算定する方法について詳述する。

本章では、次の3種類の最適化手法について検討を行う。

- (i) 一階ニュートン法(一次微係数利用)
- (ii) 二階ニュートン法(修正ベイリー法；一次微係数と二次微係数利用)
- (iii) ダビドン法(一次微係数と二次微係数利用)

1. 数学的最適化手法

実務レベルでの関心事として、次のような問題がしばしば起こる。すなわち、対象流域の洪水流出過程を、例えば貯留関数法で表現するとしよう。このとき、実績洪水資料(雨量・流量系列)を用いて、実測ハイドログラフに最も適合するようにモデル定数を推定することが必要となる。この推定法がシステム同定あるいはモデル定数の最適化といわれるものである。

モデル定数同定問題においても同定すべきモデル定数の個数が多くなると種々の問題に直面する。モデル定数の個数が1個の場合には、モデル定数の値を少しづつ動かしながら、実測出力波形に最も近くなるように試行錯誤的にモデル定数を同定することができよう。しかしながら、モデル定数の個数が多くなると試行錯誤的手法では用をなさなくなる。というのも、モデル定数値の動かし幅の組合せが指數関数的に増加し、繰返し回数も膨大なものとなるからである。また、モデル定数が相互に関連している場合には、各々のモデル定数を独立に動かしたのでは、真値に近づくという保障が得られなくなる。したがって、試行錯誤的要素を極力排除し、なんらかの客観的基準によってモデル定数の最適値同定を効率よく行おうとするのが数学的最適化手法である。

2. 目的関数

モデル定数の最適化とは、基本的には観測流量と計算流量の誤差ができるだけ小さくなるように定数を同定することを目的としている。このため、次式の目的関数を最小にすることを考える。

$$J(K) = \frac{1}{N} e^T(K) e(K) \quad (5.1)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e_m^2(K) \quad (5.2)$$

ここで、 $J(K)$ はモデル定数ベクトル K が規定されたときの目的関数、 K は($n \times 1$)のモデル定数ベクトル、 $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_i \ \dots \ k_n]^T$ 、 k_i は i 番目のモデル定数 ($i = 1, 2, \dots, n$)、 $e(K)$ は($N \times 1$)の誤差ベクトル、 $e^T(K)$ は $e(K)$ の転置ベクトル、 n はモデル定数の個数、 N は観測流量データ数である。

また、式(5.2)の誤差は、次式で定義される。

$$e_m = [q_m^* - q_m(K)] \quad (5.3)$$

ここで、 q_m^* は観測流量、 $q_m(K)$ はモデル定数が規定されたときの計算流量

3. 一階ニュートン法

極小点近傍の K を基準として、 $K + \Delta K$ の所での誤差ベクトル $e(K + \Delta K)$ を一次の項までテーラー級数展開すると次式が得られる。

$$e(K + \Delta K) = e(K) + \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) \Delta K \quad (5.4)$$

ここで、 $\partial e / \partial K$ は $(N \times n)$ の一次感度係数からなるヤコビアン行列、 ΔK は $(n \times 1)$ の補正項ベクトル、 e は $(N \times 1)$ の誤差項

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial K} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial k_1} & \frac{\partial e}{\partial k_2} & \dots & \frac{\partial e}{\partial k_n} \end{bmatrix} \\ \Delta K &= [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]^T \end{aligned} \quad (5.5)$$

式(5.2)と式(5.4)より、目的関数 $J(K + \Delta K)$ は次式で算定される。

$$\begin{aligned} J(K + \Delta K) &= e^T(K + \Delta K) e(K + \Delta K) \\ &= \left[e^T(K) + (\Delta K)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T \right] \left[e(K) + \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) (\Delta K) \right] \end{aligned}$$

上式を展開すると、次式が得られる。

$$J(K + \Delta K) = e^T(K) e(K) + 2(\Delta K)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T e(K) + (\Delta K)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) (\Delta K) \quad (5.6)$$

今、 $K + \Delta K$ で極小点になるようにするためには、次の条件が必要となる。

$$\frac{\partial J(K + \Delta K)}{\partial(\Delta K)} = 0 \quad (5.7)$$

すなわち、次式が成立する。

$$\frac{\partial J(K + \Delta K)}{\partial(\Delta K)} = \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T e(K) + \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) (\Delta K) = 0 \quad (5.8)$$

したがって、補正項ベクトル ΔK は次式で与えられる。

$$\Delta K = - \left[\left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T e(K) \right] \quad (5.9)$$

ここで、 $[(\partial e / \partial K)^T (\partial e / \partial K)]$ は $(n \times n)$ の対称行列、 $[(\partial e / \partial K)^T e(K)]$ は $(n \times 1)$ ベクトル、 A^{-1} は A の逆行列である。

この方法ではヤコビアン行列 $\partial e / \partial K$ が必要となる。すなわち、式(5.3)より次式を得る。

$$\frac{\partial e_m}{\partial k_i} = - \frac{\partial q_m}{\partial k_i} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (m=1,2,\dots,N) \quad (5.10)$$

式(5.10)の一次微係数(一次感度係数)を解析的に算出する方法は後述する。

式(5.9)において、次式を定義する。

$$\frac{\partial e}{\partial K} = X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$e(K) = Y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_N]^T \quad (5.12)$$

X の列ベクトルはモデル定数 $k_i (i=1,2,\dots,n)$ に関する一次微係数に相当する。また、 Y のベクトルは実測値と計算値との誤差を表している。行列 X と Y を用いて、式(5.9)を書き換えると、次式が得られる。

$$\Delta K = - [X^T X]^{-1} [X^T Y] \quad (5.13)$$

上式は、最小二乗法における線形回帰係数を求める式と同じであることがわかる。式(5.13)を解けば、補正ベクトル ΔK は原理的に求めることができるが、実際には次の問題が発生する。

- (i) X の列ベクトルの要素の値が極端に異なる場合には、それに伴って $[X^T X]$ の要素の大きさにアンバランスが生じて、逆行列の計算が困難となる場合がある。
- (ii) 回帰分析手法適用にあたっての原則として、説明変数 X 間の相関をなるべく小さくするように変数選択を行うことが望ましい。説明変数が統計的にお互いに独立であれば、各説明変数の変化量の従属変数に及ぼす影響は偏回帰係数 Δk_i の値によって評価できるからである。逆に X 間に高い相関がある場合には、 Δk_i に互いに相殺しあう作用が働き、偏回帰係数 Δk_i の意味づけが困難となる。現実問題として、どうしても高い相関を持つ X を選択しなければならないときには、無相関となるように変数変換を行う方策が必要となる。
- (iii) 式(5.13)においては、 $[X^T X]$ の逆行列計算が必要となるが、実用面では、この計算はかなり煩わしいものとなる。とくに、回帰モデルの次数 n が大きくなると、計算上の誤差に注意しなければならない。

上記3個の問題点を解決する手段として、以下に「成分回帰分析手法」を紹介する。

4. 成分回帰分析法

4.1 問題提起

線形回帰分析法は、従属変数 y の変動を説明変数 x_1, x_2, \dots, x_n によって一次式の関係式で表されると仮定し、未知定数 a_1, a_2, \dots, a_n を推定する手法である。線形回帰式を行列表示すれば、次式で定義される。

$$Y = XA \quad (5.14)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$Y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_N]^T \quad (5.16)$$

$$A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]^T \quad (5.17)$$

$Y : (N \times 1)$ の既知行列、 $X : (N \times n)$ の既知行列、 $A : (n \times 1)$ の未知行列、 N : 観測データ数、 n : 未知定数の個数

式(5.15)と式(5.16)の X と Y は、それぞれ式(5.11)と式(5.12)のそれらと同一な行列である。

線形最小2乗法基準による未知定数ベクトル A は、次の正規方程式を解けばよい。

$$A = [X^T X]^{-1} [X^T Y] \quad (5.18)$$

ここで、 $[X^T X]$ は $(n \times n)$ 行列、 $[X^T Y]$ は $(n \times 1)$ 行列である。また、 X^T は行列 X の転置行列を表す。

いま、 $[X^T X]$ と $[X^T Y]$ の要素をそれぞれ、 w_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) と s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) で表すと、これらの諸量は式(5.19)と式(5.20)で計算される。

$$w_{ij} = [X^T X] = \sum_{k=1}^N x_{ki} x_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.19)$$

$$s_i = [X^T Y] = \sum_{k=1}^N x_{ki} y_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.20)$$

4.2 データの規準化による手法

X の列のベクトルの要素のオーダーが異なる場合には、データを規準化することが一般的である。

w_{ij} の平方根の要素で与えられる対角行列 U を考えるとき、 U の要素 u_i は次式で表される。

$$u_i = (w_{ii})^{1/2} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (5.21)$$

対角行列 U^{-1} を X に作用させると、 X は次式によって規準化される。

$$X_* = XU^{-1} \quad (5.22)$$

式(5.22)より、

$$[X_*^T X_*] = U^{-1} [X^T X] U^{-1} \quad (5.23)$$

$[X_*^T X_*]$ の対角要素は 1 となる。

X の規準化データ X_* を用いたときの回帰ベクトルを A_* とすれば、回帰方程式は式(5.14)と同様に次式で定義される。

$$Y = X_* A_* = XU^{-1} A_* = X [U^{-1} A_*] \quad (5.24)$$

ここで、 A と A_* は以下のような関係が成立する。

$$A = U^{-1} A_* \quad (5.25)$$

U^{-1} はデータから容易に計算されるから、 A_* が推定されれば、 A は一義的に決定できる。式(5.24)の回帰係数ベクトル A_* も式(5.18)と同様に最小2乗法基準により、次式で推定される。

$$A_* = [X_*^T X_*]^{-1} [X_*^T Y] \quad (5.26)$$

4.3 コレスキー分解による手法

次に、コレスキー分解としてよく知られている三角化法を用いて、相関係数が高い変数 X_* を相関係数がゼロ（統計的には独立）となるように X_* を変数変換する手法を紹介する。コレスキー分解に関しては、「第1回ゼミ」を参照されたい。

さて、式(5.26)の $[X_*^T X_*]$ は $(n \times n)$ の対称行列であり、これを便宜上 P とする。すなわち、

$$P = [X_*^T X_*] \quad (5.27)$$

行列 P は、下三角行列 L とその転置行列である上三角行列 L^T に分解されることが知られている。

$$P = LL^T \quad (5.28)$$

ここで、

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad L^T = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

式(5.28)の分解は、下方三角コレスキーフィクタリゼーション(Lower Triangular Cholesky Factorization)と呼ばれている。対称行列 P が既知の場合の下三角行列 L を求めるプログラムを表-1に示す。 L^T は L の転置行列であるから容易に求まる。この L^T を用いて規準化変数行列 Z を以下のように変換する。

$$G = X_* [L^T]^{-1} \text{ または } X_* = G [L^T] \quad (5.30)$$

ここで、 G は $[g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_n]$ を要素とする $(N \times n)$ 行列である。

式(5.30)の新しい変数 G は重要な性質をもっている。

$$[G^T G] = L^{-1} [Z^T Z] [L^T]^{-1} = L^{-1} P [L^T]^{-1} \quad (5.31)$$

式(5.31)に式(5.28)を代入すると、

$$[G^T G] = L^{-1} L [L^T] [L^T]^{-1} = II = I \quad (5.32)$$

ここで、 I は $(n \times n)$ の単位行列である。

式(5.32)は、 G の列ベクトルが互いに独立になっていることを意味している。回帰分析においては説明変数間の相関をできるだけ小さくするよう変数選択をすることが望ましいが、次式に示すように、変数 G の各ベクトルは直交条件を満たしていることに注目したい。

$$\sum_{k=1}^N g_{ki} g_{kj} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.33)$$

式(5.30)を式(5.26)に代入すると次式が得られる。

$$A_* = P^{-1} [LG^T Y] = [L^T]^{-1} L^{-1} L [G^T Y] = [L^T]^{-1} [G^T Y] \quad (5.34)$$

式(5.34)中の $[G^T Y]$ は、互いに独立な変数 G と従属変数 Y との単相関係数に相当しており、 G の変化の Y に及ぼす影響を独立に評価できる利点がある。式(5.30)と式(5.34)の計算に当たっては、上三角行列 L^T の逆行列が必要である。ここで、上三角行列の逆行列を求めるプログラムを表-2に示す。なお、上三角行列 $U (= L^T)$ の逆行列 U^{-1} も上三角行列になることを念頭に入れておくとよい。式(5.34)によ

って係数ベクトル A_* が算定されれば、原回帰式(5.16)のベクトル A は式(5.25)により求まることになる。

表-1 $P = LL^T$ の下三角行列 L 計算法

```

DO 5 J=1, N-1
L(J, J)=SQRT(P(J, J))
AL=1./L(J, J)
DO 5 K=N, J+1, -1
L(K, J)=AL * P(K, J)
BE=L(K, J)
DO 5 I=K, N
5    P(I, K)=P(I, K)-L(I,J) * BE
L(N, N)=SQRT(P(N, N))

```

P: $(n \times n)$ の対称行列

L: $(n \times n)$ の下三角行列 (実数宣言しておく)

表-2 上三角行列 $U = L^T$ の逆行列計算法

```

UI(1, 1)=1./U(1, 1)
DO 20 J=2, N
UI(J, J)=1./U(J,J)
JM=J-1
DO 20 K=1, JM
S=0.0
DO 10 I=K, JM
10   S=S-UI(K, I) * U(I, J)
20   UI(K, J)=S * UI(J, J)

```

U: $(n \times n)$ の上三角行列

UI: U の逆行列で $(n \times n)$ の上三角行列

5. 二階ニュートン法

極小点近傍の K を基準として、 $K + \Delta K$ の所での誤差ベクトル $e(K + \Delta K)$ を二次の項までテーラー級数展開すると次式が得られる。

$$e(K + \Delta K) = e(K) + \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) \Delta K + \frac{1}{2} (\Delta K)^T \left(\frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right) (\Delta K) \quad (5.35)$$

ここに、 $\partial e / \partial K$ は $(1 \times n)$ の一次感度係数からなるヤコビアン行列、 $\partial^2 e / \partial K^2$ は $(n \times n)$ の二次感度係数からなるヘシアン行列、 ΔK は $(n \times 1)$ の補正項ベクトル、 e は (1×1) の誤差項

$$\frac{\partial e}{\partial K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial k_1} & \frac{\partial e}{\partial k_2} & \dots & \frac{\partial e}{\partial k_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e}{\partial k_1 \partial k_1} & \frac{\partial^2 e}{\partial k_1 \partial k_2} & \dots & \frac{\partial^2 e}{\partial k_1 \partial k_n} \\ \frac{\partial^2 e}{\partial k_2 \partial k_1} & \frac{\partial^2 e}{\partial k_2 \partial k_2} & \dots & \frac{\partial^2 e}{\partial k_2 \partial k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 e}{\partial k_n \partial k_1} & \frac{\partial^2 e}{\partial k_n \partial k_2} & \dots & \frac{\partial^2 e}{\partial k_n \partial k_n} \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

$$\Delta K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]^T$$

このとき、目的関数 $J(K + \Delta K)$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} J(K + \Delta K) &= \sum [e(K + \Delta K)]^2 \\ &= \sum \left[e^T(K) + (\Delta K)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T + \frac{1}{2} (\Delta K)^T \left(\frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right)^T (\Delta K) \right]^2 \end{aligned} \quad (5.37)$$

今、 $K + \Delta K$ で最小となるためには、次の条件が必要となる。

$$\frac{\partial J(K + \Delta K)}{\partial(\Delta K)} = 0 \quad (5.38)$$

すなわち、次式を ΔK に関して解かなければならない。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(K + \Delta K)}{\partial \Delta K} &= 2 \sum \left\{ \left[e(K) + \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) \Delta K + \frac{1}{2} (\Delta K)^T \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \Delta K \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[\left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T + \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \Delta K \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

上式において、式の煩雑さを避けるために Σ 記号を省略して表わすと次式のようになる。

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T e &= \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) (\Delta K) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T (\Delta K)^T \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} (\Delta K) + e \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} (\Delta K) \\ &\quad + \left\{ (\Delta K)^T \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right\}^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) (\Delta K) + \frac{1}{2} \left\{ (\Delta K)^T \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right\}^T \left\{ (\Delta K)^T \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right\} \Delta K \end{aligned} \quad (5.40)$$

式(5.40)を ΔK に関して整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T (\Delta K)^T \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} + e \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (\Delta K)^T \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right\}^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) + \frac{1}{2} \left\{ (\Delta K)^T \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right\}^T \left\{ (\Delta K)^T \frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right\} \right] \Delta K = - \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T e \end{aligned} \quad (5.41)$$

式(5.41)は一見複雑に見えるが、次式の新しい変量を定義すると、計算は容易に行うことが出来る。

$$S = (\Delta K)^T \left(\frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right) \quad (5.42)$$

ここで、 S は $(1 \times n)$ の行ベクトルである。

式(5.42)を用いると、式(5.41)は以下のように表される。

$$\left[\left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T \frac{\partial e}{\partial K} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T S + e \left(\frac{\partial^2 e}{\partial K^2} \right) + S^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) + \frac{1}{2} S^T S \right] \Delta K = - \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T e \quad (5.43)$$

式(5.41)は ΔK に関して非線形方程式であり、解析解を求めるることは困難である。

そこで、式(5.41)における [] 内の ΔK を一次微係数を用いた一階ニュートン法で代用することを考える。すなわち、式(5.9)を用いて、[] 内の ΔK を次式で計算する。

$$\Delta K = - \left[\left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T \left(\frac{\partial e}{\partial K} \right) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial e}{\partial K} \right)^T e \right] \quad (5.44)$$

ここで、 $[(\partial e / \partial K)^T (\partial e / \partial K)]^{-1}$ は $[(\partial e / \partial K)^T (\partial e / \partial K)]$ の逆行列である。

以下に計算手順を要約して述べる。

- (i) 式(5.44)で定義される ΔK を初期値として、式(5.42)中の ΔK にこの値を代入し、 S の要素を求める。
- (ii) 式(5.43)における [] 内の行列要素を求め、標本数 N について、その合計値を計算する。
- (iii) 式(5.43)を ΔK について解く。
- (iv) この新しい ΔK を用いて、式(5.42)と式(5.43)のベクトルと行列の要素を再計算し、 ΔK を求める。
- (v) 前回のステップ k での $(\Delta K)^k$ と今回のステップ $(k+1)$ での $(\Delta K)^{k+1}$ の差、すなわち $|(\Delta K)^{k+1} - (\Delta K)^k| < \varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-3} \sim 10^{-4}$) の収束条件を満たした時点でその ΔK を式(5.41)の解とみなし、定数ベクトルを $K + \Delta K$ にて更新する。
- (vi) 更新したモデル定数を用いて、流出計算を行う。誤差項 e 、一次微係数 $\partial e / \partial K$ 及び二次微係数 $\partial^2 e / \partial K^2$ を求め、(i) から (v) までの繰り返し計算を行い、目的関数が最小となった時点で最適値定数ベクトル K が得られたとする。

この方法は、「第2回ゼミ」で述べたように、Bailey 法(修正ニュートン法)として知られている。

6. ダビドン(Davidon)法

ダビドン法は目的関数 $J(K)$ がより小さくなる方向を探索する最大傾斜法(method of steepest descent)の原理に基づく。 $J(K)$ の極小値は等高線に直交する方向で勾配が最大となる。すなわち、勾配 $\text{grad-}J(K)$ の方向に ΔK をとって進めば極小点にたどりつくことができるはずである。しかしながら、実際には極小点近傍では $\text{grad-}J(K)$ の値が小さくなり、 ΔK の方向も不安定で真の極小点に近づかないことも予想される。そこで、 $J(K)$ の局面に二次形式を仮定して、共役方向を選びながら極小点を探そうとする考えがダビドン法である。

極小点近傍の K を基準として、 $K + \Delta K$ の所で $J(K)$ が極小値をとると仮定して、 $J(K + \Delta K)$ を二次の項までテーラー級数展開すると、次の二次形式を得る。

$$J(K + \Delta K) = J(K) + J_K(\Delta K) + \frac{1}{2} (\Delta K)^T (J_{KK})(\Delta K) \quad (5.45)$$

ここで、

$$g \equiv J_K = \left[\frac{\partial J}{\partial K} \right] = \left[\frac{\partial J}{\partial k_i} \right] \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (5.46)$$

$$G \equiv J_{KK} = \left[\frac{\partial^2 J}{\partial k_i \partial k_j} \right] \quad (i,j=1,2,\dots,n) \quad (5.47)$$

J_K は $(1 \times n)$ のヤコビアン行列、 J_{KK} は $(n \times n)$ のヘシアン行列、 ΔK は $(n \times 1)$ の補正ベクトル $J(K + \Delta K)$ で極小値をとるために、次式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial J(K + \Delta K)}{\partial (\Delta K)} = (g)^T + G \Delta K = 0 \quad (5.48)$$

よって、 ΔK は次式で表わされる。

$$\Delta K = -G^{-1}(g)^T \quad (5.49)$$

この方法では、まず G (ヘシアン行列) が正值定符号でなければならず、また逆行列 G^{-1} が必要となる。したがって、逆行列がわかりさえすれば、極小点を求めることができる。

式(5.2)の目的関数から、ベクトル g と行列 G の要素は次のように求められる。

$$\frac{\partial e_m}{\partial k_i} = -\frac{\partial q_m}{\partial k_i} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial^2 e_m}{\partial k_i \partial k_j} = -\frac{\partial^2 q_m}{\partial k_i \partial k_j} \quad (i,j=1,2,\dots,n) \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{\partial J}{\partial k_i} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N e_m \frac{\partial e_m}{\partial k_i} \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N [q_m^* - q_m(K)] \frac{\partial q_m}{\partial k_i} \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{\partial^2 J}{\partial k_i \partial k_j} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{\partial e_m}{\partial k_j} \frac{\partial e_m}{\partial k_i} + e_m \frac{\partial^2 e_m}{\partial k_i \partial k_j} \right\} \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ [q_m^* - q_m(K)] \frac{\partial^2 q_m}{\partial k_i \partial k_j} - \frac{\partial q_m}{\partial k_i} \frac{\partial q_m}{\partial k_j} \right\} \end{aligned} \quad (5.53)$$

7. モデル定数の規準化

同定すべきモデル定数の数が多くなるにつれて、最適化手法も複雑となることは容易に想像できる。モデル定数が相互に関連し合っている場合、探索回数が多くなることもよく知られている。最適化のもう一つの問題点は、モデル定数のオーダーの違いである。たとえば、タンクモデル定数では $1 \sim 10^{-5}$

のオーダーの開きがある。モデル定数のオーダーが極端に異なると、応答面が偏平化し、真値に近づかなかつたりするような困難が指摘されている。この問題点を克服する手段として、モデル定数をそれぞれある初期値で規準化する方法が考えられている。

今、同定すべきモデル定数を k_i とし、その初期値を c_i とすれば、基準化モデル定数 z_i は次式で与えられる。

$$z_i = k_i / c_i \quad (5.54)$$

この変数変換による誤差項 e と目的関数 J の z_i に関する微係数は次式で算定される。

$$\frac{\partial e_m}{\partial z_i} = \frac{\partial k_i}{\partial z_i} \frac{\partial e_m}{\partial k_i} = c_i \frac{\partial e_m}{\partial k_i} = -c_i \frac{\partial q_m}{\partial k_i} \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial^2 e_m}{\partial z_i \partial z_j} = -c_i \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{\partial q_m}{\partial k_i} \right) = -c_i \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\partial q_m}{\partial z_j} \right) = -c_i c_j \frac{\partial^2 q_m}{\partial k_i \partial k_j} \quad (5.56)$$

$$\sum_m e_m \left(\frac{\partial e_m}{\partial z_i} \right) = -c_i \sum_m [q_m - q_m(K)] \left(\frac{\partial q_m}{\partial k_i} \right) \quad (5.57)$$

$$\sum_m \left(\frac{\partial e_m}{\partial z_i} \right) \left(\frac{\partial e_m}{\partial z_j} \right) = c_i c_j \sum_m \left(\frac{\partial q_m}{\partial k_i} \right) \left(\frac{\partial q_m}{\partial k_j} \right) \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = \frac{\partial k_i}{\partial z_i} \frac{\partial J}{\partial k_i} = c_i \frac{\partial J}{\partial k_i} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial z_i \partial z_j} &= \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{\partial J}{\partial z_i} \right) = c_i \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\partial J}{\partial z_j} \right) \\ &= c_i \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\partial k_j}{\partial z_j} \frac{\partial J}{\partial k_j} \right) = c_i c_j \frac{\partial^2 J}{\partial k_i \partial k_j} \end{aligned} \quad (5.60)$$

8. 感度係数の算定

前述してきたように、3種類の数学的最適化手法の成否は、一次感度係数と二次感度係数をいかに効率よく算定するかに強く依存していることがわかる。以下に、一次感度係数と二次感度係数を解析的に算定する方法に関して解説する。

8.1 システム方程式

「第4回ゼミ」で述べたように、二価の線形貯留関数法と二価の非線形貯留関数法は、2元連立常微分方程式に変換できることが分かっている。ここでは、2元連立非線形微分方程式をシステム方程式の例として取り上げる。また、同定すべきモデル定数の個数が増えて、式の展開が容易に拡張でき

るよう、ここでは、モデル定数が3個の場合の最適化を示す。

以上の仮定を踏まえると、システム方程式は次式で表わされることになる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, k_1, k_2, k_3) \end{cases} \quad (5.61)$$

ここで、 x_1, x_2 は状態変量、 k_1, k_2, k_3 はモデル定数、 f_2 は線形ないし非線形関数

8.2 一次微係数の算定

式(5.61)をパラメータ k_1, k_2 及び k_3 について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_4 & , \quad \frac{du_2}{dt} = u_5 & , \quad \frac{du_3}{dt} = u_6 \\ \frac{du_4}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_4 + b_1 & , \quad \frac{du_5}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_5 + b_2 & , \quad \frac{du_6}{dt} = a_1 u_3 + a_2 u_6 + b_3 \end{cases} \quad (5.62)$$

上式を行列表示すると、次式となる。

$$\frac{dU}{dt} = A_1 U + B \quad (5.63)$$

ここで、

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & , \quad a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_1} & , \quad b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_2} & , \quad b_3 = \frac{\partial f_2}{\partial k_3} \end{cases} \quad (5.64)$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad , \quad U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial k_1 \\ \partial x_1 / \partial k_2 \\ \partial x_1 / \partial k_3 \end{bmatrix} \quad , \quad U_2 = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_2 / \partial k_1 \\ \partial x_2 / \partial k_2 \\ \partial x_2 / \partial k_3 \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{array} \right] \quad (5.66)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad , \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

式(5.65)を用い、式(5.63)を行列表示すると次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

式(5.67)を離散化表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \phi_3 I & \phi_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}_m \quad (5.68)$$

ここで、 I は (3×3) の単位行列である。

$$\begin{aligned} (U_1)_{m+1} &= \phi_1 (U_1)_m + \phi_2 (U_2)_m + \gamma_2 (B_2)_m \\ (U_2)_{m+1} &= \phi_3 (U_1)_m + \phi_4 (U_2)_m + \gamma_4 (B_2)_m \end{aligned} \quad (5.69)$$

式(5.68)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{cases} (u_1)_{m+1} = \phi_1 (u_1)_m + \phi_2 (u_4)_m + \gamma_2 (b_1)_m \\ (u_2)_{m+1} = \phi_1 (u_2)_m + \phi_2 (u_5)_m + \gamma_2 (b_2)_m \\ (u_3)_{m+1} = \phi_1 (u_3)_m + \phi_2 (u_5)_m + \gamma_2 (b_3)_m \\ (u_4)_{m+1} = \phi_3 (u_1)_m + \phi_4 (u_4)_m + \gamma_4 (b_1)_m \\ (u_5)_{m+1} = \phi_3 (u_2)_m + \phi_4 (u_5)_m + \gamma_4 (b_2)_m \\ (u_6)_{m+1} = \phi_3 (u_3)_m + \phi_4 (u_6)_m + \gamma_4 (b_3)_m \end{cases} \quad (5.70)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ は、「第4回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して容易に求めることができる。

8.3 二次微係数の算定

式(5.62)をパラメータ k_1, k_2 及び k_3 について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} &= w_{10}, & \frac{dw_2}{dt} &= w_{11}, & \frac{dw_3}{dt} &= w_{12} \\ \frac{dw_4}{dt} &= w_{13}, & \frac{dw_5}{dt} &= w_{14}, & \frac{dw_6}{dt} &= w_{15} \\ \frac{dw_7}{dt} &= w_{16}, & \frac{dw_8}{dt} &= w_{17}, & \frac{dw_9}{dt} &= w_{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dw_{10}}{dt} &= a_1 w_1 + a_2 w_{10} + v_{11} & \frac{dw_{11}}{dt} &= a_1 w_2 + a_2 w_{11} + v_{12} & \frac{dw_{12}}{dt} &= a_1 w_3 + a_2 w_{12} + v_{13} \\ \frac{dw_{13}}{dt} &= a_1 w_4 + a_2 w_{13} + v_{21} & \frac{dw_{14}}{dt} &= a_1 w_5 + a_2 w_{14} + v_{22} & \frac{dw_{15}}{dt} &= a_1 w_6 + a_2 w_{15} + v_{23} \\ \frac{dw_{16}}{dt} &= a_1 w_7 + a_2 w_{16} + v_{31} & \frac{dw_{17}}{dt} &= a_1 w_8 + a_2 w_{17} + v_{32} & \frac{dw_{18}}{dt} &= a_1 w_9 + a_2 w_{18} + v_{33}\end{aligned}\quad (5.71)$$

上式を行列表示すると、次式となる。

$$\frac{dW}{dt} = A_1 W + V \quad (5.72)$$

ここで、

$$\begin{aligned}W &= \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} , \quad W_1 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial k_1 & \partial u_1 / \partial k_2 & \partial u_1 / \partial k_3 \\ \partial u_2 / \partial k_1 & \partial u_2 / \partial k_2 & \partial u_2 / \partial k_3 \\ \partial u_3 / \partial k_1 & \partial u_3 / \partial k_2 & \partial u_3 / \partial k_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial^2 x_1 / \partial k_1^2 & \partial^2 x_1 / \partial k_1 \partial k_2 & \partial^2 x_1 / \partial k_1 \partial k_3 \\ \partial^2 x_1 / \partial k_2 \partial k_1 & \partial^2 x_1 / \partial k_2^2 & \partial^2 x_1 / \partial k_2 \partial k_3 \\ \partial^2 x_1 / \partial k_3 \partial k_1 & \partial^2 x_1 / \partial k_3 \partial k_2 & \partial^2 x_1 / \partial k_3^2 \end{bmatrix} \quad (5.73)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_2 &= \begin{bmatrix} w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{16} & w_{17} & w_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_4 / \partial k_1 & \partial u_4 / \partial k_2 & \partial u_4 / \partial k_3 \\ \partial u_5 / \partial k_1 & \partial u_5 / \partial k_2 & \partial u_5 / \partial k_3 \\ \partial u_6 / \partial k_1 & \partial u_6 / \partial k_2 & \partial u_6 / \partial k_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial^2 x_2 / \partial k_1^2 & \partial^2 x_2 / \partial k_1 \partial k_2 & \partial^2 x_2 / \partial k_1 \partial k_3 \\ \partial^2 x_2 / \partial k_2 \partial k_1 & \partial^2 x_2 / \partial k_2^2 & \partial^2 x_2 / \partial k_2 \partial k_3 \\ \partial^2 x_2 / \partial k_3 \partial k_1 & \partial^2 x_2 / \partial k_3 \partial k_2 & \partial^2 x_2 / \partial k_3^2 \end{bmatrix} \quad (5.74)\end{aligned}$$

W_1 と W_2 はともに (3×3) の二次微係数からなるヘシアン行列で、対称行列である。

$$\begin{cases} v_{11} = u_1 \frac{da_1}{dk_1} + u_4 \frac{da_2}{dk_1} + \frac{db_1}{dk_1}, v_{12} = u_1 \frac{da_1}{dk_2} + u_4 \frac{da_2}{dk_2} + \frac{db_1}{dk_2}, v_{13} = u_1 \frac{da_1}{dk_3} + u_4 \frac{da_2}{dk_3} + \frac{db_1}{dk_3} \\ v_{21} = u_2 \frac{da_1}{dk_1} + u_5 \frac{da_2}{dk_1} + \frac{db_2}{dk_1}, v_{22} = u_2 \frac{da_1}{dk_2} + u_5 \frac{da_2}{dk_2} + \frac{db_2}{dk_2}, v_{23} = u_2 \frac{da_1}{dk_3} + u_5 \frac{da_2}{dk_3} + \frac{db_2}{dk_3} \\ v_{31} = u_3 \frac{da_1}{dk_1} + u_6 \frac{da_2}{dk_1} + \frac{db_3}{dk_1}, v_{32} = u_3 \frac{da_1}{dk_2} + u_6 \frac{da_2}{dk_2} + \frac{db_3}{dk_2}, v_{33} = u_3 \frac{da_1}{dk_3} + u_6 \frac{da_2}{dk_3} + \frac{db_3}{dk_3} \end{cases} \quad (5.75)$$

変量 a_1, a_2, b_1, b_2 及び b_3 は式(5.64)で定義される。また、式(5.72)中の行列 A は式(5.66)で与えられる。

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

式(5.75)を行列表示すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} V_2 &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_4 \\ u_2 & u_5 \\ u_3 & u_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da_1/dk_1 & da_1/dk_2 & da_1/dk_3 \\ da_2/dk_1 & da_2/dk_2 & da_2/dk_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} db_1/dk_1 & db_1/dk_2 & db_1/dk_3 \\ db_2/dk_1 & db_2/dk_2 & db_2/dk_3 \\ db_3/dk_1 & db_3/dk_2 & db_3/dk_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.77)$$

ここで、 (3×1) である一次感度係数ベクトル U_1 と U_2 を次式に示す行列で置き換える。

$$U_* = [U_1 \ U_2] = \begin{bmatrix} u_1 & u_4 \\ u_2 & u_5 \\ u_3 & u_6 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

式(5.78)を用いると、式(5.77)は次式で与えられる。

$$V_2 = U_* \frac{dA}{dK} + \frac{dB}{dK} \quad (5.79)$$

ここで、式(5.77)に含まれる $da_1/dk_1 \sim da_2/dk_3$ の微係数は式(5.64)より、次式で計算される。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} da_1/dk_1 & da_1/dk_2 & da_1/dk_3 \\ da_2/dk_1 & da_2/dk_2 & da_2/dk_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_1 / \partial x_2 \\ \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_1 & \partial a_1 / \partial k_2 & \partial a_1 / \partial k_3 \\ \partial a_2 / \partial k_1 & \partial a_2 / \partial k_2 & \partial a_2 / \partial k_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.80)$$

すなわち、次のように行列表示される。

$$\frac{dA}{dK} = \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial A}{\partial K} \quad (5.81)$$

同様に、式(5.77)に含まれる $db_1/dk_1 \sim db_3/dk_3$ の微係数も式(5.64)より、次式で算定される。

$$\begin{bmatrix} db_1/dk_1 & db_1/dk_2 & db_1/dk_3 \\ db_2/dk_1 & db_2/dk_2 & db_2/dk_3 \\ db_3/dk_1 & db_3/dk_2 & db_3/dk_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_1 / \partial x_2 \\ \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_2 \\ \partial b_3 / \partial x_1 & \partial b_3 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_1 & \partial b_1 / \partial k_2 & \partial b_1 / \partial k_3 \\ \partial b_2 / \partial k_1 & \partial b_2 / \partial k_2 & \partial b_2 / \partial k_3 \\ \partial b_3 / \partial k_1 & \partial b_3 / \partial k_2 & \partial b_3 / \partial k_3 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

すなわち、式(5.83)が得られる。

$$\frac{dB}{dK} = \frac{\partial B}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (5.83)$$

したがって、式(5.79)は次式で表される。

$$V_2 = U_* \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \frac{\partial B}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (5.84)$$

ここで、 $\partial A / \partial X$, $\partial A / \partial K$, $\partial B / \partial X$ 及び $\partial B / \partial K$ の要素は以下のように表現される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_1 / \partial x_2 \\ \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial K} = \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_1 & \partial a_1 / \partial k_2 & \partial a_1 / \partial k_3 \\ \partial a_2 / \partial k_1 & \partial a_2 / \partial k_2 & \partial a_2 / \partial k_3 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial B}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_1 / \partial x_2 \\ \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_2 \\ \partial b_3 / \partial x_1 & \partial b_3 / \partial x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial B}{\partial K} = \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_1 & \partial b_1 / \partial k_2 & \partial b_1 / \partial k_3 \\ \partial b_2 / \partial k_1 & \partial b_2 / \partial k_2 & \partial b_2 / \partial k_3 \\ \partial b_3 / \partial k_1 & \partial b_3 / \partial k_2 & \partial b_3 / \partial k_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.85)$$

式(5.64)の関係式より、 $\partial A / \partial K$ と $\partial B / \partial X$ の間には、次の関係が成立していることがわかる。

$$\frac{\partial B}{\partial X} = \left(\frac{\partial A}{\partial K} \right)^T \quad (5.86)$$

また、式(5.85)の $\partial A / \partial X$ と $\partial B / \partial K$ は対称行列であることから、行列 V_2 も対称行列になることに注意すべきである。

式(5.86)を用いると、式(5.84)は次のように表される。

$$V_2 = U_* \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \left(U_* \left(\frac{\partial A}{\partial K} \right) \right)^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (5.87)$$

式(5.73)を用い、式(5.72)を行列表示すると次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = A_l \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

式(5.88)を離散化表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \phi_3 I & \phi_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_m \quad (5.89)$$

式(5.89)は以下のように要素展開できる。

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \\ \hline w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{16} & w_{17} & w_{18} \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 \\ \hline \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \\ \hline w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{16} & w_{17} & w_{18} \end{bmatrix}_m$$

$$+ \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 \\ \hline \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}_m \quad (5.90)$$

式(5.90)は以下に示すように、容易に計算されることを意味している。

$$\begin{aligned} (W_1)_{m+1} &= \phi_1 (W_1)_m + \phi_2 (W_2)_m + \gamma_2 (V_2)_m \\ (W_2)_{m+1} &= \phi_3 (W_1)_m + \phi_4 (W_2)_m + \gamma_4 (V_2)_m \end{aligned} \quad (5.91)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ は、「第4回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して容易に求めることができる。

8.4 感度方程式の特徴

以上、一次・二次感度係数を解析的に算定する手法について詳述してきたが、感度方程式の特性を要約して以下に示す。

- (i) システム方程式と感度方程式ともに一階連立微分方程式であることから、両方程式の次数は等しい。
- (ii) 元のシステム方程式が非線形方程式であっても、感度方程式は線形方程式になる。システム方程式を線形近似化した方程式をモデル定数で微分しても、同じ感度方程式が得られる。すなわち、システム方程式が線形、非線形であるかに関わらず、感度方程式は常に線形となる。
- (iii) 線形化システム方程式と感度方程式の係数行列を比較すると、その要素配列が同一である。感度方程式の係数行列は線形化システム方程式の係数行列と同じ要素から構成される対角行列になっている。すなわち、システム方程式が線形であれば、感度方程式とシステム方程式は構造上同一となる。したがって、感度方程式の解法にあたっては、システム方程式の解法に用いた

同じ係数を反復して使用することができる。このため、システム方程式の次数が高く、しかも同定すべきモデル定数が多くなっても、計算を容易に行うことができる。

- (iv) システム方程式の初期条件がモデル定数と独立ならば、感度方程式の初期条件はゼロとなる。

9. モデル定数最適化の目的関数と精度評価指標

種々の流出計算法によるモデル定数を同定するには、評価基準としての目的関数を設定しなければならない。当然のことながら、モデル定数の最適値も目的関数に依存して変化する。

最も理解しやすい目的関数は、本書でも採用している観測流量と計算流量の誤差二乗和平均を最小にする基準である。すなわち、次式で表される *MSE* (mean squares error) ができるだけ小さくなるように、ニュートン法を用いてモデル定数の最適値を探査している。

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (q_{oi} - q_{ci})^2 \quad (5.92)$$

ここで、 q_{oi} は観測流出高 [mm/h]、 q_{ci} は計算流出高 [mm/h]、 N : データ数

モデル定数の最適化にあたっては、式(5.92)以外にもカイ 2 乗基準として知られている次式の目的関数がしばしば用いられる。

$$KAI2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{q_{oi} - q_{ci}}{\sqrt{q_{oi}}} \right\}^2 \quad (5.93)$$

式(5.93)は統計学における適合度検定でよく用いられているカイ 2 乗基準に相当している。

式(5.92)と式(5.93)のどちらがよいかは一概に言えないが、式(5.92)は高水部(ピーク近傍)の適合度を重視した指標であり、式(5.93)はハイドログラフ全体の適合度に重きを置いた基準である。最適化過程においては、*MSE* (あるいは、式(5.95)に示される *RMSE*) の値と *KAI2* の値を併示したほうがよい。

流出モデルの差異による洪水解析結果を比較するために、下記の精度評価指標が併用される場合が多い。

ハイドログラフ相対誤差

$$J_{re} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|q_{oi} - q_{ci}|}{q_{oi}} \quad (5.94)$$

平均二乗誤差の平方根

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (q_{oi} - q_{ci})^2} \quad (5.95)$$

ピーク流出高に対する誤差指標

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_{oi} - q_{ci}}{q_{op}} \right)^2 \quad (5.96)$$

流出波形の誤差

$$E_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{q_{oi} - q_{ci}}{q_{oi}} \right)^2 \quad (5.97)$$

流出ボリューム誤差

$$E_v = \frac{\sum_{i=1}^N q_{oi} - \sum_{i=1}^N q_{ci}}{\sum_{i=1}^N q_{oi}} \quad (5.98)$$

ピーク流出高誤差

$$E_p = \frac{q_{op} - q_{cp}}{q_{op}} \quad (5.99)$$

ここで、 q_{oi} は観測流出高[mm/h]、 q_{ci} は計算流出高[mm/h]、 q_{op} は観測ピーク流出高[mm/h]、 q_{cp} は計算ピーク流出高[mm/h]、 N はデータ数

文責 星 清
仙庭 真司

参考文献

- 1) Fletcher, R. and Powell, M.J.D. : A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, The Computer Journal, Vol.6, pp.163-168, 1963.
- 2) Powell, M.J.D. : An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives, The Computer Journal, Vol.7, pp.155-162, 1964.
- 3) DeCoursey, D.G. and Snyder, W.M. : Computer-Oriented Method of Optimizing Hydrologic Model Parameters, Journal of Hydrology, Vol.9, pp.34-56, 1969.
- 4) Vemuri, V., Dracup, J.A., Erdmann, R.C. and Vemuri, N. : Sensitivity Analysis Method of System Identification and Its Potential in Hydrologic Research, Water Resources Research, 5(2), pp.341-349, 1969.
- 5) Labadie, J.W. and Dracup, J.A. : Optimal Identification of Lumped Watershed Models, Water Resources Research, 5(3), pp.583-590, 1969.
- 6) Gupta, V.K. and Sorooshian, S. : The Automatic Calibration of Conceptual Catchment Models Using Derivative-Based Optimization Algorithms, Water Resources Research, 21(4), pp.473-485, 1985.

- 7) Saga, H. and Hoshi, K. : Optimization Algorithm of Parameters in the Tank Model, Proc. 6th Int. Conf. on Hydraulic Engineering Software, Hydraulics 96, Penang, Malaysia, Sept. : Hydraulic Engineering Software VI, Ed. by Blain, W.R., Computational Mechanics Publications, pp.21-28, 1996.
- 8) 荻木俊秀・福島雅夫 : FORTRAN77 最適化プログラミング, 岩波書店, 494p., 1991.
- 9) 藤田 宏・今野 浩・田邊國士:岩波講座 応用数学 9[方法 7] 最適化法, 岩波書店, 156p., 1994.
- 10) 藤田 宏・今野 浩・田邊國士:岩波講座 応用数学 15[方法 7] 最適化法, 岩波書店, 170p., 1998.
- 11) 小林慎太郎・丸山利輔 : Powell の共役方向法によるタンクモデル定数の探索, 農業土木学会論文集 65, pp. 42-47, 1976.
- 12) 永井明博・角屋 瞳 : 流出モデル定数の最適化手法, 京都大学防災研究所年報, 第 22 号 B-2, pp. 209-224, 1979.
- 13) 永井明博・角屋 瞳 : タンクモデルの最適同定法に関する基礎的検討, 京都大学防災研究所年報, 第 23 号 B-2, pp. 239-247, 1980.
- 14) 角屋 瞳・永井明博 : 講座 流出解析手法(その 11), 農業土木学会誌第 48 卷第 11 号, 1980.
- 15) 角屋 瞳・永井明博 : 講座 流出解析手法(その 12), 農業土木学会誌第 48 卷第 12 号, 1980.
- 16) 星 清・山岡 熊 : 非線形流出系のパラメータ同定－感度解析と成分回帰分析の併用－, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 37 号, pp. 243-248, 1981.
- 17) 星 清 : やさしい数学的最適化手法, 北海道開発局土木試験所月報, No. 398, pp. 26-35, 1986.
- 18) 渡辺和好・館谷 清・松木賢治・星 清 : タンクモデル定数の最適化手法の改良, 第 33 回水理講演会論文集, pp. 55-60, 土木学会, 1989.
- 19) 田中丸治哉 : 遺伝的アルゴリズムによるタンクモデル定数の同定, 京都大学防災研究所年報, 第 36 号 B-2, pp. 231-239, 1993.
- 20) 田中丸治哉 : タンクモデル定数の大域的探索, 農業土木学会論文集 178, pp. 103-112, 1995.
- 21) 田中丸治哉 : 6.3 河川流出, 第 6 章 適用例, 土木工学における逆問題入門, 土木学会, 2000.
- 22) 田村孝廣・安藤義久 : 実数值 GA・MOCOM-UA による山地流域水循環モデルのパラメータ多目的最適化, 水文学・水資源学会誌, Vol. 16, No. 1, pp. 45-55, 2003.
- 23) 多田 肇・横尾善之・重村利幸 : タンクモデル定数の同定における安定性の導入, 土木学会論文集, No. 782/II-70, pp. 1-10, 2005.
- 24) 星 清・仙庭真司 : 一次及び二次導関数に基づく貯留関数法の最適化比較, 研究所紀要(XVI), (財)北海道河川防災研究センター研究所, pp. 301-355, 2005.

第6回 流出解析ゼミ

— 一価線形・非線形貯留関数法の最適化 —

「第5回ゼミ」では、モデル定数の最適化手法を紹介した。ここでは、最適化計算手法を一価線形・非線形貯留関数法へ適用し、その計算方法を具体的に紹介する。

1. 一階ニュートン法を用いた最適化計算(一次微係数利用)

モデル定数の最適同定の評価基準としては、観測流量 q^* と計算流量 q との誤差二乗和の最小化が用いられている。この目的関数は次のように表現される。

$$\underset{k}{\operatorname{Min}} J(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N [e_m(k)]^2 \quad (6.1)$$

$$e_m(k) = q_m^* - q_m(k) \quad (6.2)$$

ここで、 J は目的関数、 q_m^* は観測流量、 q_m は計算流量、 e_m は誤差、 N は流量データ数

すなわち、 q_m^* はサンプリング時刻 m における観測値、 $q_m(k)$ は同じくモデル定数 k が規定されたときの計算値である。したがって、 $e_m(k)$ は観測値と計算値の誤差になる。また、 N は観測値のデータ個数である。式を満足するように最適値を繰返し法によって探索するのが最適化手法の原理である。今、反復計算過程における次のステップのモデル定数の値は、現ステップでの値を k とすると、更新値は $k + \Delta k$ で表わされる。

現ステップでのモデル定数値はすでに既知となっているから、次のステップでの値を計算するためにはモデル定数の補正項、 Δk をいかに効率よく算定するかが最適化手法の主要課題となる。

式(6.2)において、次のステップでの誤差項 $e_m(k + \Delta k)$ をモデル定数 k の近傍で一次の項までテラ一級数展開すると、次式が得られる。

$$e_m(k + \Delta k) = e_m(k) + \frac{\partial e_m(k)}{\partial k} \Delta k \quad (6.3)$$

式(6.3)中のモデル定数 k に関する微係数は、式(6.2)から次のように計算される。

$$\frac{\partial e_m(k)}{\partial k} = -\frac{\partial q_m(k)}{\partial k} \quad (6.4)$$

$$u_m = \frac{\partial q_m(k)}{\partial k} \quad (6.5)$$

式(6.5)の u_m は一次感度係数である。式(6.5)を式(6.3)に代入すると次式が得られる。

$$e_m(k + \Delta k) = e_m(k) - u_m \Delta k \quad (m = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (6.6)$$

現ステップでのモデル定数は既知であるので、式(6.1)の評価基準は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \underset{\Delta k}{\operatorname{Min}} J(k + \Delta k) &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ e_m(k + \Delta k) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N [e_m(k) - u_m \Delta k]^2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

したがって、式(6.7)の最小化条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial J(k + \Delta k)}{\partial \Delta k} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N [e_m(k) - u_m \Delta k] [-u_m] = 0 \quad (6.8)$$

式(6.8)より、 Δk は次式で得られる。

$$\Delta k = \frac{\sum_{m=1}^N e_m u_m}{\sum_{m=1}^N u_m^2} \quad (6.9)$$

式(6.9)における Δk を算出できれば、 $k + \Delta k$ のモデル定数更新値を逐次算定することができる。式(6.9)は反復計算で何度も用いられる。

$k + \Delta k$ のモデル定数更新値を用いて式(6.1)が満足されるまで繰返し計算が続けられる。もし、モデル定数 k が真値に近づいているとすれば、補正項 Δk は繰返し回数が増すにつれて減少していくことが予想される。したがって、繰返し計算の終了時点を次の条件によってもよい。

$$\left| \frac{\Delta k}{k} \right| < \varepsilon \quad (6.10)$$

ここで、 ε は収束許容限界値(通常 $10^{-3} \sim 10^{-4}$)である。

2. 二階ニュートン法を用いた最適化計算(修正ベイリー法；一次・二次微係数利用)

二次微係数を用いた最適化計算を行なう。このため、誤差項を二次の項までテーラー級数展開すると、次式が得られる。

$$e_m(k + \Delta k) = e_m(k) + \left(\frac{\partial e_m(k)}{\partial k} \right) \Delta k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 e_m(k)}{\partial k^2} \right) (\Delta k)^2 \quad (6.11)$$

式(6.11)中のモデル定数 k に関する微係数は式(6.2)より、次式で計算される。

$$\frac{\partial e_m(k)}{\partial k} = -\frac{\partial q_m(k)}{\partial k} = -u_m \quad , \quad \frac{\partial^2 e_m(k)}{\partial k^2} = -\frac{\partial^2 q_m(k)}{\partial k^2} = -w_m \quad (6.12)$$

式(6.12)の変量を式(6.11)に代入すれば、次式が得られる。

$$e_m(k + \Delta k) = e_m(k) - u_m \Delta k - \frac{1}{2} w_m (\Delta k)^2 \quad (6.13)$$

現ステップでのモデル定数は既知であるので、式(6.1)の評価基準は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \underset{\Delta k}{\operatorname{Min}} J(k + \Delta k) &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N [e_m(k + \Delta k)]^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left[e_m(k) - u_m \Delta k - \frac{1}{2} w_m (\Delta k)^2 \right]^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

したがって、式(6.14)の最小化条件は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial J(k + \Delta k)}{\partial(\Delta k)} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left[e_m(k) - u_m \Delta k - \frac{1}{2} w_m (\Delta k)^2 \right] \left[-u_m - w_m (\Delta k) \right] = 0 \quad (6.15)$$

上式を展開すると、次式が得られる。

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^N w_m^2 (\Delta k)^3 + \frac{3}{2} \sum_{m=1}^N u_m w_m (\Delta k)^2 + \left(\sum_{m=1}^N u_m^2 - \sum_{m=1}^N e_m w_m \right) (\Delta k) - \sum_{m=1}^N e_m u_m = 0 \quad (6.16)$$

式(6.16)は、 Δk に関して三次方程式であり、 Δk の数値解を求めるために、一階ニュートン法を用いる。すなわち、式(6.9)を用いて、 Δk の初期値 Δk_0 を次式で計算する。

$$\Delta k_0 = \frac{\sum e_m u_m}{\sum u_m^2} \quad (6.17)$$

式(6.16)を用いて、次式の関数を定義する。

$$\begin{cases} f(\Delta k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N w_m^2 (\Delta k)^3 + \frac{3}{2} \sum_{m=1}^N u_m w_m (\Delta k)^2 + \left(\sum_{m=1}^N u_m^2 - \sum_{m=1}^N e_m w_m \right) (\Delta k) - \sum_{m=1}^N e_m u_m \\ f'(\Delta k) = \frac{\partial f(\Delta k)}{\partial(\Delta k)} = \frac{3}{2} \sum_{m=1}^N w_m^2 (\Delta k)^2 + 3 \sum_{m=1}^N u_m w_m (\Delta k) + \sum_{m=1}^N u_m^2 - \sum_{m=1}^N e_m w_m \end{cases} \quad (6.18)$$

式(6.18)を用い、 Δk の補正值 $\Delta(\Delta k)$ を次式で求める。

$$\Delta(\Delta k) = -\frac{f(\Delta k)}{f'(\Delta k)} \quad (6.19)$$

式(6.19)を用い、 Δk を $\Delta k = \Delta k + \Delta(\Delta k)$ にて更新する。

式(6.16)における繰返し計算の収束条件を次式で定義する。

$$|f(\Delta k)| < \varepsilon \quad (6.20)$$

ここで、 ε は収束許容限界値(通常 $10^{-3} \sim 10^{-4}$)である。

式(6.21)を満足した Δk を用いて、 k を $k + \Delta k$ にて更新し、繰り返し計算を行なう。繰り返し計算の収束条件を次式で判定する。

$$\left| \frac{\Delta k}{k} \right| < \varepsilon \quad (6.21)$$

ここで ε は収束許容限界値(通常 $10^{-3} \sim 10^{-4}$)である。

3. ダビドン法を用いた最適化計算

目的関数 $J(k + \Delta k)$ を二次の項までテーラー級数展開すると、次式で表わされる。

$$J(k + \Delta k) = J(k) + \left(\frac{\partial J(k)}{\partial k} \right) \Delta k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 J(k)}{\partial k^2} \right) (\Delta k)^2 \quad (6.22)$$

ここで次式を定義する。

$$g = \frac{\partial J(k)}{\partial k}, \quad G = \frac{\partial^2 J(k)}{\partial k^2} \quad (6.23)$$

式(6.22)を Δk で微分すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(k + \Delta k)}{\partial(\Delta k)} &= \left(\frac{\partial J(k)}{\partial k} \right) + \left(\frac{\partial^2 J(k)}{\partial k^2} \right) \Delta k \\ &= g + G\Delta k \end{aligned} \quad (6.24)$$

目的関数の最小化条件は次式で表される。

$$\frac{\partial J(k + \Delta k)}{\partial(\Delta k)} = 0 \quad (6.25)$$

式(6.25)より、式(6.24)は次式で表わされる。

$$g + G\Delta k = 0 \quad (6.26)$$

したがって、 Δk は次式で与えられる。

$$\Delta k = -G^{-1}g \quad (6.27)$$

ここで、目的関数の一次微係数 g は、次式で算定される。

$$g = \frac{\partial J(k)}{\partial k} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (q_m^* - q_m) \frac{\partial q_m}{\partial k} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N e_m u_m \quad (6.28)$$

同様に、目的関数の二次微係数 G も、次式で計算される。

$$\begin{aligned} G &= \frac{\partial^2 J(k)}{\partial k^2} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ (q_m^* - q_m) \frac{\partial^2 q_m}{\partial k^2} - \left(\frac{\partial q_m}{\partial k} \right)^2 \right\} \\ &= -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \{ e_m w_m - u_m^2 \} \end{aligned} \quad (6.29)$$

上述した3種類の最適化手法においては、一次微係数と二次微係数を必要とする。したがって、以下に一価の貯留関数法における一次・二次微係数を算定する方法を述べる。

4. 一価の線形貯留関数法

一価の線形貯留関数法による流出解析を行なう場合、次の二式を用いる。

$$\begin{cases} s = kq \\ \frac{ds}{dt} = r - q \end{cases} \quad (6.30)$$

ここで、 s は貯留高[mm]、 r は有効雨量[mm/h]、 q は流出高[mm/h]、 k はモデル定数
式(6.30)の貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\frac{dq}{dt} = f(q, k) = -\frac{1}{k}q + \frac{r}{k} \quad (6.31)$$

式(6.31)を線形近似した結果は「第4回ゼミ」における「2. 一価の線形貯留方程式の数値解法」より、次式で表される。

$$\frac{dq}{dt} = aq + d \quad (6.32)$$

ここで、

$$a = -\frac{1}{k}, \quad d = \frac{r}{k} \quad (6.33)$$

4.1 一次微係数の算定

最適化計算を行なうためには、式(6.5)で表わされる一次微係数を算定しなければならない。そこで、 q をモデル定数 k について微分すると、次式が得られる。

$$u = \frac{\partial q}{\partial k} \quad (6.34)$$

式(6.34)で表わされる一次微係数 $u = \partial q / \partial k$ を算定するためには、モデル定数 k が時間的に変化しないと仮定して、式(6.31)をモデル定数 k に関して微分すれば、一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q}{\partial k} \right) = -\frac{1}{k} \frac{\partial q}{\partial k} + b \quad (6.35)$$

ここで、

$$b = \frac{\partial f}{\partial k} = \frac{q}{k^2} - \frac{r}{k^2} \quad (6.36)$$

式(6.34)と式(6.36)を用いて、式(6.35)を整理すると次式が得られる。

$$\frac{du}{dt} = au + b \quad (6.37)$$

式(6.37)を離散化表示すると、次式となる。

$$u_{m+1} = \phi u_m + \gamma b_m \quad (6.38)$$

ϕ および γ の係数は「第4回ゼミ」における「2. 一価の線形貯留方程式の数値解法」で計算された係数と同じである。式(6.38)の漸化式を用いると、式(6.34)で表わされる任意の離散時刻 m における一次感度係数が解析的に算定されることになる。

式(6.38)における u の値が式(6.34)における q に関する一次感度係数に等しい。

4.2 二次微係数の算定

式(6.34)をモデル定数 k について微分すると、次式が得られる。

$$w = \frac{\partial^2 q}{\partial k^2} \quad (6.39)$$

式(6.39)で表わされる二次微係数 $\partial^2 q / \partial k^2$ を算定するためには、モデル定数 k が時間的に変化しないと仮定して、式(6.37)をモデル定数 k に関して微分すれば、二次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial k} \right) = a \frac{\partial u}{\partial k} + u \frac{\partial a}{\partial k} + \frac{db}{dk} \quad (6.40)$$

ここで、次の変数変換を行う。

$$w = \frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial^2 q}{\partial k^2} \quad (6.41)$$

さらに、次式を定義する。

$$v = u \frac{\partial a}{\partial k} + \frac{db}{dk} \quad (6.42)$$

式(6.41)と式(6.42)を用い、式(6.40)を整理すると、次式が得られる。

$$\frac{dw}{dt} = aw + v \quad (6.43)$$

ここで、 a は式(6.33)中の a と同じである。

式(6.42)における、微係数 db/dk は式(6.36)より、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{db}{dk} &= \frac{\partial b}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial k} + \frac{\partial b}{\partial k} \\ &= \frac{\partial b}{\partial q} u + \frac{\partial b}{\partial k} \end{aligned} \quad (6.44)$$

よって、式(6.42)は次式で表される。

$$v = u \frac{\partial a}{\partial k} + \frac{\partial b}{\partial q} u + \frac{\partial b}{\partial k} \quad (6.45)$$

ここで、 $\partial a/\partial k, \partial b/\partial q$ 及び $\partial b/\partial k$ は次式で計算される。

$$\frac{\partial a}{\partial k} = \frac{1}{k^2}, \quad \frac{\partial b}{\partial q} = \frac{1}{k^2}, \quad \frac{\partial b}{\partial k} = -\frac{2}{k^3}q + \frac{2}{k^3}r \quad (6.46)$$

式(6.46)より、次のことがわかる。

$$\frac{\partial a}{\partial k} = \frac{\partial b}{\partial q} \quad (6.47)$$

式(6.47)を用いると、式(6.45)は次のようになる。

$$v = 2u \frac{\partial a}{\partial k} + \frac{\partial b}{\partial k} \quad (6.48)$$

すなわち、 v は次式で計算される。

$$v = \frac{2}{k^2}u - \frac{2}{k^3}q + \frac{2}{k^3}r \quad (6.49)$$

式(6.43)を離散化表示すると、次式が得られる。

$$w_{m+1} = \phi w_m + \gamma v_m \quad (6.50)$$

ϕ および γ の係数は「第4回ゼミ」における「2. 一価の線形貯留方程式の数値解法」で計算された係数と同じである。

式(6.50)の漸化式を用いると、任意の離散時刻 m における二次感度係数が解析的に算定されることになる。

表-1 一価の線形貯留関数法における感度方程式の解法

| システム方程式 | 一次感度方程式 | 二次感度方程式 |
|--|--|---|
| $\begin{cases} s = kq \\ \frac{ds}{dt} = r - q \end{cases}$ $\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{k}q + \frac{r}{k}$ $\frac{d^2q}{dt^2} = aq + d$ $a = -\frac{1}{k}, d = \frac{r}{k}$ | $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial k}\right) = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right) + \frac{1}{k^2}u - \frac{2}{k^3}(q - r) + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial q}{\partial k}\right)$ $\frac{du}{dt} = au + b$ <p style="text-align: center;">ここで、</p> $u = \frac{\partial q}{\partial k}$ (一次感度係数), $a = -\frac{1}{k}$, $b = \frac{(q - r)}{k^2}$ <p style="text-align: center;">ここで、</p> $u_{m+1} = \phi u_m + \gamma b_m$ <p style="text-align: center;">ここで、</p> $\phi = e^{aT}, \gamma = (\phi - 1)a^{-1}$ $T: \text{計算時間間隔}$ $q_0 = 0$ (初期条件) | $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right) = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right) + \frac{1}{k^2}u - \frac{2}{k^3}(q - r) + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial q}{\partial k}\right)$ $\frac{dv}{dt} = aw + v$ <p style="text-align: center;">ここで、</p> $w = \frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial^2 q}{\partial k^2}$ (二次感度係数), $a = -\frac{1}{k}$, $v = \frac{2}{k^2}u - \frac{2}{k^3}(q - r)$ <p style="text-align: center;">ここで、</p> $w_{m+1} = \phi w_m + \gamma v_m$ <p style="text-align: center;">ここで、</p> $\phi = e^{aT}, \gamma = (\phi - 1)a^{-1}$ $v_m = \frac{2}{k^2}u_m - \frac{2}{k^3}(q_m - r_{m+1})$ $w_0 = 0$ (初期条件) |

式(6.38)における w を式(6.39)に代入すれば、 q に関する二次感度係数が計算される。

表-1 には一価の線形貯留関数法におけるシステム方程式、一次感度方程式及び二次感度方程式の解法が要約されている。

以上、一価の線形貯留関数法における一次及び二次の感度係数が算出されたので、(i)一階ニュートン法、(ii)二階ニュートン法、(iii)ダビドン法を用いた3種類の最適化手法が実行可能となる。

5. 一価の非線形貯留方程式の最適化計算

一価の非線形貯留関数法による流出解析を行なう場合、以下の二式を用いる。

$$\begin{cases} s = k_{11} q^{p_1} \\ \frac{ds}{dt} = r - q \end{cases} \quad (6.51)$$

ここで、 s は貯留高[mm]、 r は有効雨量[mm/h]、 q は流出高[mm/h]、 k_{11} 、 p_1 はモデル定数
式(6.51)の貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\frac{dx}{dt} = f(x, k_{11}) = -\frac{1}{k_{11}} x^{1/p_1} + \frac{r}{k_{11}} \quad (6.52)$$

式(6.52)を線形近似した結果は「第4回ゼミ」における「4. 一価の非線形貯留方程式の数値解法」より、
次式で表される。

$$\frac{dx}{dt} = ax + d \quad (6.53)$$

ここで、

$$\begin{cases} x = q^{p_1} \\ a = \frac{df}{dx} = -\frac{1}{k_{11} p_1} x^{1/p_1 - 1} \\ d = \frac{1}{k_{11}} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) x^{1/p_1} + \frac{r}{k_{11}} \end{cases} \quad (6.54)$$

5.1 一次微係数の算定

$q = x^{1/p_1}$ をモデル定数 k_{11} について微分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial q}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_1} x^{1/p_1 - 1} \frac{\partial x}{\partial k_{11}} \quad (6.55)$$

式(6.55)中的一次微係数、 $u = \partial x / \partial k_{11}$ を算定するためには、モデル定数 k_{11} が時間的に変化しないと仮定して、式(6.52)をモデル定数 k_{11} に関して微分すれば、一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial k_{11}} \right) = -\frac{1}{k_{11}} \frac{1}{p_1} x^{1/p_1 - 1} \frac{\partial x}{\partial k_{11}} + b \quad (6.56)$$

すなわち、 b は以下の式で与えられる。

$$b = \frac{\partial f}{\partial k_{11}} = \frac{1}{k_{11}^2} x_1^{1/p_1} - \frac{r}{k_{11}^2} \quad (6.57)$$

式(6.54)と式(6.57)を用い、式(6.56)を整理すると次式が得られる。

$$\frac{du}{dt} = au + b \quad (6.58)$$

式(6.58)を離散化表示すると、次式となる。

$$u_{m+1} = \phi u_m + \gamma b_m \quad (6.59)$$

ϕ および γ の係数は「第4回ゼミ」における「4. 一価の非線形貯留方程式の数値解法」で計算された係数と同じである。

式(6.59)の漸化式を用いると、任意の離散時刻 m における一次微係数が解析的に算定されたことになる。

式(6.59)の u の値を式(6.55)に代入すれば、 q に関する一次感度係数が計算される。

5.2 二次微係数の算定

式(6.55)をモデル定数 k_{11} について微分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}^2} = \frac{1}{p_1} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) x^{1/p_1 - 2} \left(\frac{\partial x}{\partial k_{11}} \right)^2 + \frac{1}{p_1} x^{1/p_1 - 1} \frac{\partial^2 x}{\partial k_{11}^2} \quad (6.60)$$

式(6.60)中の $\partial^2 x / \partial k_{11}^2$ を算定するためには、モデル定数 k_{11} が時間的に変化しないと仮定して、式(6.58)をモデル定数 k_{11} に関して微分すれば、二次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial k_{11}} \right) = a \frac{\partial u}{\partial k_{11}} + u \frac{da}{dk_{11}} + \frac{db}{dk_{11}} \quad (6.61)$$

ここで、次の変数変換を行なう。

$$w = \frac{\partial u}{\partial k_{11}} = \frac{\partial^2 x}{\partial k_{11}^2} \quad (6.62)$$

さらに、式(6.61)において次式を定義する。

$$v = u \frac{da}{dk_{11}} + \frac{db}{dk_{11}} \quad (6.63)$$

式(6.62)と式(6.63)を用い、式(6.61)を整理すると、次式が得られる。

$$\frac{dw}{dt} = aw + v \quad (6.64)$$

式(6.63)における微係数 da/dk_{11} は、式(6.54)より次式で計算される。

$$\frac{da}{dk_{11}} = \frac{\partial a}{\partial x} u + \frac{\partial a}{\partial k_{11}} \quad (6.65)$$

同様に、微係数 db/dk も、式(6.57)より次式で算定される。

$$\frac{db}{dk_{11}} = \frac{\partial b}{\partial x} u + \frac{\partial b}{\partial k_{11}} \quad (6.66)$$

よって、式(6.63)は、次式で表される。

$$v = u^2 \frac{\partial a}{\partial x} + u \frac{\partial a}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b}{\partial x} u + \frac{\partial b}{\partial k_{11}} \quad (6.67)$$

上式における、 $\partial a/\partial x, \partial a/\partial k_{11}, \partial b/\partial x$ 及び $\partial b/\partial k_{11}$ は次式で算定される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{1}{k_{11} p_1} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) x^{1/p_1 - 1} \\ \frac{\partial a}{\partial k_{11}} = \frac{1}{k_{11}^2 p_1} x^{1/p_1 - 1} \\ \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{k_{11}^2 p_1} x^{1/p_1 - 1} \\ \frac{\partial b}{\partial k_{11}} = -\frac{2}{k_{11}^3} (x^{1/p_1} - r) \end{array} \right. \quad (6.68)$$

式(6.68)より、次のことがわかる。

$$\frac{\partial a}{\partial k_{11}} = \frac{\partial b}{\partial x} \quad (6.69)$$

式(6.69)を用いると、式(6.67)は次のようになる。

表-2 一価の非線形貯留関数法における感度方程式の解法

| システム方程式 | 一次感度方程式 | 二次感度方程式 |
|---|--|--|
| $\begin{cases} s = k_{11}q^{p_1} \\ \frac{ds}{dt} = r - q \\ x = q^{p_1} \rightarrow q = x^{1/p_1} \end{cases}$ | $u = \frac{\partial x}{\partial k_{11}}$ $\frac{\partial q}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_1} x^{1/p_1-1} \frac{\partial x}{\partial k_{11}}$ $\frac{du}{dt} = au + b$ $a = -\frac{1}{k_{11}p_1} x^{1/p_1-1}$ $b = \frac{1}{k_{11}^2} \left[x^{1/p_1} - r \right]$ $d = \frac{1}{k_{11}} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) x^{1/p_1} + \frac{r}{k_{11}}$ | $w = \frac{\partial u}{\partial k_{11}} = \frac{\partial^2 x}{\partial k_{11}^2}$ $\frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}^2} = \frac{1}{p_1} x^{1/p_1-1} \frac{\partial^2 x}{\partial k_{11}^2} + \frac{1}{p_1} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) x^{1/p_1-2} \left(\frac{\partial x}{\partial k_{11}} \right)^2$ $\frac{dw}{dt} = aw + v$ $a = -\frac{1}{k_{11}p_1} x^{1/p_1-1}$ $v = \frac{2}{k_{11}^2 p_1} x^{1/p_1-1} u - \frac{1}{k_{11}p_1} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) x^{1/p_1-2} u^2$ $-\frac{2}{k_{11}^3} \left[x^{1/p_1} - r \right]$ $w_{m+1} = \phi w_m + \gamma v_m$ $\phi = e^{aT}, \quad \gamma = (e^{aT} - 1) a^{-1}$ $v_m = \frac{2}{k_{11}^2 p_1} (x_m)^{1/p_1-1} u_m - \frac{1}{k_{11}p_1} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) (x_m)^{1/p_1-2} u_m^2$ $-\frac{2}{k_{11}^3} \left[(x_m)^{1/p_1} - r_{m+1} \right]$ |

ここで、 $x_0 = 0$ (初期条件)、
 T :計算時間間隔

$$v = u^2 \frac{\partial a}{\partial x} + 2u \frac{\partial a}{\partial k_{11}} + \frac{\partial b}{\partial k_{11}} \quad (6.70)$$

すなわち、式(6.68)で計算された値を式(6.70)に代入すれば、 v は次式で計算される。

$$v = -\frac{1}{k_{11} p_1} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) x^{1/p_1 - 1} u^2 + \frac{2}{k_{11}^2 p_1} x^{1/p_1 - 1} u - \frac{2}{k_{11}^3} (x^{1/p_1} - r) \quad (6.71)$$

式(6.64)を離散化表示すると、次式が得られる。

$$w_{m+1} = \phi w_m + \gamma v_m \quad (6.72)$$

ここで、 ϕ および γ の係数は「第4回ゼミ」における「4. 一価の非線形貯留方程式の数値解法」で計算された係数と同じである。

式(6.72)の漸化式を用いると、任意の離散時刻 m における二次感度係数が解析的に算定されることになる。

表-2 には一価の非線形貯留関数法におけるシステム方程式、一次感度方程式及び二次感度方程式の解法が要約されている。

式(6.72)の w の値と式(6.59)の u の値を式(6.60)に代入すれば、 q に関する二次感度係数が計算される。

以上、一価の非線形貯留関数法における一次及び二次の感度係数が算出されたので、(i)一階ニュートン法、(ii)二階ニュートン法、(iii)ダビドン法を用いた3種類の最適化手法が実行可能となる。

文責 星 清
仙庭 真司

参考文献

- 1) 仙庭真司・星 清・橋本識秀：導関数に基づく最適化手法の比較、土木学会北海道支部論文報告集、第61号、CD-ROM 概要集、II-9、2005.
- 2) 仙庭真司・星 清・橋本識秀：一次及び二次感度方程式による最適化手法の比較、土木学会第60回年次学術講演会、CD-ROM 概要集、II-51、pp. 101-102、2005.
- 3) 星 清・仙庭真司：一次及び二次導関数に基づく貯留関数法の最適化比較、研究所紀要(XVI)、(財)北海道河川防災研究センター研究所、pp. 301-355、2005.

第7回 流出解析ゼミ

— 二価の線形・非線形貯留関数法の最適化 —

「第6回ゼミ」では、一価の貯留関数法の最適化計算を行った。ここでは、二価線形・非線形貯留関数法の最適化計算手法を紹介する。

1. 一階ニュートン法を用いた最適化計算(一次微係数利用)

モデル定数の最適同定の評価基準としては、観測流量 q^* と計算流量 q との誤差二乗和の最小化が用いられている。この目的関数は次のように表現される。

$$\underset{k_1, k_2}{\text{Min}} J(k_1, k_2) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N [e_m(k_1, k_2)]^2 \quad (7.1)$$

$$e_m(k_1, k_2) = q_m^* - q_m(k_1, k_2) \quad (7.2)$$

ここで、 J は目的関数、 q_m^* は観測流量、 q_m は計算流量、 e_m は誤差、 N は流量データ数
すなわち、 q_m^* はサンプリング時刻 m における観測値、 $q_m(k_1, k_2)$ は同じくモデル定数 k_1 と k_2 が規定されたときの計算値である。したがって、 $e_m(k_1, k_2)$ は観測値と計算値の誤差になる。また、 N は観測値のデータ個数である。式(7.1)を満足するように最適値 k_1 と k_2 を繰返し法によって探索するのが最適化手法の原理である。今、反復計算過程における次のステップでのモデル定数の値は、現ステップでの値を k_1 と k_2 とすると、更新値は次式で表わされる。

$$k_1 + \Delta k_1, \quad k_2 + \Delta k_2 \quad (7.3)$$

現ステップでのモデル定数値はすでに既知となっているから、次のステップでの値を計算するためにはモデル定数の補正項、 Δk_1 と Δk_2 をいかに効率よく算定するかが最適化手法の主要課題となる。

式(7.2)において、次のステップでの誤差項 $e_m(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)$ をモデル定数 k_1 と k_2 の近傍で一次の項までテーラー級数展開すると、次式が得られる。

$$e_m(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2) = e_m(k_1, k_2) + \frac{\partial e_m}{\partial k_1} \Delta k_1 + \frac{\partial e_m}{\partial k_2} \Delta k_2 \quad (7.4)$$

式(7.4)中のモデル定数 k_1 と k_2 に関する微係数は、式(7.2)から次のように計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial e_m}{\partial k_1} = -\frac{\partial q_m}{\partial k_1} = \frac{\partial q_m(k_1, k_2)}{\partial k_1} = -u_{1m} \\ \frac{\partial e_m}{\partial k_2} = -\frac{\partial q_m}{\partial k_2} = \frac{\partial q_m(k_1, k_2)}{\partial k_2} = -u_{2m} \end{cases} \quad (7.5)$$

$$u_{1m} = \frac{\partial q_m}{\partial k_1}, \quad u_{2m} = \frac{\partial q_m}{\partial k_2} \quad (7.6)$$

式(7.6)の u_{1m} と u_{2m} は一次感度係数である。式(7.6)を式(7.4)に代入すると次式が得られる。

$$e_m(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2) = e_m(k_1, k_2) - u_{1m} \Delta k_1 - u_{2m} \Delta k_2 \quad (m=1,2,3,\dots,N) \quad (7.7)$$

現ステップでのモデル定数は既知であるので、式(7.1)の評価基準は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \underset{\Delta k_1, \Delta k_2}{\text{Min}} J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2) &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \{e_m(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)\}^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \{e_m(k_1, k_2) - u_{1m} \Delta k_1 - u_{2m} \Delta k_2\}^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

したがって、式(7.8)の最小化条件は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial \Delta k_1} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N [e_m(k_1, k_2) - u_{1m} \Delta k_1 - u_{2m} \Delta k_2] [-u_{1m}] = 0 \\ \frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial \Delta k_2} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N [e_m(k_1, k_2) - u_{1m} \Delta k_1 - u_{2m} \Delta k_2] [-u_{2m}] = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

式(7.9)は次のように行列表示される。

$$\begin{bmatrix} [u_1^2] & [u_1 u_2] \\ [u_2 u_1] & [u_2^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e(k_1, k_2) u_1] \\ [e(k_1, k_2) u_2] \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

ここで、

$$\begin{cases} [u_i u_k] = \sum_{m=1}^N u_{mi} u_{mk} \quad (i, k = 1, 2) \\ [eu_i] = \sum_{m=1}^N e_m u_{mi} \quad (i = 1, 2) \end{cases} \quad (7.11)$$

式(7.10)を Δk_1 と Δk_2 について解けば、式(7.3)のモデル定数更新値を逐次算定することができる。式(7.10)の解法には、「第1回ゼミ」における「3. 三角化法(コレスキーフィルム)」や「第5回ゼミ」で述べた「4. 成分回帰分析法」が有効であり、とくに同定すべきモデル定数の個数が多くなると、この手法は威力を発揮する。

式(7.3)のモデル定数更新値を用いて、式(7.1)が満足されるまで繰返し計算が続けられる。もし、モデル定数 k_1 と k_2 が真値に近づいているとすれば、補正項 Δk_1 と Δk_2 は繰返し回数が増すにつれて減少していくことが予想される。したがって、繰返し計算の終了時点を次の条件によってもよい。

$$\left| \frac{\Delta k_1}{k_1} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\Delta k_2}{k_2} \right| < \varepsilon \quad (7.12)$$

ここで、 ε は収束許容限界値(通常 $10^{-3} \sim 10^{-4}$)である。

2. 二階ニュートン法を用いた最適化計算(修正ベイリー法；一次・二次微係数利用)

二次微係数を用いた最適化計算を行なう。このため、誤差項を二次の項までテーラー級数展開すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} e_m(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2) &= e_m + \frac{\partial e_m}{\partial k_1} \Delta k_1 + \frac{\partial e_m}{\partial k_2} \Delta k_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 e_m}{\partial k_1^2} (\Delta k_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 e_m}{\partial k_1 \partial k_2} \Delta k_1 \Delta k_2 + \frac{\partial^2 e_m}{\partial k_2^2} (\Delta k_2)^2 \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

ここで、 e_m は $e_m(k_1, k_2)$ を意味する。式(7.13)中のモデル定数 k_1 と k_2 に関する微係数は式(7.5)より、次式で計算される。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^* = \frac{\partial e}{\partial k_1} = -\frac{\partial q}{\partial k_1} = \frac{\partial q(k_1, k_2)}{\partial k_1} = -u_1 \\ u_2^* = \frac{\partial e}{\partial k_2} = -\frac{\partial q}{\partial k_2} = \frac{\partial q(k_1, k_2)}{\partial k_2} = -u_2 \\ w_{11}^* = \frac{\partial^2 e}{\partial k_1^2} = -\frac{\partial^2 q}{\partial k_1^2} = -\frac{\partial u_1}{\partial k_1} = -w_1 \\ w_{12}^* = \frac{\partial^2 e}{\partial k_1 \partial k_2} = -\frac{\partial^2 q}{\partial k_1 \partial k_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial k_2} = -w_2 \\ w_{21}^* = \frac{\partial^2 e}{\partial k_2 \partial k_1} = -w_3 \\ w_{22}^* = \frac{\partial^2 e}{\partial k_2^2} = -\frac{\partial^2 q}{\partial k_2^2} = -\frac{\partial u_2}{\partial k_2} = -w_4 \end{array} \right. \quad (7.14)$$

すなわち、誤差 e に関する一次・二次微係数は流出高 q に関するそれにマイナスを乗じた値で容易に計算されることがわかる。式(7.14)の変量を式(7.13)に代入すれば、次式が得られる。

$$e_m(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2) = e_m + u_1^* \Delta k_1 + u_2^* \Delta k_2 + \frac{1}{2} \left(w_{11}^* (\Delta k_1)^2 + 2 w_{12}^* \Delta k_1 \Delta k_2 + w_{22}^* (\Delta k_2)^2 \right) \quad (7.15)$$

現ステップでのモデル定数は既知であるので、式(7.1)の評価基準は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \min_{\Delta k_1, \Delta k_2} J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2) &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N [e_m(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)]^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ e_m + u_1^* \Delta k_1 + u_2^* \Delta k_2 + \frac{1}{2} \left(w_{11}^* (\Delta k_1)^2 + 2 w_{12}^* \Delta k_1 \Delta k_2 + w_{22}^* (\Delta k_2)^2 \right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

したがって、式(7.16)の最適化条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial \Delta k_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial \Delta k_2} = 0 \quad (7.17)$$

まず、式(7.17)より、 Δk_1 についての最小化条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial \Delta k_1} &= \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left(e_m + u_1^* \Delta k_1 + u_2^* \Delta k_2 + \frac{1}{2} w_{11}^* (\Delta k_1)^2 + w_{12}^* \Delta k_1 \Delta k_2 + \frac{1}{2} w_{22}^* (\Delta k_2)^2 \right) \\ &\quad \times (u_1^* + w_{11}^* \Delta k_1 + w_{12}^* \Delta k_2) \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N & \left(e_m u_1^* + u_1^* \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} u_1^* [\Delta k_1 \quad \Delta k_2] \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} + e_m \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} [\Delta k_1 \quad \Delta k_2] \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.19)$$

同様に、式(7.17)より、 Δk_2 についての最小化条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial \Delta k_2} &= \sum_{m=1}^N \left(e_m + u_1^* \Delta k_1 + u_2^* \Delta k_2 + \frac{1}{2} w_{11}^* (\Delta k_1)^2 + w_{12}^* \Delta k_1 \Delta k_2 + \frac{1}{2} w_{22}^* (\Delta k_2)^2 \right) \\ &\quad \times (u_2^* + w_{12}^* \Delta k_1 + w_{22}^* \Delta k_2) = 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N & \left(e_m u_2^* + u_2^* \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} u_2^* [\Delta k_1 \quad \Delta k_2] \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} + e_m \begin{bmatrix} w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} [\Delta k_1 \quad \Delta k_2] \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

式(7.19)と式(7.21)をまとめると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N & \left(e_m \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} [\Delta k_1 \quad \Delta k_2] \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} + e_m \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} [\Delta k_1 \quad \Delta k_2] \begin{bmatrix} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

ここで、式(7.22)を $[\Delta k_1 \quad \Delta k_2]^T$ に関して整理し、式の煩雑さを避けるために Σ 記号を省略して表わすと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} u_1^* \\ u_2^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} u_1^* & u_2^* \end{array} \right] + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} u_1^* \\ u_2^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \Delta k_1 & \Delta k_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{array} \right] + e_m \left[\begin{array}{cc} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \Delta k_1 & \Delta k_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_1^* \\ u_2^* \end{array} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \Delta k_1 & \Delta k_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \Delta k_1 & \Delta k_2 \end{array} \right] = -e_m \left[\begin{array}{c} u_1^* \\ u_2^* \end{array} \right] \end{aligned} \quad (7.23)$$

上式は一見複雑に見えるが、次式の新しい変量を定義すると、計算は容易に行なうことができる。

$$S = \left[\begin{array}{cc} \Delta k_1 & \Delta k_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{array} \right] \quad (7.24)$$

ここで、 S は (1×2) のベクトルである。

式(7.24)を用いると、式(7.23)は以下のように簡約化されることがわかる。

$$\left(\left[\begin{array}{c} u_1^* \\ u_2^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} u_1^* & u_2^* \end{array} \right] + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} u_1^* \\ u_2^* \end{array} \right] S + e_m \left[\begin{array}{cc} w_{11}^* & w_{12}^* \\ w_{21}^* & w_{22}^* \end{array} \right] + S^T \left[\begin{array}{cc} u_1^* & u_2^* \end{array} \right] + \frac{1}{2} S^T S \right) \left[\begin{array}{cc} \Delta k_1 & \Delta k_2 \end{array} \right] = -e_m \left[\begin{array}{c} u_1^* \\ u_2^* \end{array} \right] \quad (7.25)$$

式(7.25)は「第5回ゼミ」における「5. 二階ニュートン法」の式(5.43)に等しい。したがって、式(7.25)の解法については、「第5回ゼミ」における「5. 二階ニュートン法」を参照されたい。

3. ダビドン法を用いた最適化計算

目的関数 $J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)$ を二次の項までテーラー級数展開すると、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2) &= J(k_1, k_2) + \left(\frac{\partial J}{\partial k_1} \right) \Delta k_1 + \left(\frac{\partial J}{\partial k_2} \right) \Delta k_2 \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial k_1^2} \right) (\Delta k_1)^2 + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial k_1 \partial k_2} \right) (\Delta k_1)(\Delta k_2) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 J}{\partial k_2^2} \right) (\Delta k_2)^2 \end{aligned} \quad (7.26)$$

ここで J は $J(k_1, k_2)$ を意味する。

ここで、次式を定義する。

$$\begin{cases} g_1 = \frac{\partial J}{\partial k_1}, & g_2 = \frac{\partial J}{\partial k_2} \\ G_{11} = \frac{\partial^2 J}{\partial k_1^2}, & G_{12} = \frac{\partial^2 J}{\partial k_1 \partial k_2}, \quad G_{21} = \frac{\partial^2 J}{\partial k_2 \partial k_1}, \quad G_{22} = \frac{\partial^2 J}{\partial k_2^2} \end{cases} \quad (7.27)$$

式(7.26)を Δk_1 と Δk_2 で微分すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial(\Delta k_1)} &= \left(\frac{\partial J}{\partial k_1} \right) + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial k_1^2} \right) \Delta k_1 + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial k_1 \partial k_2} \right) \Delta k_2 \\
&= g_1 + G_{11}\Delta k_1 + G_{12}\Delta k_2 \\
\frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial(\Delta k_2)} &= \left(\frac{\partial J}{\partial k_2} \right) + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial k_2 \partial k_1} \right) \Delta k_1 + \left(\frac{\partial^2 J}{\partial k_2^2} \right) \Delta k_2 \\
&= g_2 + G_{21}\Delta k_1 + G_{22}\Delta k_2
\end{aligned} \tag{7.28}$$

目的関数の最小化条件は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial(\Delta k_1)} = 0 \\ \frac{\partial J(k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)}{\partial(\Delta k_2)} = 0 \end{cases} \tag{7.29}$$

式(7.29)より、式(7.28)は次式で表わされる。

$$\begin{cases} g_1 + G_{11}\Delta k_1 + G_{12}\Delta k_2 = 0 \\ g_2 + G_{21}\Delta k_1 + G_{22}\Delta k_2 = 0 \end{cases} \tag{7.30}$$

式(7.30)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.31}$$

したがって、 Δk_1 と Δk_2 は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

ここで、目的関数の一次微係数は、次式で算定される。

$$\begin{cases} g_1 = \frac{\partial J(k_1, k_2)}{\partial k_1} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (q_m^* - q_m) \frac{\partial q_m}{\partial k_1} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N e_m u_{1m} \\ g_2 = \frac{\partial J(k_1, k_2)}{\partial k_2} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (q_m^* - q_m) \frac{\partial q_m}{\partial k_2} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N e_m u_{2m} \end{cases} \tag{7.33}$$

同様に、目的関数の二次微係数も、次式で計算される。

$$G_{11} = \frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_1^2} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ (q_m^* - q_m) \frac{\partial^2 q_m}{\partial k_1^2} - \left(\frac{\partial q_m}{\partial k_1} \right)^2 \right\} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \{ e_m w_{11m} - u_{1m}^2 \}$$

$$\begin{aligned}
G_{12} &= \frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_1 \partial k_2} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ (q_m^* - q_m) \frac{\partial^2 q_m}{\partial k_1 \partial k_2} - \frac{\partial q_m}{\partial k_1} \frac{\partial q_m}{\partial k_2} \right\} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \{ e_m w_{12m} - u_{1m} u_{2m} \} \\
G_{21} &= \frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_2 \partial k_1} = G_{12} \\
G_{22} &= \frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_2^2} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left\{ (q_m^* - q_m) \frac{\partial^2 q_m}{\partial k_2^2} - \left(\frac{\partial q_m}{\partial k_2} \right)^2 \right\} = -\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \{ e_m w_{22m} - u_{2m}^2 \}
\end{aligned} \tag{7.34}$$

上述した3種類の最適化手法においては、一次微係数と二次微係数を必要とする。したがって、以下に二価の貯留関数法における一次・二次微係数を算定する方法を述べる。

4. 二価の線形貯留関数法の最適化計算

二価の線形貯留関数法による流出解析を行なう場合、以下の二式を用いる。

$$\begin{cases} s = k_1 q + k_2 \frac{dq}{dt} \\ \frac{ds}{dt} = r - q \end{cases} \tag{7.35}$$

ここで、 s は貯留高[mm]、 r は有効雨量[mm/h]、 q は流出高[mm/h]、 k_1, k_2 はモデル定数
式(7.35)の貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, k_1, k_2) = -\frac{1}{k_2}x_1 - \frac{k_1}{k_2}x_2 + \frac{r}{k_2} \end{cases} \tag{7.36}$$

式(7.36)を線形近似した結果は「第4回ゼミ」における「3. 二価の線形貯留方程式の数値解法」より、次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + D \tag{7.38}$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \tag{7.39}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{k_2} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_1}{k_2} \\ d_1 = \frac{r}{k_2} \end{cases} \quad (7.40)$$

4.1 一次微係数の算定

最適化計算を行なうためには、式(7.6)で表わされる一次微係数を算定しなければならない。そこで、 $q = x_1$ をモデル定数 k_1 と k_2 について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial k_1} = \frac{\partial x_1}{\partial k_1} \\ \frac{\partial q}{\partial k_2} = \frac{\partial x_1}{\partial k_2} \end{cases} \quad (7.41)$$

式(7.41)中的一次微係数 $u_1 = \partial x_1 / \partial k_1$ と $u_2 = \partial x_1 / \partial k_2$ を算定するためには、モデル定数 k_1 と k_2 が時間的に変化しないと仮定して、式(7.36)をモデル定数 k_1 と k_2 に関して微分すれば、一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_1} \right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_1} \\ \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_2} \right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_2} \\ \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial k_1} \right) = -\frac{1}{k_2} \frac{\partial x_1}{\partial k_1} - \frac{k_1}{k_2} \frac{\partial x_2}{\partial k_1} - \frac{1}{k_2} x_2 \\ \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial k_2} \right) = -\frac{1}{k_2} \frac{\partial x_1}{\partial k_2} - \frac{k_1}{k_2} \frac{\partial x_2}{\partial k_2} + \frac{1}{k_2^2} x_1 + \frac{k_1}{k_2^2} x_2 - \frac{r}{k_2^2} \end{cases} \quad (7.42)$$

ここで、次式を定義する。

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_2 / \partial k_1 \\ \partial f_2 / \partial k_2 \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

すなわち、 b_1 と b_2 は以下のとおりである。

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_1} = -\frac{1}{k_2} x_2 = a_1 x_2 \\ b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_2} = \frac{1}{k_2^2} x_1 + \frac{k_1}{k_2^2} x_2 - \frac{r}{k_2^2} = a_1^2 x_1 + a_1 a_2 x_2 - a_1^2 r \end{cases} \quad (7.44)$$

式(7.42)において、次の変数変換を行なう。

$$U = [u_1 \ u_2 \ | \ u_3 \ u_4]^T = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial x_1}{\partial k_1} & \frac{\partial x_1}{\partial k_2} \\ \hline \frac{\partial x_2}{\partial k_1} & \frac{\partial x_2}{\partial k_2} \end{array} \right]^T \quad (7.45)$$

式(7.40)、式(7.44)及び式(7.45)を用い、式(7.42)を整理すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_3 \\ \frac{du_2}{dt} = u_4 \\ \frac{du_3}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_3 + b_1 \\ \frac{du_4}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_4 + b_2 \end{cases} \quad (7.46)$$

式(7.46)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

ここで、次式を定義する。

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \end{array} \right], \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = [u_1 \ u_2]^T, \quad U_2 = [u_3 \ u_4]^T$$

$$B_1 = [0 \ 0]^T, \quad B_2 = [b_1 \ b_2]^T \quad (7.48)$$

式(7.48)を用い、式(7.47)を整理すると、次式で表わされる。

$$\frac{dU}{dt} = A_1 U + B \quad (7.49)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

式(7.47)を離散化表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_4 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \\ \hline \phi_3 & 0 & \phi_4 & 0 \\ 0 & \phi_3 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_4 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \\ \hline \gamma_3 & 0 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_2 \end{bmatrix}_m \quad (7.51)$$

式(7.51)を整理すると、次式で表わされることがわかる。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \phi_3 I & \phi_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}_m \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned} (U_1)_{m+1} &= \phi_1 (U_1)_m + \phi_2 (U_2)_m + \gamma_2 (B_2)_m \\ (U_2)_{m+1} &= \phi_3 (U_1)_m + \phi_4 (U_2)_m + \gamma_4 (B_2)_m \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$\begin{cases} (u_1)_{m+1} = \phi_1 (u_1)_m + \phi_2 (u_3)_m + \gamma_2 (b_1)_m \\ (u_2)_{m+1} = \phi_1 (u_2)_m + \phi_2 (u_4)_m + \gamma_2 (b_2)_m \\ (u_3)_{m+1} = \phi_3 (u_1)_m + \phi_4 (u_3)_m + \gamma_4 (b_1)_m \\ (u_4)_{m+1} = \phi_3 (u_2)_m + \phi_4 (u_4)_m + \gamma_4 (b_2)_m \end{cases} \quad (7.54)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は「第4回ゼミ」における「3. 二価の線形貯留方程式の数値解法」で計算された係数と同じである。

式(7.54)の漸化式を用いると、任意の離散時刻 m における一次微係数が解析的に算定されたことになる。

式(7.54)の u_1 と u_2 の値を式(7.41)に代入すれば、 q に関する一次感度係数が計算される。

4.2 二次微係数の算定

式(7.41)をモデル定数 k_1 と k_2 について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q}{\partial k_1^2} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_1^2}, & \frac{\partial^2 q}{\partial k_1 \partial k_2} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_1 \partial k_2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial k_2 \partial k_1} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_2 \partial k_1}, & \frac{\partial^2 q}{\partial k_2^2} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_2^2} \end{cases} \quad (7.55)$$

式(7.55)中の二次微係数 $\partial^2 x_1 / \partial k_1^2, \partial^2 x_1 / \partial k_1 \partial k_2, \partial^2 x_1 / \partial k_2 \partial k_1$ 及び $\partial^2 x_1 / \partial k_2^2$ を算定するためには、モデル定数 k_1 と k_2 が時間的に変化しないと仮定して、式(7.46)をさらにモデル定数 k_1 と k_2 に関して微分すれば、二次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial k_1} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial k_1} \\ \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial k_2} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial k_2} \\ \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_2}{\partial k_1} \right) = \frac{\partial u_4}{\partial k_1} \\ \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_2}{\partial k_2} \right) = \frac{\partial u_4}{\partial k_2} \\ \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_3}{\partial k_1} \right) = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial k_1} + a_2 \frac{\partial u_3}{\partial k_1} + u_1 \frac{da_1}{dk_1} + u_3 \frac{da_2}{dk_1} + \frac{db_1}{dk_1} \\ \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_3}{\partial k_2} \right) = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial k_2} + a_2 \frac{\partial u_3}{\partial k_2} + u_1 \frac{da_1}{dk_2} + u_3 \frac{da_2}{dk_2} + \frac{db_1}{dk_2} \\ \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{\partial u_4}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_4}{\partial k_1} \right) = a_1 \frac{\partial u_2}{\partial k_1} + a_2 \frac{\partial u_4}{\partial k_1} + u_2 \frac{da_1}{dk_1} + u_4 \frac{da_2}{dk_1} + \frac{db_2}{dk_1} \\ \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{\partial u_4}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_4}{\partial k_2} \right) = a_1 \frac{\partial u_2}{\partial k_2} + a_2 \frac{\partial u_4}{\partial k_2} + u_2 \frac{da_1}{dk_2} + u_4 \frac{da_2}{dk_2} + \frac{db_2}{dk_2} \end{array} \right. \quad (7.56)$$

ここで、次の変数変換を行なう。

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_2 \end{bmatrix} \\ W_1 &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial k_1 & \partial u_1 / \partial k_2 \\ \partial u_2 / \partial k_1 & \partial u_2 / \partial k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 x_1 / \partial k_1^2 & \partial^2 x_1 / \partial k_1 \partial k_2 \\ \partial^2 x_1 / \partial k_2 \partial k_1 & \partial^2 x_1 / \partial k_2^2 \end{bmatrix} \\ W_2 &= \begin{bmatrix} w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_3 / \partial k_1 & \partial u_3 / \partial k_2 \\ \partial u_4 / \partial k_1 & \partial u_4 / \partial k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 x_2 / \partial k_1^2 & \partial^2 x_2 / \partial k_1 \partial k_2 \\ \partial^2 x_2 / \partial k_2 \partial k_1 & \partial^2 x_2 / \partial k_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.57)$$

式(7.57)を用い、式(7.56)を整理すると次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_1}{dt} = w_5 \\ \frac{dw_3}{dt} = w_7 \\ \frac{dw_5}{dt} = a_1 w_1 + a_2 w_5 + v_{11} \\ \frac{dw_7}{dt} = a_1 w_3 + a_2 w_7 + v_{21} \end{array} , \quad \begin{array}{l} \frac{dw_2}{dt} = w_6 \\ \frac{dw_4}{dt} = w_8 \\ \frac{dw_6}{dt} = a_1 w_2 + a_2 w_6 + v_{12} \\ \frac{dw_8}{dt} = a_1 w_4 + a_2 w_8 + v_{22} \end{array} \right. \quad (7.58)$$

ここで、

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{11} = u_1 \frac{da_1}{dk_1} + u_3 \frac{da_2}{dk_1} + \frac{db_1}{dk_1} \\ v_{12} = u_1 \frac{da_1}{dk_2} + u_3 \frac{da_2}{dk_2} + \frac{db_1}{dk_2} \\ v_{21} = u_2 \frac{da_1}{dk_1} + u_4 \frac{da_2}{dk_1} + \frac{db_2}{dk_1} \\ v_{22} = u_2 \frac{da_1}{dk_2} + u_4 \frac{da_2}{dk_2} + \frac{db_2}{dk_2} \end{array} \right. \quad (7.59)$$

次式において、新しいベクトルと行列を定義する。

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \quad (7.60)$$

式(7.57)と式(7.60)を用い、式(7.58)を整理すると、次式が得られる。

$$\frac{dW}{dt} = A_1 W + V \quad (7.61)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

ここで、行列 A_1 は式(7.48)中の A_1 と同じである。

式(7.59)を行列表示すると、次式が得られる。

$$V_2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da_1/dk_1 & da_1/dk_2 \\ da_2/dk_1 & da_2/dk_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} db_1/dk_1 & db_1/dk_2 \\ db_2/dk_1 & db_2/dk_2 \end{bmatrix} \quad (7.63)$$

ここで、一次微係数ベクトル U_1 と U_2 を以下に示す行列に変換する。

$$U_* = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

式(7.64)を用いると、次式が得られる。

$$V_2 = U_* \frac{dA}{dK} + \frac{dB}{dK} \quad (7.65)$$

ここで、 $da_1/dk_1 \sim da_2/dk_2$ の微係数は式(7.40)より次式で計算される。

$$\begin{bmatrix} da_1/dk_1 & da_1/dk_2 \\ da_2/dk_1 & da_2/dk_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial a_1/\partial x_1 & \partial a_1/\partial x_2 \\ \partial a_2/\partial x_1 & \partial a_2/\partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial a_1/\partial k_1 & \partial a_1/\partial k_2 \\ \partial a_2/\partial k_1 & \partial a_2/\partial k_2 \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

$$\frac{dA}{dK} = \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial A}{\partial K} \quad (7.67)$$

同様に、 $db_1/dk_1 \sim db_2/dk_2$ の微係数も、式(7.44)より次式で算定される。

$$\begin{bmatrix} db_1/dk_1 & db_1/dk_2 \\ db_2/dk_1 & db_2/dk_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial b_1/\partial x_1 & \partial b_1/\partial x_2 \\ \partial b_2/\partial x_1 & \partial b_2/\partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial b_1/\partial k_1 & \partial b_1/\partial k_2 \\ \partial b_2/\partial k_1 & \partial b_2/\partial k_2 \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

$$\frac{dB}{dK} = \frac{\partial B}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (7.69)$$

よって、式(7.65)は、次式で表される。

$$V_2 = U_* \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \frac{\partial B}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (7.70)$$

ここで、 $\partial A/\partial X, \partial A/\partial K, \partial B/\partial X$ 及び $\partial B/\partial K$ は式(7.40)と式(7.44)より、以下の行列で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \partial a_1/\partial x_1 & \partial a_1/\partial x_2 \\ \partial a_2/\partial x_1 & \partial a_2/\partial x_2 \end{bmatrix}, & \frac{\partial A}{\partial K} &= \begin{bmatrix} \partial a_1/\partial k_1 & \partial a_1/\partial k_2 \\ \partial a_2/\partial k_1 & \partial a_2/\partial k_2 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial B}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \partial b_1/\partial x_1 & \partial b_1/\partial x_2 \\ \partial b_2/\partial x_1 & \partial b_2/\partial x_2 \end{bmatrix}, & \frac{\partial B}{\partial K} &= \begin{bmatrix} \partial b_1/\partial k_1 & \partial b_1/\partial k_2 \\ \partial b_2/\partial k_1 & \partial b_2/\partial k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.71)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0 & , \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0 & , \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (7.72)$$

式(7.72)から、 $\partial A/\partial X$ はゼロ行列となることがわかる。

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial k_1} = 0 & , \quad \frac{\partial a_1}{\partial k_2} = \frac{1}{k_2^2} = a_1^2 \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_1} = -\frac{1}{k_2} = a_1 & , \quad \frac{\partial a_2}{\partial k_2} = \frac{k_1}{k_2^2} = a_1 a_2 \end{cases} \quad (7.73)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} = 0 & , \quad \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{k_2} = \frac{\partial a_2}{\partial k_1} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} = \frac{1}{k_2^2} = \frac{\partial a_1}{\partial k_2} & , \quad \frac{\partial b_2}{\partial x_2} = \frac{k_1}{k_2^2} = \frac{\partial a_2}{\partial k_2} \end{cases} \quad (7.74)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial k_1} = 0 \\ \frac{\partial b_2}{\partial k_1} = \frac{1}{k_2^2} x_2 = a_1^2 x_2 \end{cases}, \quad \begin{aligned} \frac{\partial b_1}{\partial k_2} &= \frac{1}{k_2^2} x_2 = a_1^2 x_2 \\ \frac{\partial b_2}{\partial k_2} &= -\frac{2}{k_2^3} x_1 - 2 \frac{k_1}{k_2^3} x_2 + 2 \frac{r}{k_2^3} \\ &= 2a_1^3 x_1 + 2a_1^2 a_2 x_2 - 2a_1^3 r \end{aligned} \quad (7.75)$$

式(7.73)と式(7.74)より、次式が成立していることがわかる。

$$\frac{\partial B}{\partial X} = \left(\frac{\partial A}{\partial K} \right)^T \quad (7.76)$$

また、式(7.71)の $\partial A / \partial X$ と $\partial B / \partial K$ は対称行列であることから、行列 V_2 も対称行列になることに注意すべきである。

式(7.76)を用いると、式(7.70)は次のようになる。

$$V_2 = U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \left(U_* \left(\frac{\partial A}{\partial K} \right) \right)^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (7.77)$$

式(7.77)を要素展開すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} V_2 &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1^2 \\ a_1 & a_1 a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_1^2 & a_1 a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & a_1^2 x_2 \\ a_1^2 x_2 & 2a_1^3 x_1 + 2a_1^2 a_2 x_2 - 2a_1^3 r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.78)$$

すなわち、 V_2 の要素は次式で計算される。

$$\begin{cases} v_{11} = 2a_1 u_3 \\ v_{12} = a_1^2 u_1 + a_1 a_2 u_3 + a_1 u_4 + a_1^2 x_2 \\ v_{21} = a_1^2 u_1 + a_1 a_2 u_3 + a_1 u_4 + a_1^2 x_2 = v_{12} \\ v_{22} = 2a_1^2 u_2 + 2a_1 a_2 u_4 + 2a_1^3 x_1 + 2a_1^2 a_2 x_2 - 2a_1^3 r \end{cases} \quad (7.79)$$

式(7.62)を離散化表示すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \phi_3 I & \phi_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_m \quad (7.80)$$

式(7.80)は以下のように要素展開できる。

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \\ \hline w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \\ \hline \phi_3 & 0 & \phi_4 & 0 \\ 0 & \phi_3 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \\ \hline w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \\ \hline \gamma_3 & 0 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}_m \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned} (W_1)_{m+1} &= \phi_1(W_1)_m + \phi_2(W_2)_m + \gamma_2(V_2)_m \\ (W_2)_{m+1} &= \phi_3(W_1)_m + \phi_4(W_2)_m + \gamma_4(V_2)_m \end{aligned} \quad (7.82)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は「第4回ゼミ」における「3. 二価の線形貯留方程式の数値解法」で計算された係数と同じである。

式(7.81)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{cases} (w_1)_{m+1} = \phi_1(w_1)_m + \phi_2(w_5)_m + \gamma_2(v_{11})_m \\ (w_2)_{m+1} = \phi_1(w_2)_m + \phi_2(w_6)_m + \gamma_2(v_{12})_m \\ (w_3)_{m+1} = \phi_1(w_3)_m + \phi_2(w_7)_m + \gamma_2(v_{21})_m \\ (w_4)_{m+1} = \phi_1(w_4)_m + \phi_2(w_8)_m + \gamma_2(v_{22})_m \\ (w_5)_{m+1} = \phi_3(w_1)_m + \phi_4(w_5)_m + \gamma_4(v_{11})_m \\ (w_6)_{m+1} = \phi_3(w_2)_m + \phi_4(w_6)_m + \gamma_4(v_{12})_m \\ (w_7)_{m+1} = \phi_3(w_3)_m + \phi_4(w_7)_m + \gamma_4(v_{21})_m \\ (w_8)_{m+1} = \phi_3(w_4)_m + \phi_4(w_8)_m + \gamma_4(v_{22})_m \end{cases} \quad (7.83)$$

式(7.83)の漸化式を用いると、任意の離散時刻 m における二次微係数が解析的に算定されることになる。

なお、行列 W_1 と W_2 のヘシアン行列は対称行列となることから、式(7.83)における要素のうち、 $w_2 = w_3$ 及び $w_6 = w_7$ になることに注意すべきである。

式(7.83)の $w_1 \sim w_4$ の値を式(7.55)に代入すれば、 q に関する二次感度係数が計算される。

以上、二価の線形貯留関数法における一次及び二次の感度係数が算出されたので、(i)一階ニュートン法、(ii)二階ニュートン法、(iii)ダビドン法を用いた3種類の最適化手法が実行可能となる。

5. 二価の非線形貯留関数法の最適化計算

二価の非線形貯留関数法による流出解析を行なう場合、以下の二式を用いる。

$$\begin{cases} s = k_{11}q^{p_1} + k_{12}\frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ \frac{ds}{dt} = r - q \end{cases} \quad (7.84)$$

ここで、 s は貯留高[mm]、 r は有効雨量[mm/h]、 q は流出高[mm/h]、 k_{11}, k_{12}, p_1, p_2 :モデル定数

式(7.84)の貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, k_{11}, k_{12}) = -\frac{1}{k_{12}}x_1^{1/p_2} - \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (7.85)$$

式(7.85)を線形近似した結果は「第4回ゼミ」における「5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法」より、次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (7.86)$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + D \quad (7.87)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (7.88)$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 - \frac{1}{k_{12}} \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \\ d_1 = \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{1}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (7.89)$$

5.1 一次微係数の算定

$q = x_1^{1/p_2}$ をモデル定数 k_{11} と k_{12} について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial k_{11}} = \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial q}{\partial k_{12}} = \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \end{cases} \quad (7.90)$$

式(7.41)中的一次微係数、 $u_1 = \partial x_1 / \partial k_{11}$ と $u_2 = \partial x_1 / \partial k_{12}$ を算定するためには、モデル定数 k_{11} と k_{12} が時間的に変化しないと仮定して、式(7.85)をモデル定数 k_{11} と k_{12} に関して微分すれば、一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{12}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \right) = \left(-\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 - \frac{1}{k_{12} p_2} x_1^{1/p_2-1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \\ \quad + \left(-\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \right) \frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} - \frac{1}{k_{12} p_2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 \\ \frac{\partial}{\partial k_2} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial k_2} \right) = \left(-\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 - \frac{1}{k_{12} p_2} x_1^{1/p_2-1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \\ \quad + \left(-\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \right) \frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{1}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} - \frac{r}{k_{12}^2} \end{array} \right. \quad (7.91)$$

ここで、次式を定義する。

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_2 / \partial k_{11} \\ \partial f_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \quad (7.92)$$

すなわち、 b_1 と b_2 は以下の式で与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 \\ b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{1}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} - \frac{r}{k_{12}^2} \end{array} \right. \quad (7.93)$$

式(7.91)において、次の変数変換を行なう。

$$U = [u_1 \quad u_2 \mid u_3 \quad u_4]^T = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} & \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \\ \hline \frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} & \frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \end{array} \right]^T \quad (7.94)$$

式(7.89)、式(7.93)及び式(7.94)を用い、式(7.91)を整理すると次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = u_3 \quad , \quad \frac{du_2}{dt} = u_4 \\ \frac{du_3}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_3 + b_1 \\ \frac{du_4}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_4 + b_2 \end{array} \right. \quad (7.95)$$

式(7.95)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (7.96)$$

ここで、次式を定義する。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = [u_1 \ u_2]^T, \quad U_2 = [u_3 \ u_4]^T$$

$$B_1 = [0 \ 0]^T, \quad B_2 = [b_1 \ b_2]^T \quad (7.97)$$

式(7.97)を用い、式(7.96)を整理すると、次式で表わされる。

$$\frac{dU}{dt} = A_1 U + B \quad (7.98)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (7.99)$$

式(7.96)を離散化表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \\ \hline \phi_3 & 0 & \phi_4 & 0 \\ 0 & \phi_3 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \\ \hline \gamma_3 & 0 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_m \quad (7.100)$$

式(7.97)を用い、式(7.100)を整理すると、次式で表わされることがわかる。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \phi_3 I & \phi_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}_m \quad (7.101)$$

ここで、 I は (2×2) の単位行列である。

$$(U_1)_{m+1} = \phi_1 (U_1)_m + \phi_2 (U_2)_m + \gamma_2 (B_2)_m$$

$$(U_2)_{m+1} = \phi_3 (U_1)_m + \phi_4 (U_2)_m + \gamma_4 (B_2)_m \quad (7.102)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は「第4回ゼミ」における「5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法」で計算された係数と同じである。

式(7.100)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{cases} (u_1)_{m+1} = \phi_1(u_1)_m + \phi_2(u_3)_m + \gamma_2(b_1)_m \\ (u_2)_{m+1} = \phi_1(u_2)_m + \phi_2(u_4)_m + \gamma_2(b_2)_m \\ (u_3)_{m+1} = \phi_3(u_1)_m + \phi_4(u_3)_m + \gamma_4(b_1)_m \\ (u_4)_{m+1} = \phi_3(u_2)_m + \phi_4(u_4)_m + \gamma_4(b_2)_m \end{cases} \quad (7.103)$$

式(7.103)の漸化式を用いると、任意の離散時刻 m における一次微係数が解析的に算定されたことになる。

式(7.103)の u_1 と u_2 の値を式(7.90)に代入すれば、 q に関する一次感度係数が計算される。

5.2 二次微係数の算定

式(7.41)をモデル定数 k_{11} と k_{12} について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}^2} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \right)^2 + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}^2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11} \partial k_{12}} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \right) + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12} \partial k_{11}} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \right) + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12} \partial k_{11}} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}^2} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \right)^2 + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}^2} \end{cases} \quad (7.104)$$

式(7.55)中の二次微係数 $\partial^2 x_1 / \partial k_{11}^2, \partial^2 x_1 / \partial k_{11} \partial k_{12}, \partial^2 x_1 / \partial k_{12} \partial k_{11}$ 及び $\partial^2 x_1 / \partial k_{12}^2$ を算定するためには、モデル定数 k_{11} と k_{12} が時間的に変化しないと仮定して、式(7.95)をモデル定数 k_{11} と k_{12} に関して微分すれば、二次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial k_{11}} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{12}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial k_{12}} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_2}{\partial k_{11}} \right) = \frac{\partial u_4}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{12}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_2}{\partial k_{12}} \right) = \frac{\partial u_4}{\partial k_{12}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_3}{\partial k_{11}} \right) = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial k_{11}} + a_2 \frac{\partial u_3}{\partial k_{11}} + u_1 \frac{da_1}{dk_{11}} + u_3 \frac{da_2}{dk_{11}} + \frac{db_1}{dk_{11}} \\
\frac{\partial}{\partial k_{12}} \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_3}{\partial k_{12}} \right) = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial k_{12}} + a_2 \frac{\partial u_3}{\partial k_{12}} + u_1 \frac{da_1}{dk_{12}} + u_3 \frac{da_2}{dk_{12}} + \frac{db_1}{dk_{12}} \\
\frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial u_4}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_4}{\partial k_{11}} \right) = a_1 \frac{\partial u_2}{\partial k_{11}} + a_2 \frac{\partial u_4}{\partial k_{11}} + u_2 \frac{da_1}{dk_{11}} + u_4 \frac{da_2}{dk_{11}} + \frac{db_2}{dk_{11}} \\
\frac{\partial}{\partial k_{12}} \left(\frac{\partial u_4}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_4}{\partial k_{12}} \right) = a_1 \frac{\partial u_2}{\partial k_{12}} + a_2 \frac{\partial u_4}{\partial k_{12}} + u_2 \frac{da_1}{dk_{12}} + u_4 \frac{da_2}{dk_{12}} + \frac{db_2}{dk_{12}}
\end{aligned} \tag{7.105}$$

ここで、次の変数変換を行う。

$$\begin{aligned}
W &= \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \\
W_1 &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial k_{11} & \partial u_1 / \partial k_{12} \\ \partial u_2 / \partial k_{11} & \partial u_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 x_1 / \partial k_{11}^2 & \partial^2 x_1 / \partial k_{11} \partial k_{12} \\ \partial^2 x_1 / \partial k_{12} \partial k_{11} & \partial^2 x_1 / \partial k_{12}^2 \end{bmatrix} \\
W_2 &= \begin{bmatrix} w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_3 / \partial k_{11} & \partial u_3 / \partial k_{12} \\ \partial u_4 / \partial k_{11} & \partial u_4 / \partial k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial^2 x_2 / \partial k_{11}^2 & \partial^2 x_2 / \partial k_{11} \partial k_{12} \\ \partial^2 x_2 / \partial k_{12} \partial k_{11} & \partial^2 x_2 / \partial k_{12}^2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.106}$$

式(7.106)を用い、式(7.105)を整理すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = w_5 & , \quad \frac{dw_2}{dt} = w_6 \\ \frac{dw_3}{dt} = w_7 & , \quad \frac{dw_4}{dt} = w_8 \\ \frac{dw_5}{dt} = a_1 w_1 + a_2 w_5 + v_{11} & , \quad \frac{dw_6}{dt} = a_1 w_2 + a_2 w_6 + v_{12} \\ \frac{dw_7}{dt} = a_1 w_3 + a_2 w_7 + v_{21} & , \quad \frac{dw_8}{dt} = a_1 w_4 + a_2 w_8 + v_{22} \end{cases} \tag{7.107}$$

ここで、

$$\begin{cases} v_{11} = u_1 \frac{da_1}{dk_{11}} + u_3 \frac{da_2}{dk_{11}} + \frac{db_1}{dk_{11}} \\ v_{12} = u_1 \frac{da_1}{dk_{12}} + u_3 \frac{da_2}{dk_{12}} + \frac{db_1}{dk_{12}} \\ v_{21} = u_2 \frac{da_1}{dk_{11}} + u_4 \frac{da_2}{dk_{11}} + \frac{db_2}{dk_{11}} \\ v_{22} = u_2 \frac{da_1}{dk_{12}} + u_4 \frac{da_2}{dk_{12}} + \frac{db_2}{dk_{12}} \end{cases} \tag{7.108}$$

次式で新しいベクトルと行列を定義する。

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \quad (7.109)$$

式(7.57)と式(7.60)を用い、式(7.58)を整理すると、次式が得られる。

$$\frac{dW}{dt} = A_1 W + V \quad (7.110)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (7.111)$$

ここで、行列 A_1 は式(7.97)中の A_1 と同じである。

式(7.108)を行列表示すると、次式が得られる。

$$V_2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da_1/dk_{11} & da_1/dk_{12} \\ da_2/dk_{11} & da_2/dk_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} db_1/dk_{11} & db_1/dk_{12} \\ db_2/dk_{11} & db_2/dk_{12} \end{bmatrix} \quad (7.112)$$

ここで、一次微係数ベクトル U_1 と U_2 を以下に示す行列に変換する。

$$U_* = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{bmatrix} \quad (7.113)$$

式(7.113)を用いると、式(7.112)は次式で与えられる。

$$V_2 = U_* \frac{dA}{dK} + \frac{dB}{dK} \quad (7.114)$$

ここで、 $da_1/dk_{11} \sim da_2/dk_{12}$ は、式(7.89)より次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} da_1/dk_{11} & da_1/dk_{12} \\ da_2/dk_{11} & da_2/dk_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_1 / \partial x_2 \\ \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_{11} & \partial a_1 / \partial k_{12} \\ \partial a_2 / \partial k_{11} & \partial a_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \quad (7.115)$$

$$\frac{dA}{dK} = \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial A}{\partial K} \quad (7.116)$$

同様に、 $db_1/dk_{11} \sim db_2/dk_{12}$ も、式(7.93)より次式で表される。

$$\begin{bmatrix} db_1/dk_{11} & db_1/dk_{12} \\ db_2/dk_{11} & db_2/dk_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_1 / \partial x_2 \\ \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_{11} & \partial b_1 / \partial k_{12} \\ \partial b_2 / \partial k_{11} & \partial b_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \quad (7.117)$$

$$\frac{dB}{dK} = \frac{\partial B}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (7.118)$$

よって、式(7.114)は、次式で表されることがわかる。

$$V_2 = U_* \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \frac{\partial B}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (7.119)$$

ここで、 $\partial A / \partial X, \partial A / \partial K, \partial B / \partial X$ 及び $\partial B / \partial K$ は式(7.89)と式(7.93)より、以下の行列で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_1 / \partial x_2 \\ \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial K} = \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_{11} & \partial a_1 / \partial k_{12} \\ \partial a_2 / \partial k_{11} & \partial a_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial B}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_1 / \partial x_2 \\ \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial B}{\partial K} = \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_{11} & \partial b_1 / \partial k_{12} \\ \partial b_2 / \partial k_{11} & \partial b_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.120)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left(\frac{p_1}{p_2} - 2 \right) x_1^{p_1/p_2-3} x_2 - \frac{1}{k_{12}} \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} = \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (7.121)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 \\ \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} + \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \end{cases} \quad (7.122)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 = \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} = \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} + \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 = \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_2} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} = \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} \end{cases} \quad (7.123)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial k_{11}} = 0 \\ \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 \\ \frac{\partial b_2}{\partial k_{11}} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 = \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial b_2}{\partial k_{12}} = -2 \frac{k_{11}}{k_{12}^3} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{2}{k_{12}^3} x_1^{1/p_2} + 2 \frac{r}{k_{12}^3} \end{cases} \quad (7.124)$$

式(7.122)と式(7.123)より、次式が成立していることがわかる。

$$\frac{\partial B}{\partial X} = \left(\frac{\partial A}{\partial K} \right)^T \quad (7.125)$$

また、式(7.120)の $\partial A / \partial X$ と $\partial B / \partial K$ は対称行列であることから、行列 V_2 も対称行列になることに注意すべきである。

式(7.125)を用いると、式(7.119)は次のようになる。

$$V_2 = U_* \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \left(U_* \left(\frac{\partial A}{\partial K} \right) \right)^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (7.126)$$

式(7.126)を要素展開すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} V_2 &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_1 / \partial x_2 \\ \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ u_2 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_{11} & \partial a_1 / \partial k_{12} \\ \partial a_2 / \partial k_{11} & \partial a_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_{11} & \partial a_2 / \partial k_{11} \\ \partial a_1 / \partial k_{12} & \partial a_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_{11} & \partial b_1 / \partial k_{12} \\ \partial b_2 / \partial k_{11} & \partial b_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.127)$$

式(7.127)に式(7.121)～式(7.124)で計算された微係数の値を代入すると、 V_2 の要素が算出されることになる。

式(7.111)を離散化表示すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \phi_3 I & \phi_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_m \quad (7.128)$$

式(7.128)は以下のように要素展開できる。

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \\ \hline w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \\ \hline \phi_3 & 0 & \phi_4 & 0 \\ 0 & \phi_3 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \\ \hline w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \\ \hline \gamma_3 & 0 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}_m \quad (7.129)$$

$$\begin{aligned} (W_1)_{m+1} &= \phi_1 (W_1)_m + \phi_2 (W_2)_m + \gamma_2 (V_2)_m \\ (W_2)_{m+1} &= \phi_3 (W_1)_m + \phi_4 (W_2)_m + \gamma_4 (V_2)_m \end{aligned} \quad (7.130)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は「第4回ゼミ」における「5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法」で計算された係数と同じである。

式(7.129)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{cases} (w_1)_{m+1} = \phi_1 (w_1)_m + \phi_2 (w_5)_m + \gamma_2 (v_{11})_m \\ (w_2)_{m+1} = \phi_1 (w_2)_m + \phi_2 (w_6)_m + \gamma_2 (v_{12})_m \\ (w_3)_{m+1} = \phi_1 (w_3)_m + \phi_2 (w_7)_m + \gamma_2 (v_{21})_m \\ (w_4)_{m+1} = \phi_1 (w_4)_m + \phi_2 (w_8)_m + \gamma_2 (v_{22})_m \\ (w_5)_{m+1} = \phi_3 (w_1)_m + \phi_4 (w_5)_m + \gamma_4 (v_{11})_m \\ (w_6)_{m+1} = \phi_3 (w_2)_m + \phi_4 (w_6)_m + \gamma_4 (v_{12})_m \\ (w_7)_{m+1} = \phi_3 (w_3)_m + \phi_4 (w_7)_m + \gamma_4 (v_{21})_m \\ (w_8)_{m+1} = \phi_3 (w_4)_m + \phi_4 (w_8)_m + \gamma_4 (v_{22})_m \end{cases} \quad (7.131)$$

式(7.131)の漸化式を用いると、任意の離散時刻 m における二次微係数が解析的に算定されたことになる。

なお、行列 W_1 と W_2 のヘシアン行列は対称行列となることから、式(7.131)における要素のうち、 $w_2 = w_3$ 及び $w_6 = w_7$ になることに注意すべきである。

式(7.131)の $w_1 \sim w_4$ の値と式(7.103)の u_1 と u_2 の値を式(7.104)に代入すれば、 q に関する二次感度係数が計算される。

以上、二価の非線形貯留関数法における、モデル定数 k_{11} と k_{12} に関しての一次及び二次の感度係数が算出されたので、(i)一階ニュートン法、(ii)二階ニュートン法、(iii)ダビドン法を用いた3種類の最適化手法が実行可能となる。

5.3 二価の非線形貯留関数法におけるモデル定数 f_c の最適化計算 (f_c による一次元探索)

「第4回ゼミ」の「5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法」で述べたように、 k_{11}, k_{12}, p_1 及び p_2 は、次式で表わされる。

$$\begin{cases} k_{11} = 2.8235 f_c A^{0.24}, \quad k_{12} = 0.2835 k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \\ p_1 = 0.6, \quad p_2 = 0.4648, \quad f_c = (n/\sqrt{i})^{0.6} \end{cases} \quad (7.132)$$

ここで、 A は流域面積[km²]、 \bar{r} は平均有効雨量強度[mm/h]、 n は等価粗度[s/m^{1/3}]、 i は平均斜面勾配

式(7.132)において、 f_c の値が同定されれば、モデル定数 k_{11} と k_{12} は一義的に決定されることになる。
したがって、 f_c の一次元探索を行う方法を開発する。

式(7.132)は次のように置き換えることができる。

$$\begin{cases} k_{11} = \alpha_1 f_c \\ k_{12} = \alpha_2 k_{11}^2 = \alpha_1^2 \alpha_2 f_c^2 = \alpha_3 f_c^2 \end{cases} \quad (7.133)$$

ここで、

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2.8235 A^{0.24} \\ \alpha_2 = 0.2835 (\bar{r})^{-0.2648} \\ \alpha_3 = \alpha_1^2 \alpha_2 \end{cases} \quad (7.134)$$

二価の非線形貯留関数モデルを再記すれば、次のシステム方程式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, f_c) = -\frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2} - \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (7.135)$$

式(7.135)を線形近似した結果は「第4回ゼミ」における「5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法」より、
次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (7.136)$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + D \quad (7.137)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (7.138)$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 - \frac{1}{k_{12}} \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \\ d_1 = \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{1}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (7.139)$$

5.2.1 一次微係数の算定

$q = [x_1(f_c)]^{1/p_2}$ をモデル定数 f_c について微分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial q}{\partial f_c} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} u_1 \quad (7.140)$$

式(7.140)中的一次微係数、 $u_1 = \partial x_1 / \partial f_c$ を算定するためには、モデル定数 f_c が時間的に変化しないと仮定して、式(7.135)をモデル定数 f_c について微分すれば、次式に示される一次微係数に関する微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial f_c} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial f_c} \right) = \frac{\partial x_2}{\partial f_c} \\ \frac{\partial}{\partial f_c} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial f_c} \right) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f_c} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \end{cases} \quad (7.141)$$

上式において、次式を定義する。

$$\begin{aligned} b &= \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \\ &= b_1 \alpha_4 + b_2 \alpha_5 \end{aligned} \quad (7.142)$$

式(7.142)における微係数は次式で計算される。

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 \\ b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \frac{1}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} + \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{r}{k_{12}^2} \\ \alpha_4 = \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} = \alpha_1 \\ \alpha_5 = \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c} = 2\alpha_3 f_c \end{cases} \quad (7.143)$$

式(7.141)において、次の変数変換を行う。

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} & \frac{\partial x_2}{\partial f_c} \end{bmatrix}^T \quad (7.144)$$

式(7.139)、式(7.142)及び式(7.144)を用いて、式(7.141)を書き換えると次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_2 + b \end{cases} \quad (7.145)$$

式(7.145)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (7.146)$$

ここで、次式を定義する。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (7.147)$$

式(7.147)の行列 A は式(7.138)のそれに等しい。

式(7.147)を用い、式(7.146)を整理すると、次式で表わされる。

$$\frac{dU}{dt} = AU + B \quad (7.148)$$

式(7.148)の一次感度方程式の解法は、システム方程式のそれに準拠すればよい。

式(7.146)を離散化表示すると、次式で表わされることがわかる。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}_m \quad (7.149)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ 及び $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は「第4回ゼミ」における「5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法」で計算された係数と同じである。

式(7.149)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{cases} (u_1)_{m+1} = \phi_1(u_1)_m + \phi_2(u_2)_m + \gamma_2(b)_m \\ (u_2)_{m+1} = \phi_3(u_1)_m + \phi_4(u_2)_m + \gamma_4(b)_m \end{cases} \quad (7.150)$$

式(7.150)を用いると、任意の離散時刻 m における一次微係数 $u_1 = \partial x_1 / \partial f_c$ が解析的に算定されたことになる。

この u_1 の値を式(7.140)に代入すれば、流出高 q に関する一次感度係数が得られ、一階ニュートン法による f_c の最適化手法が可能となる。

5.2.2 二次微係数の算定

式(7.140)をモデル定数 f_c について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 q}{\partial f_c^2} &= \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2 - 2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial f_c} \right)^2 + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2} \frac{\partial^2 x_1}{\partial f_c^2} \\ &= \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2 - 2} u_1^2 + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2} w_1\end{aligned}\quad (7.151)$$

式(7.151)中の二次微係数、 $w_1 = \partial^2 x_1 / \partial f_c^2$ を算定するためには、モデル定数 f_c が時間的に変化しないと仮定して、式(7.145)をモデル定数 f_c について微分すれば、次式に示される二次微係数に関する微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial f_c} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_1}{\partial f_c} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial f_c} \\ \frac{\partial}{\partial f_c} \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_2}{\partial f_c} \right) = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial f_c} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial f_c} + u_1 \frac{da_1}{df_c} + u_2 \frac{da_2}{df_c} + \frac{db}{df_c} \end{cases}\quad (7.152)$$

ここで、次の変数変換を行う。

$$W = [w_1 \quad w_2]^T = \left[\frac{\partial u_1}{\partial f_c} \quad \frac{\partial u_2}{\partial f_c} \right]^T = \left[\frac{\partial^2 x_1}{\partial f_c^2} \quad \frac{\partial^2 x_2}{\partial f_c^2} \right]^T\quad (7.153)$$

式(7.153)を用い、式(7.152)を書き換えると次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = w_2 \\ \frac{dw_2}{dt} = a_1 w_1 + a_2 w_2 + v \end{cases}\quad (7.154)$$

ここで、

$$v = u_1 \frac{da_1}{df_c} + u_2 \frac{da_2}{df_c} + \frac{db}{df_c}\quad (7.155)$$

式(7.154)を行列表示すると、次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}\quad (7.156)$$

$$\frac{dW}{dt} = AW + V\quad (7.157)$$

ここで、

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}\quad (7.158)$$

上式の行列 A は式(7.147)中の A と同じである。

式(7.155)を行列を用いて表わすと、次式が得られる。

$$\nu = U^T \frac{dA}{df_c} + \frac{db}{df_c} \quad (7.159)$$

$$\nu = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} da_1/df_c \\ da_2/df_c \end{bmatrix} + \frac{db}{df_c} \quad (7.160)$$

ここで、 da_1/df_c と da_2/df_c は、式(7.139)より次式で表わされることがわかる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_1}{df_c} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f_c} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \\ \quad = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \alpha_4 + \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} \alpha_5 \\ \frac{da_2}{df_c} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f_c} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \\ \quad = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \alpha_4 + \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} \alpha_5 \end{array} \right. \quad (7.161)$$

上式を行列表示すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} da_1/df_c \\ da_2/df_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_1 / \partial x_2 \\ \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_{11} & \partial a_1 / \partial k_{12} \\ \partial a_2 / \partial k_{11} & \partial a_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (7.162)$$

同様に、 db/df_c も、式(7.142)より次式で表わされる。

$$\frac{db}{df_c} = \alpha_4 \frac{\partial b_1}{\partial f_c} + \alpha_5 \frac{\partial b_2}{\partial f_c} + \frac{\partial \alpha_5}{\partial f_c} b_2 \quad (7.163)$$

上式の $\partial \alpha_5 / \partial f_c$ は式(7.143)より、 $\partial \alpha_5 / \partial f_c = 2\alpha_3$ で与えられることがわかる。

式(7.163)を行列表示すると、次式が得られる。

$$\frac{db}{df_c} = [\alpha_4 \ \alpha_5] \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial f_c \\ \partial b_2 / \partial f_c \end{bmatrix} + 2\alpha_3 b_2 \quad (7.164)$$

ここで、 $\partial b_1 / \partial f_c$ と $\partial b_2 / \partial f_c$ は次式で計算される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_1}{\partial f_c} &= \frac{\partial b_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} + \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f_c} + \frac{\partial b_1}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \\ &= \frac{\partial b_1}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial b_1}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial b_1}{\partial k_{11}} \alpha_4 + \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} \alpha_5 \end{aligned} \quad (7.165(a))$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_2}{\partial f_c} &= \frac{\partial b_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f_c} + \frac{\partial b_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \frac{\partial b_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \\ &= \frac{\partial b_2}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial b_2}{\partial k_{11}} \alpha_4 + \frac{\partial b_2}{\partial k_{12}} \alpha_5\end{aligned}\quad (7.165(b))$$

式(7.165(a))と式(7.165(b))を行列表示すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial f_c \\ \partial b_2 / \partial f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_1 / \partial x_2 \\ \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_{11} & \partial b_1 / \partial k_{12} \\ \partial b_2 / \partial k_{11} & \partial b_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (7.165)$$

式(7.165)を式(7.164)に代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{db}{df_c} &= [\alpha_4 \quad \alpha_5] \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_1 / \partial x_2 \\ \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + [\alpha_4 \quad \alpha_5] \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_{11} & \partial b_1 / \partial k_{12} \\ \partial b_2 / \partial k_{11} & \partial b_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} + 2\alpha_3 b_2\end{aligned}\quad (7.166)$$

したがって、式(7.162)と式(7.166)の関係式を式(7.160)に代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned}v &= [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_1 / \partial x_2 \\ \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + [u_1 \quad u_2] \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_{11} & \partial a_1 / \partial k_{12} \\ \partial a_2 / \partial k_{11} & \partial a_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \\ &\quad + [\alpha_4 \quad \alpha_5] \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_1 / \partial x_2 \\ \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + [\alpha_4 \quad \alpha_5] \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_{11} & \partial b_1 / \partial k_{12} \\ \partial b_2 / \partial k_{11} & \partial b_2 / \partial k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} + 2\alpha_3 b_2\end{aligned}\quad (7.167)$$

計算に必要な微係数は、「5.2 二次微係数の算定」すでに述べられているが、理解を容易にするために、これらを以下に再記する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left(\frac{p_1}{p_2} - 2 \right) x_1^{p_1/p_2-3} x_2 - \frac{1}{k_{12}} \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} = \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right. \quad (7.168)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 \\ \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} + \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \end{cases} \quad (7.169)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 = \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} = \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} + \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 = \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_2} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} = \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} \end{cases} \quad (7.170)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial k_{11}} = 0 \\ \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 \\ \frac{\partial b_2}{\partial k_{11}} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 = \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial b_2}{\partial k_{12}} = -2 \frac{k_{11}}{k_{12}^3} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{2}{k_{12}^3} x_1^{1/p_2} + 2 \frac{r}{k_{12}^3} \end{cases} \quad (7.171)$$

式(7.157)の二次感度方程式の解法は、システム方程式のそれに準拠すればよい。

式(7.156)を離散化表示すると、次式で表わされることがわかる。

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}_m \quad (7.172)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ 及び $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は「第4回ゼミ」における「5. 二価の非線形貯留関数法の数値解法」で計算された係数と同じである。

式(7.172)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{cases} (w_1)_{m+1} = \phi_1(w_1)_m + \phi_2(w_2)_m + \gamma_2(v)_m \\ (w_2)_{m+1} = \phi_3(w_1)_m + \phi_4(w_2)_m + \gamma_4(v)_m \end{cases} \quad (7.173)$$

式(7.173)を用いると、任意の離散時刻 m における二次微係数 $w_1 = \partial^2 x_1 / \partial f_c^2$ が解析的に算定されたことになる。

一次感度係数 u_1 と式(7.173)の w_1 の値を式(7.151)に代入すれば、流出高 q に関する二次感度係数が得られ、二階ニュートン法及びダビドン法による f_c の最適化手法が可能となる。

以上、ニ値の非線形貯留関数法におけるモデル定数 f_c に関する一次及び二次の感度係数がすべて算出されたので、(i)一階ニュートン法、(ii)二階ニュートン法、(iii)ダビドン法を用いた3種類の最適化手法が実行可能となる。

文責 星 清
仙庭 真司

参考文献

- 1) 仙庭真司・星 清・橋本識秀：導関数に基づく最適化手法の比較，土木学会北海道支部論文報告集，第61号，CD-ROM 概要集，II-9，2005.
- 2) 仙庭真司・星 清・橋本識秀：一次及び二次感度方程式による最適化手法の比較，土木学会第60回年次学術講演会，CD-ROM 概要集，II-51，pp. 101-102，2005.
- 3) 星 清・仙庭真司：一次及び二次導関数に基づく貯留関数法の最適化比較，研究所紀要(XVI)，(財)北海道河川防災研究センター研究所，pp. 301-355，2005.

第8回 流出解析ゼミ

— 流域における Kinematic wave 法と一般化貯留関数法の関係 —

1. はじめに

現在、流出解析に用いられている流出モデルは、分布定数系モデルと集中定数系モデルに大別される。それぞれのモデルの代表的なものとして、Kinematic wave 法と貯留関数法があげられる。Kinematic wave 法は流出現象の水理学的特性をモデル自身に反映することができる特徴をもっている。このモデルにおいては、流域の地形量(斜面長や勾配)と地質特性に関する量(たとえば、マニング型の表面流モデルを用いれば等価粗度)がモデル定数や境界条件に陽型式で含まれている。近年、山地小流域(単位流域)の雨水流出に Kinematic wave モデルを適用して、その適合性を検証している研究成果が数多くなっている。しかしながら、比較的大きい流域への流出解析に Kinematic wave モデルを適用するには、まだ種々の問題が残されている。それらの問題点を列挙すれば、

- (a) 対象流域を単位流域に集中化する際の流域モデルの精粗による懸案地点ハイドログラフに及ぼす影響
- (b) 単位流域ハイドログラフの河道要素における伝播・合成方法
- (c) 単位流域において設定されたモデル定数の懸案地点ハイドログラフに及ぼす影響
- (d) 単位流域数の増大の伴う計算の煩雑さと計算量の増大

等があげられる。

一方、貯留関数法は流出過程の非線形性を比較的単純な構造式で表現でき、しかも、洪水予報や洪水時のダム操作のための洪水流出逐次予測(operational forecast)に要求される計算の簡便さと迅速さを兼ね備えもっている。その反面、従来の貯留関数法の問題点を列挙すれば、

- (a) モデル定数(貯留係数、貯留指数、遅滞時間)と流域特性値ないしは降雨特性値との相互関係が明確化されていない。たとえば、Prasad の貯留関数法における非定常項にかかる係数(K_2)や木村の貯留関数法における遅滞時間(T_l)は流量に依存するという報告がある。しかしながら、流量は本来求めるべき目的となるものであって、定数 K_2 や遅滞時間 T_l が流量に依存しているというのでは、合理的計画洪水流量策定は困難であると考えられる。したがって、貯留関数法は洪水流出の計画予測(design forecast)に十分活用されているとは言いがたい。
- (b) いままでに提案されている貯留関数法のモデル構造式は洪水時に見られる貯留量～流量曲線の 2 倍性を定性的に説明しているに過ぎず、モデル構造が果たして妥当であるかどうか疑問である。最近、カルマン・フィルター理論は洪水流出の逐次予測に最も威力を発揮する一手法と考えられているが、比較的長い予測時間の流出予測問題ではモデル構造の設定が洪水ハイドログラフの予測精度と本質的に関連してくる。したがって、貯留関数法をカルマン流の予測理論と組み合わせて精度の高い流出逐次予測を行おうとすれば、ハイドログラフ全体の形状特性を適確に表現できる貯留関数形構造式の決定が必要となる。

本章では、以上述べた従来の貯留関数法の問題点を解決すべく、まず、貯留量～流量曲線の構造式を矩形降雨波形に対する Kinematic wave 理論解から明確にし、次に、一般化貯留関数を提案して定数の最適化問題をとりあげる。方法論的には、貯留量～流量曲線の 2 倍性を積極的にとり入れ、理論的にもモデル定数同定の上でも取り扱いが容易な Prasad 流の考えを基本とする。このとき、パラメータが流量に依存しないように Prasad モデルに定数を 1 個追加する。

2. Kinematic wave モデル

2.1 斜面流出系のKinematic wave法

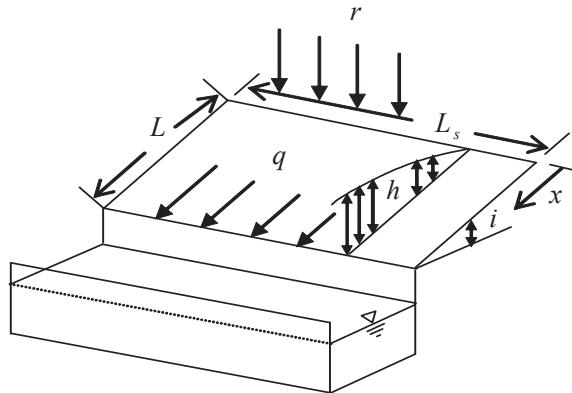
図-1に示す一定勾配斜面上の流出現象を物理モデルによって表現する方法としてKinematic wave法がある。Kinematic wave法は、水理量(斜面上の水深と流量)を時間的にも場所的にも算定できるという点で分布定数系モデルであり、計算が複雑となる。その基本方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad (8.1)$$

$$q = \alpha h^m \quad (8.2)$$

$$s = \int_0^L h(x, t) dx \quad (8.3)$$

$$h(x, 0) = 0, \quad h(0, t) = 0 \quad (8.4)$$



ここで、 t :時間、 x :斜面上流端からの距離、 h :水深、 q :斜面単位幅流量、 s :斜面単位幅貯留量、 r :有効雨量強度、 L :斜面長、 L_s :斜面幅、 α, m :斜面流定数

図-1 一定勾配上の斜面流モデル

式(8.4)はそれぞれ、水深に関する初期条件と境界条件である。式(8.2)は運動の式であり、流れがどのような平均流速の式で表現されるかで、斜面流定数 α, m は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{マニング則: } & \alpha = \sqrt{i}/n, \quad m = 5/3 \\ \text{シェジー則: } & \alpha = c\sqrt{i}, \quad m = 3/2 \\ \text{ダルシー則: } & \alpha = k_s i / \lambda, \quad m = 1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

ここで、 i :斜面勾配、 n :斜面上の等価粗度、 c :シェジー係数、 λ :表層土有効間隙率、 k_s :表層土の透水係数

式(8.1)～式(8.4)のKinematic waveモデルがなんらかの方法によって集中化可能であるとすれば、集中化モデルのパラメータは次式に示されるように流域特性値と降雨特性値によって関連づけられなければならない。

$$\pi = f[g(\alpha, m), h(L, r, t_\alpha, t_r)] \quad (8.6)$$

ここで、 π :集中化モデルのパラメータ、 $f(\cdot)$ 、 $g(\cdot)$ 、 $h(\cdot)$:関数、 L :斜面長、 t_α :最大降雨生起時刻、 t_r :降雨継続時間

関数 g は斜面上の流れの抵抗則に規定される因子であり、関数 h はいわゆるDAD解析の要素に相当している。たとえば、式(8.5)に示されるマニング型の表面流モデルを仮定すれば、関数 g は式(8.7)式で表現される。

$$g(\alpha, m) = g(\sqrt{i}/n, 5/3) \quad (8.7)$$

ここで、 i :斜面勾配、 n :等価粗度

式(8.6)式はあくまでも集中化モデルと分布定数系モデルのパラメータ間の関係を形式的に表現したものにすぎず、6変量間の相関関係を定量化してその関数形を決定することは容易ではない。そこで、実用解析上関数形の近似式を提案するためにも、独立変数の数を減らす必要がある。この目的達成のため、式(8.1)～式(8.4)を無次元化する。

今、 Y および y_* をそれぞれ、変量 y の無次元変量およびその基準化演算子とすると、式(8.1)～式(8.4)中の変量は次式によって関係づけられる。

$$\begin{cases} t = t_* T \\ x = x_* X \\ h = h_* H \\ q = q_* Q \\ r = r_* R \\ s = s_* S \end{cases} \quad (8.8)$$

ここで、 s :単位幅貯留量、 S :無次元貯留量、 s_* :貯留量基準化演算子

式(8.8)を式(8.1)と式(8.2)に代入すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\alpha h_*^{m-1} t_*}{x_*} \frac{\partial H^m}{\partial X} = \frac{r_* t_*}{h_*} R \quad (8.9)$$

上式において、基準化演算子に関する係数を1とすれば、次式が満足されなければならない。

$$\frac{\alpha h_*^{m-1} t_*}{x_*} = 1 \quad , \quad h_* = r_* t_* \quad (8.10)$$

変量 y の基準化演算子 y_* として以下の緒量を採用する。

$$\begin{cases} x_* = L & \text{(斜面長)} \\ r_* = \bar{r} & \text{(平均有効降雨量強度)} \\ t_* = (L(\bar{r})^{1-m}/\alpha)^{1/m} & \text{(到達時間)} \\ h_* = \bar{r}t_* \\ q_* = \alpha h_*^m = L\bar{r} \\ s_* = L\bar{r}t_* \end{cases} \quad (8.11)$$

式(8.8)～式(8.11)を式(8.1)～式(8.4)に代入すると、式(8.12)～式(8.14)の無次元方程式が得られる。

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (8.12)$$

$$Q = H^m \quad (8.13)$$

$$H(X, 0) = 0 \quad , \quad H(0, T) = 0 \quad (8.14)$$

式(8.12)～式(8.14)の無次元方程式から、式(8.6)に対応する集中化モデルパラメータは次式に変換される。

$$\Pi = f[g(1,m), h(1,R,T_\alpha, T_r)] \quad (8.15)$$

ここで、 Π ：無次元集中化モデルのパラメータ、 T_α ：無次元最大降雨生起時刻、 T_r ：無次元降雨継続時間

式(8.11)に示されるように、降雨量の基準化演算子 r_* として平均雨量強度を採用しているので、矩形降雨波形の場合には、 $R = r/\bar{r} = 1$ となり、式(8.15)は次式のように単純化される。なお、無次元領域での降雨量を R として議論を進める。

矩形降雨波形：

$$\Pi = f[g(1,m), h(1,1,0, T_r)] \quad (8.16)$$

式(8.16)は式(8.6)に比べて大幅に変量の数が少なくなっているので、関数形の近似式決定が容易になることがわかる。以後の解析においては、無次元方程式について議論を進め式(8.12)～式(8.14)のKinematic wave モデルを集中化する手法を詳述する。式(8.16)の関数形が決定されれば、式(8.11)の基準化演算子を用いて次元を有する集中化モデルのパラメータが決定される。

降雨量 R を時間のみの関数として、式(8.14)の境界条件を考慮して式(8.12)を X に関して積分すれば、

$$\frac{dS}{dT} = \frac{d}{dT} \int_0^1 H(X, T) dX = R - Q(1, T) \quad (8.17)$$

したがって、式(8.12)は貯留関数法の連続式に変換されたことになり、式(8.17)より貯留量 S は次式で定義されることになる。

$$S(T) = \int_0^1 H(X, T) dX \quad (8.18)$$

すなわち、貯留量 S は斜面上の平均水深に等しくなる。Kinematic wave モデルの集中化とは式(8.18)の右辺の積分値を斜面末端のハイドログラフ $Q(1, T)$ で表現することにほかならない(以後 $Q(1, T)$ を便宜上 $Q(T)$ とする)。すなわち、以下に示す貯留方程式として、どのような形式がもっとも適当であるかを決定することにある。

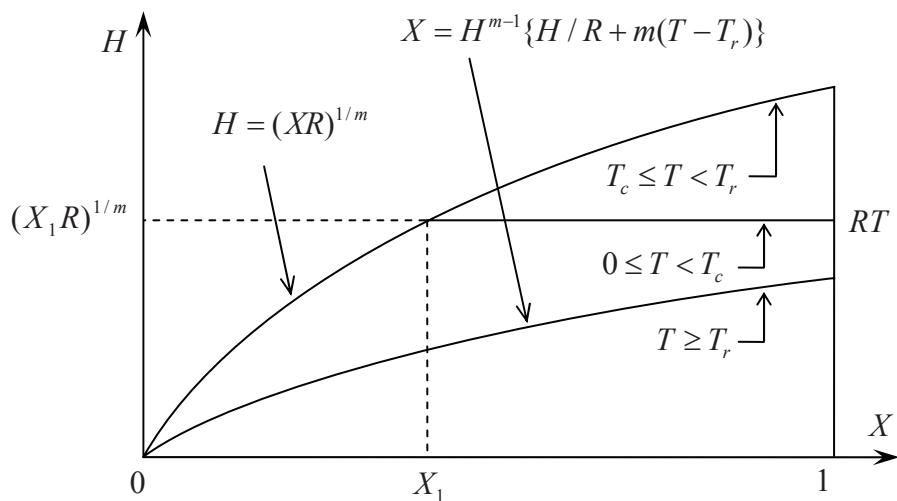
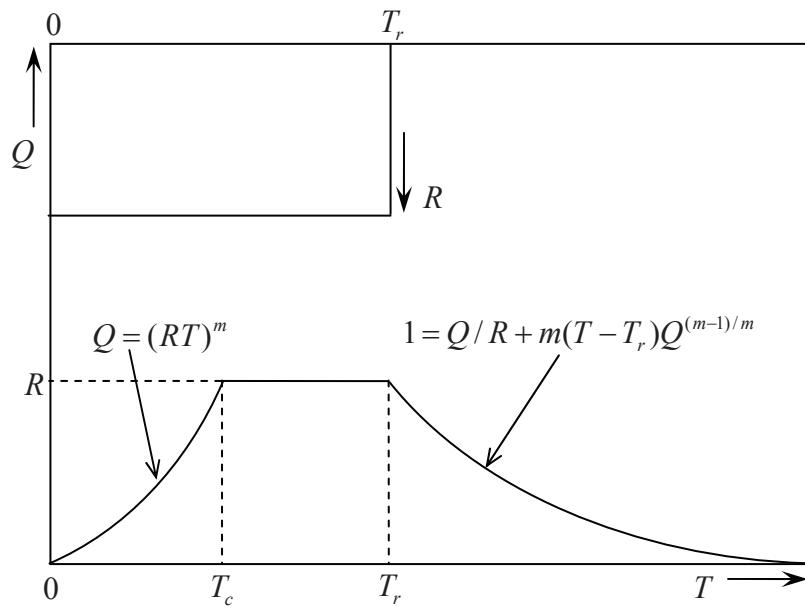


図-2 斜面上の水深分布

図-3 斜面末端 $X = 1$ のハイドログラフ

$$S(T) = f[Q(1, T)] \quad (8.19)$$

ここで、 $f(\cdot)$ は関数を表す。

降雨継続時間 T_r をもつ矩形降雨波形 R に対する式(8.12)～式(8.14)の理論解はよく知られているのでその結果のみを示す。図-2 は水深 H の斜面上の分布であり、図-3 は斜面末端でのハイドログラフである。図中の T_c は式(8.11)からも明らかなように、無次元到達時間であり、 $T_c = R^{(1-m)/m}$ で与えられる。なお、一般の降雨流出系は $T_r > T_c$ と考えられるので、その条件のもとでの結果を図-2 と図-3 に示した。

2.2 斜面上の水深分布 $H(X, T)$

図-2 に示される斜面上の水深分布は、以下のように再記される。

$T_r > T_c = R^{(1-m)/m}$ (無次元到達時間) のとき、

$$(a) \quad H(X, T) = \begin{cases} (RX)^{1/m} & 0 \leq X \leq R^{m-1}T^m \\ RT & R^{m-1}T^m < X < L \\ & 0 \leq T \leq T_c \end{cases} \quad (8.20)$$

$$(b) \quad H(X, T) = (RX)^{1/m} \quad \begin{matrix} 0 \leq X \leq L \\ T_c \leq T \leq T_r \end{matrix} \quad (8.21)$$

$$(c) \quad X = H(X, T)^m / R + mH(X, T)^{m-1}(T - T_r) \quad \begin{matrix} 0 \leq X \leq L \\ T > T_r \end{matrix} \quad (8.22)$$

2.3 斜面上の貯留量 $S(T)$

図-2 の $H(X, T)$ を式(8.18)に代入して式(8.13)の関係を用いれば、貯留方程式は次式で表される。

また、図-3に示した斜面末端での $Q(T)$ も整理して再記する。

$$S(T) = \int_0^1 H(X, T) dX \quad (8.23)$$

(a) $0 \leq T \leq T_c$ のとき

$$\begin{cases} H(1, T) = H(T) = RT \\ Q(1, T) = Q(T) = H^m = (RT)^m \end{cases} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} S(T) &= \int_0^{R^{m-1}T^m} (RX) dX + \int_{R^{m-1}T^m}^1 (RT) dX \\ &= RT - \frac{1}{m+1} R^m T^{m+1} \\ &= Q^{1/m} - \frac{1}{R(m+1)} Q^{(m+1)/m} \end{aligned} \quad (8.25)$$

(b) $T_c \leq T \leq T_r$ のとき

$$\begin{cases} H(X, T) = (RX)^{1/m} \\ H(1, T) = H(T) = R^{1/m} \\ Q(T) = H^m = R \end{cases} \quad (8.26)$$

$$S(T) = \int_0^1 (RX)^{1/m} dX = \frac{m}{m+1} R^{1/m} = \frac{m}{m+1} Q^{1/m} \quad (8.27)$$

(c) $T > T_r$ のとき

$$\begin{cases} X = H(X, T)^{m-1} [H(X, T)/R + m(T - T_r)] \\ 1 = H(1, T)^{m-1} [H(1, T)/R + m(T - T_r)] \\ 1 = \frac{Q}{R} + m(T - T_r) Q^{(m-1)/m} \end{cases} \quad (8.28)$$

図-4に示される概念図を参考にすると、貯留量 $S(T)$ は、次式で算定されることが分かる。

$$\begin{aligned} S(T) &= \int_0^1 H(X, T) dX = H(1, T) - \int_0^{H(1, T)} X dH \\ &= H(1, T) - \int_0^{H(1, T)} [H(X, T)^m / R + mH(X, T)^{m-1}(T - T_r)] dH \\ &= H(1, T) - \frac{1}{R(m+1)} H(1, T)^{m+1} - (T - T_r) H(1, T)^m \end{aligned}$$

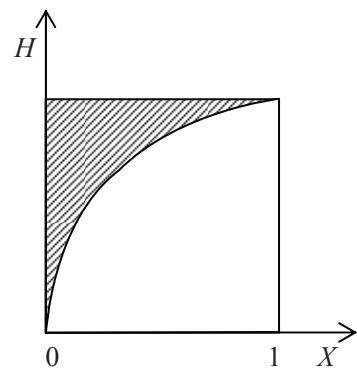


図-4 $T > T_r$ のときの $S(T)$ の計算

$$\begin{aligned}
&= \frac{m-1}{m} H(T) + \frac{1}{Rm(m+1)} H(T)^{m+1} \\
&= \frac{m-1}{m} Q^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{Rm(m+1)} Q^{\frac{(m+1)}{m}}
\end{aligned} \tag{8.29}$$

斜面上の貯留量をまとめて示す。

$$S(T) = \begin{cases} Q^{1/m} - \frac{1}{(m+1)R} Q^{(m+1)/m} & (0 \leq T < T_c) \end{cases} \tag{8.30}$$

$$S(T) = \begin{cases} \frac{m}{m+1} Q^{1/m} & (T_c \leq T < T_r) \end{cases} \tag{8.31}$$

$$S(T) = \begin{cases} \frac{m-1}{m} Q^{1/m} + \frac{1}{m(m+1)R} Q^{(m+1)/m} & (T_r \leq T) \end{cases} \tag{8.32}$$

図-3にはハイドログラフの関数形が示されているので、 dQ/dT をそれぞれ、式(8.30)と式(8.32)の右辺第2項に代入すれば、式(8.33)～式(8.35)が得られる。

$$S(T) = \begin{cases} \frac{m}{m+1} Q^{1/m} + \frac{(R-Q)}{m(m-1)R^2} Q^{(2-m)/m} \frac{dQ}{dT} & (0 \leq T < T_c) \end{cases} \tag{8.33}$$

$$S(T) = \begin{cases} \frac{m}{m+1} Q^{1/m} & (T_c \leq T < T_r) \end{cases} \tag{8.34}$$

$$S(T) = \begin{cases} \frac{m}{m+1} Q^{1/m} + \frac{\{R(m-1)+Q\}(R+Q)}{m^3(m+1)R^2} Q^{(2-2m)/m} \frac{dQ}{dT} & (T_r \leq T) \end{cases} \tag{8.35}$$

以上の解析により、矩形降雨に対するKinematic waveモデルの集中化としての貯留量～流量 $S \sim Q$ 曲線の理論解が得られたことになる。

3. 一般化貯留関数法

Prasadの貯留関数法は $S \sim Q$ 曲線の2価性を最も単純化した表現であると考えられる。Prasadモデルは次式で与えられる。

$$S = K_1 Q^p + K_2 \frac{dQ}{dT} \tag{8.36}$$

ここで、 K_1, K_2, p : パラメータ

式(8.36)のPrasadの貯留関数とKinematic waveモデルから得られた矩形降雨波形に対する貯留関数方程式を比較してみると、パラメータ K_2 は m, R, Q に依存していることがわかる。したがって、Kinematic waveモデルをPrasadモデルによって集中化しようとするれば、 K_2 が流量に依存しているために最適化手法によって一定値となる K_2 を探索することは非常に困難であることが推測される。もし仮に、 K_2 が適当な手法によって Q の関数として同定されたとしても、式(8.6)の関数形を決定する

ことは容易ではない。以上の議論により、Prasadの貯留関数法はKinematic waveモデルの集中化モデルとして適切でないと考えられる。

任意降雨波形に対応する $S \sim Q$ 曲線の理論解は得られず数値解析によらざるを得ない。また、矩形降雨波形についても式(8.33)と式(8.34)に示されるように、ハイドログラフ上昇部と下降部で貯留関数の構造が異なるというのでは、たとえば、洪水流出の逐次予測を行う上でもきわめて不便である。そこで、式(8.33)と式(8.34)を統一して、ここでは次の一般化貯留関数式を提案する。

$$S = K_{11}Q^{p_1} + K_{12} \frac{d}{dT}(Q^{p_2}) \quad (8.37)$$

ここで、 K_{11}, K_{12}, p_1, p_2 : パラメータ
式(8.37)を変形すれば、

$$S = K_{11}Q^{p_1} + K_{12}p_2Q^{p_2-1} \frac{dQ}{dT} \quad (8.38)$$

Prasadモデルにパラメータ p_2 を導入した理由は、式(8.38)からもわかるように、 K_{12} が Q の影響を受けないようにするためにと、式(8.38)が式(8.33)～式(8.35)の一般的表現にほかならないからである。当然のことながら、 $p_2 = 1$ のときには式(8.37)は Prasad モデルに一致する。

4. 一般化貯留関数法のモデル定数最適化

Kinematic wave モデルの集中化としての一般化貯留関数法とそのモデル定数の最適値を求める。ここでは、理論解が既知の矩形降雨波形に対する Kinematic wave モデルの応答に一般化貯留関数法を適用した解析例を示す。矩形降雨波形を考える場合、無次元領域での降雨強度は $R = 1$ となり、変数の数は式(8.16)に示されるように指数 m と継続時間 T_r だけとなる。しかしながら、無次元到達時間は $T_c = R^{(1-m)/m} = 1$ となるため、実際の降雨流出系を考えて $T_c < T_r$ となる T_r を決定すればよい。本事例では、 $T_r = 2$ と固定した。計算過程を要約すれば次のようになる。

- (a) 指数 m を $m = 1.0(0.05)2.0$ と変化させて、図-2 ないし、式(8.24)～式(8.28)に示される理論ハイドログラフと式(8.30)～式(8.32)から計算される貯留量を $T = 0.05$ 毎にサンプリングして、それらをそれぞれ、実測流量 Q_k^* および実測貯留量 S_k^* とみなす。このとき、標本数を $N = 80$ とする。
- (b) 前項で得られた矩形降雨波形、流量系列、貯留量系列を用いて、一般化貯留関数法のパラメータを同定する。このとき、数値解法に必要な計算時間間隔を $\Delta T = 0.01$ とし、計算流量 Q_k と計算貯留量 S_k を $T = 0.05$ 毎に得る。
- (c) 同定されたパラメータ K_{11}, K_{12}, p_1, p_2 と指数 m との関係式を種々の関数形を設定して、最小2乗法により実用推定式を決定する。

上述したように、Kinematic wave モデルの集中化では、指数 m と一般化貯留関数法のパラメータ K_{11}, K_{12}, p_1, p_2 との相互関係が最大の関心事となる。矩形降雨波形に対する Kinematic wave モデル理論 $S \sim Q$ 曲線は式(8.33)～式(8.35)に示される。このとき、ピーク流量 Q_p とそれに対応する貯留量 S_{Qp} は式(8.34)により次式で与えられる。

$$S_{Qp} = \frac{m}{m+1} Q_p^{1/m} \quad (8.39)$$

一方、一般化貯留関数法による $S_{Qp} \sim Q_p$ の関係は、式(8.38)における $dQ/dT = 0$ の条件から、次式で与えられる。

$$S_{Qp} = K_{11} Q_p^{p_1} \quad (8.40)$$

したがって、式(8.39)と式(8.40)により、パラメータ K_{11}, p_1 と指数 m の間には次式が成立する。

$$\begin{cases} K_{11} = m/(m+1) \\ p_1 = 1/m \end{cases} \quad (8.41)$$

モデル定数 K_{11} 及び p_1 と m の関係はそれぞれ、式(8.41)で近似可能であることがわかったので、これらの2個のパラメータを上式で固定して、パラメータ K_{12} と p_2 の再同定を行った。その結果を表-1に示す。表-1に示される K_{12} 及び m の関係式を最小2乗法によって決定し、係数の値をできるだけ簡略化した結果、式(8.42)が得られた。

表-1 雨量強度 $R=1$ と継続期間 T_r をもつ矩形降雨波形に対する貯留関数法の同定
($K_{11} = m/(m+1)$, $p_1 = 1/m$)

| m | K_{11} | K_{12} | p_1 | p_2 | $RMSE^*$ |
|------|----------|----------|--------|--------|----------|
| 1.00 | 0.5000 | 0.0984 | 1.0000 | 1.0201 | 0.0351 |
| 1.05 | 0.5122 | 0.1007 | 0.9524 | 0.9630 | 0.0344 |
| 1.10 | 0.5238 | 0.1020 | 0.9091 | 0.8851 | 0.0327 |
| 1.15 | 0.5349 | 0.1031 | 0.8696 | 0.8195 | 0.0320 |
| 1.20 | 0.5455 | 0.1041 | 0.8333 | 0.7639 | 0.0326 |
| 1.25 | 0.5556 | 0.1051 | 0.8000 | 0.7166 | 0.0331 |
| 1.30 | 0.5652 | 0.1059 | 0.7692 | 0.6752 | 0.0335 |
| 1.35 | 0.5745 | 0.1067 | 0.7407 | 0.6384 | 0.0339 |
| 1.40 | 0.5833 | 0.1074 | 0.7143 | 0.6054 | 0.0342 |
| 1.45 | 0.5918 | 0.1082 | 0.6897 | 0.5753 | 0.0344 |
| 1.50 | 0.6000 | 0.1089 | 0.6667 | 0.5477 | 0.0346 |
| 1.55 | 0.6078 | 0.1096 | 0.6452 | 0.5224 | 0.0340 |
| 1.60 | 0.6154 | 0.1103 | 0.6250 | 0.4989 | 0.0350 |
| 1.65 | 0.6226 | 0.1110 | 0.6061 | 0.4770 | 0.0351 |
| 1.70 | 0.6296 | 0.1117 | 0.5882 | 0.4566 | 0.0351 |
| 1.75 | 0.6364 | 0.1123 | 0.5714 | 0.4376 | 0.0352 |
| 1.80 | 0.6429 | 0.1130 | 0.5556 | 0.4197 | 0.0352 |
| 1.85 | 0.6491 | 0.1136 | 0.5405 | 0.4029 | 0.0353 |
| 1.90 | 0.6552 | 0.1142 | 0.5263 | 0.3870 | 0.0353 |
| 1.95 | 0.6610 | 0.1149 | 0.5128 | 0.3721 | 0.0353 |
| 2.00 | 0.6667 | 0.1155 | 0.5000 | 0.3580 | 0.0352 |

*; Q の平均2乗誤差の平方根 (Root Mean Squares Error)

$$\begin{cases} K_{12} = 0.1m^{0.2} \\ p_2 = 1/m^{3/2} \end{cases} \quad (8.42)$$

図-5と図-6にはそれぞれ、表-1に示される $K_{12} \sim m$ と $p_2 \sim m$ の関係に近似式をあてはめた結果が併記されている。近似式は実用的にも十分な精度を有していると考えられる。

式(8.37)の貯留関数式は「第4回ゼミ」で述べた「二価の非線形貯留方程式」と式形が同一である。今、数値解析上の基本式を再記する。

まず、次のような変数変換を行う。

$$\begin{cases} x_1 = Q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dT}(Q^{p_2}) \end{cases} \quad (8.43)$$

このとき、式(8.37)は次式に変換される。

$$S = K_{11}x_1^{p_1/p_2} + K_{12}x_2 \quad (8.44)$$

連続式 $dS/dT = R - Q$ と式(8.44)より、次の連立微分方程式が得られる。

$$\begin{cases} dx_1/dT = x_2 \\ dx_2/dT = -\frac{K_{11}}{K_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1)^{\frac{p_1}{p_2}-1} x_2 - \frac{1}{K_{12}} (x_1)^{\frac{1}{p_2}} + \frac{R}{K_{12}} \end{cases} \quad (8.45)$$

このとき、初期条件は式(8.46)で得られる。

$$x_1|_{T=0} = x_2|_{T=0} = 0 \quad (8.46)$$

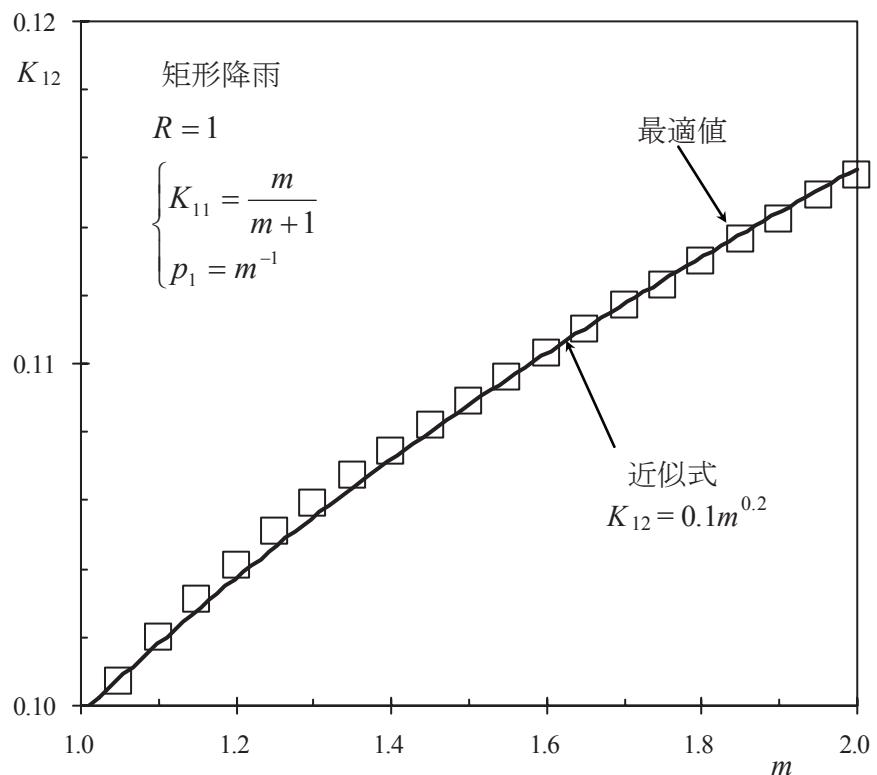
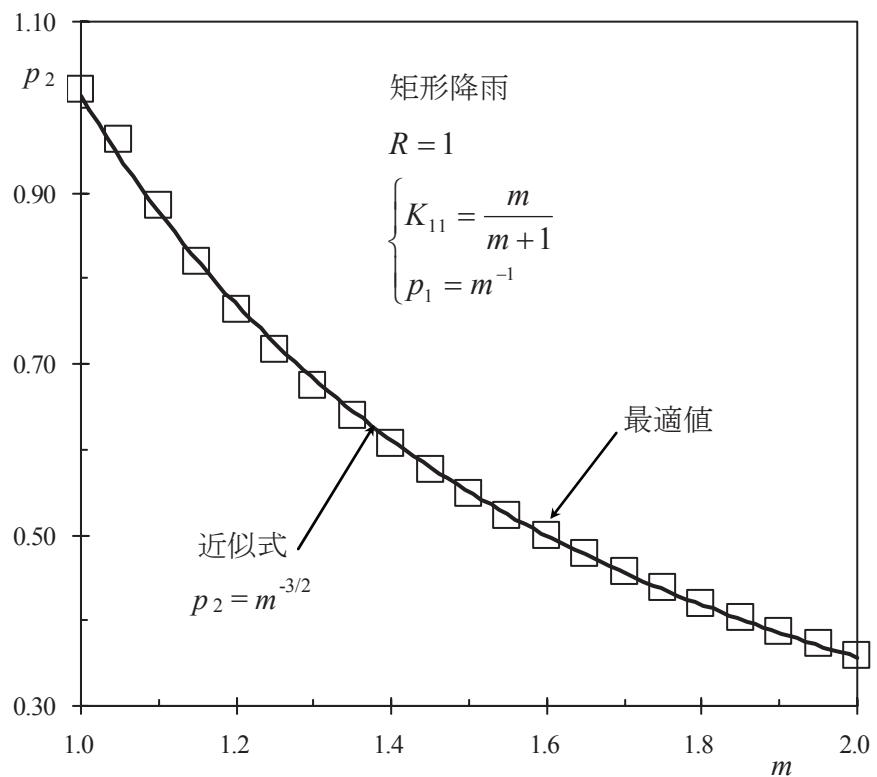
式(8.45)の線形近似解は、「第4回ゼミ」における「二価の非線形貯留方程式の数値解法」に準拠すればよい。

モデル定数の最適値を用いて一般化貯留関数法によるハイドログラフと $S \sim Q$ 曲線の再現性を調べてみる。図-7と図-8には、それぞれ $m = 1.6$ とした場合のハイドログラフと $S \sim Q$ 曲線をKinematic waveモデルによる結果と比較して示した解析例である。矩形降雨波形に対応するハイドログラフ及び $S \sim Q$ 曲線とも一般化貯留関数法はKinematic wave理論による結果を実用上十分な精度で再現している。

5. 実領域での一般化貯留関数法

式(8.37)の無次元貯留方程式は、次式の実領域での方程式に変換される。

$$s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad (8.47)$$

図-5 矩形降雨に対する K_{12} と m の関係図-6 矩形降雨に対する p_2 と m の関係

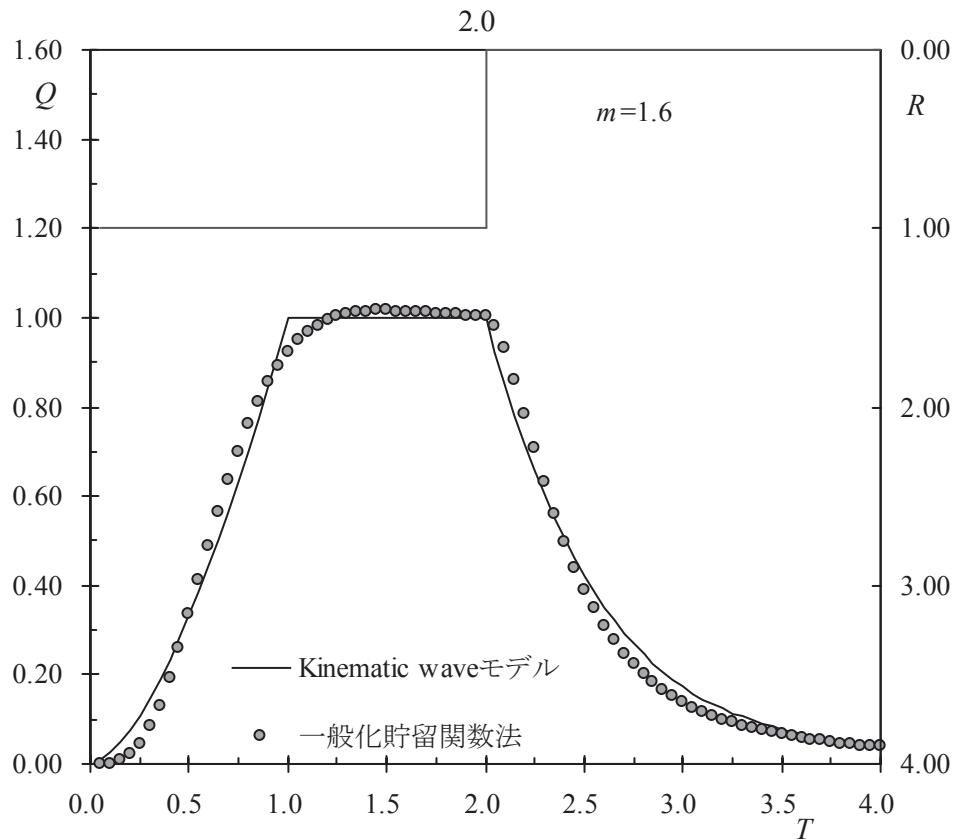


図-7 矩形降雨に対する Kinematic wave 法と貯留関数法によるハイドログラフ

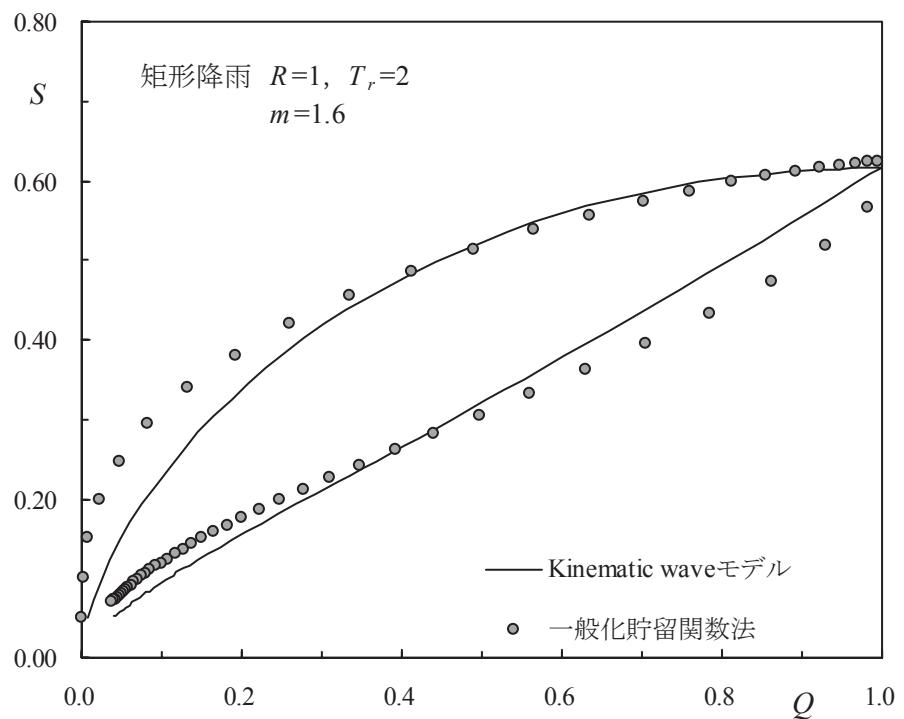


図-8 矩形降雨に対する Kinematic wave 法と貯留関数法による S ～ Q 関係

ここで、 k_{11} と k_{12} は貯留係数である。

斜面上の流量の総和 q_T (m³/s)及び貯留量の総和 s_T (m³)は、基準化演算子と斜面幅 L_s を用いて以下のように示される。

$$\begin{cases} q_T = qL_s = q_*L_sQ \\ s_T = sL_s = s_*L_sS \end{cases} \quad (8.48)$$

上式を無次元量についてまとめると、次式で表される。

$$\begin{cases} Q = q_T/(L_s q_*) = q_T/(L_s L \bar{r}) \\ S = s_T/(L_s s_*) = s_T/(L_s L \bar{r} t_*) \end{cases} \quad (8.49)$$

式(8.49)を式(8.37)に代入すると式(8.50)が得られる。

$$\frac{s_T}{L_s L \bar{r} t_*} = K_{11} \left(\frac{q_T}{L_s L \bar{r}} \right)^{p_1} + K_{12} t_* \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{q_T}{L_s L \bar{r}} \right)^{p_2} \right] \quad (8.50)$$

上式を整理すると、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{s_T}{L_s L} &= K_{11} \bar{r} t_* \bar{r}^{-p_1} \left(\frac{q_T}{L_s L} \right)^{p_1} + K_{12} \bar{r} t_*^2 \bar{r}^{-p_2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{q_T}{L_s L} \right)^{p_2} \right] \\ &= K_{11} \bar{r}^{1-p_1} \left(\frac{L}{\alpha} \right)^{1/m} \bar{r}^{(1/m-1)} (q_T/L_s L)^{p_1} + K_{12} \bar{r}^{1-p_2} \left(\frac{L}{\alpha} \right)^{2/m} \bar{r}^{(2/m-2)} \frac{d}{dt} [(q_T/L_s L)^{p_2}] \end{aligned} \quad (8.51)$$

さらに、式(8.51)は次式に変換される。

$$s_A = K_{11} \left(\frac{L}{\alpha} \right)^{1/m} \bar{r}^{(1/m-p_1)} q_A^{p_1} + K_{12} \left(\frac{L}{\alpha} \right)^{2/m} \bar{r}^{(2/m-1-p_2)} \frac{d}{dt} (q_A^{p_2}) \quad (8.52)$$

ここで、 $s_A = s_T/(L_s L)$ [m], $q_A = q_T/(L_s L)$ [m/s]

上式までの変数は、[m-sec]単位系で表現していたが、[mm-hour]単位系、すなわち、貯留高 s_h (mm)、降雨 r_h (mm/h)、流量 q_h (mm/h)、時間 t_h (h)にて単位変換すると、式(8.52)は次式によって表される。

$$\begin{aligned} s_h / 10^3 &= K_{11} (L/\alpha)^{1/m} [\bar{r}_h / (10^3 \times 3.6 \times 10^3)]^{1/m-p_1} [q_h / (10^3 \times 3.6 \times 10^3)]^{p_1} \\ &\quad + K_{12} (L/\alpha)^{2/m} [\bar{r}_h / (10^3 \times 3.6 \times 10^3)]^{2/m-1-p_2} \frac{1}{3.6 \times 10^3} \frac{d}{dt_h} [q_h / (10^3 \times 3.6 \times 10^3)]^{p_2} \end{aligned} \quad (8.53)$$

あるいは、

$$s_h = K_{11} \left(\frac{10^{3m-6}}{3.6} \right)^{1/m} (L/\alpha)^{1/m} \bar{r}_h^{(1/m-p_1)} q_h^{p_1} + K_{12} \left(\frac{10^{3m-6}}{3.6} \right)^{2/m} (L/\alpha)^{2/m} \bar{r}_h^{(2/m-1-p_2)} \frac{d}{dt_h} (q_h^{p_2}) \quad (8.54)$$

式(8.54)は以下のように簡約される。

$$s_h = k_{11} q_h^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt_h} (q_h^{p_2}) \quad (8.55)$$

また、連続式は次式で与えられる。

$$ds_h/dt_h = r_h - q_h \quad (8.56)$$

ここで、 s_h ：貯留高(mm)、 q_h ：流出高(mm/h)、 r_h ：雨量強度(mm/h)、 t_h ：時間(h)

式(8.55)における実領域での貯留係数 k_{11} と k_{12} は式(8.54)より、次の関係式で与えられることがわかる。

$$k_{11} = (10^{3m-6}/3.6)^{1/m} (L/\alpha)^{1/m} (\bar{r}_h)^{\frac{1}{m}-p_1} K_{11} \quad (8.57)$$

$$k_{12} = (10^{3m-6}/3.6)^{2/m} (L/\alpha)^{2/m} (\bar{r}_h)^{\frac{2}{m}-1-p_2} K_{12} \quad (8.58)$$

ここで、 \bar{r}_h ：平均有効雨量強度(mm/h)、 L ：斜面長(m)、 α ：m-sec 単位の定数

無次元パラメータ K_{11}, K_{12}, p_1, p_2 の関数形は、式(8.41)と式(8.42)で決定されているので、これらの関係式を式(8.57)と式(8.58)に代入すると、パラメータ k_{11} と k_{12} は次式で与えられる。

$$k_{11} = \frac{m}{m+1} (10^{3m-6}/3.6)^{1/m} (L/\alpha)^{1/m} \quad (8.59)$$

$$k_{12} = \frac{m^{1/5}}{10} \left(\frac{m+1}{m} \right)^2 k_{11}^2 (\bar{r}_h)^{2/m-1-p_2} \quad (8.60)$$

$$p_1 = 1/m \quad (8.61)$$

$$p_2 = (1/m)^{3/2} \quad (8.62)$$

式(8.59)には斜面長 L が含まれているので使いづらい面があるので、対象流域を2つの斜面からなる長方形モデルで単純化し、主河道長(L_s)と流域面積(A)の関係にハックの法則を用いると式(8.59)の実用的推定式が作成される。

今、対象流域が、図-9に示されるような流域モデルに単純化できるものとして、次の統計則を仮定する。

$$L = \varepsilon W, \quad A = WL_s, \quad L_s = \eta A^{\xi} \quad (8.63)$$

ここで、 W ：流域幅(km)、 A ：流域面積(km^2)、 L_s ：主河道長ないし斜面幅(km)、 ε, η, ξ ：流域形状値

式(8.63)の第3式がハックの式である。式(8.63)において $\varepsilon = 0.6$ 、 $\eta = 1.35$ 、 $\xi = 0.6$ の値を用い、マニング則による式(8.5)の関係式 $\alpha = \sqrt{i}/n$ と $m = 5/3$ を式(8.59)～式(8.62)に代入すると、次の関係式が得られる。

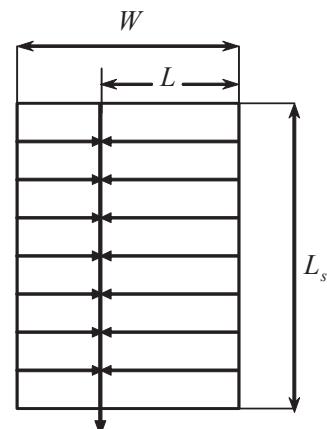


図-9 長方形流域モデル

$$k_{11} = 2.8235 f_c A^{0.24} \quad (8.64)$$

$$k_{12} = 0.2835 k_{11}^2 (\bar{r}_h)^{-0.2648} \quad (8.65)$$

$$p_1 = 0.6 \quad (8.66)$$

$$p_2 = 0.4648 \quad (8.67)$$

$$f_c = (n/\sqrt{i})^{0.6} \quad (8.68)$$

以上、4個の貯留関数モデル定数関係式は、これまでに何度か述べてきた「二価の非線形貯留関数法」の理論的根拠に他ならない。上式における唯一の未知定数はフリクション・ファクター f_c であり、この値が推定されれば、4個の貯留関数モデル定数は一義的に決定されることになり、流量資料が不備な小流域における洪水ハイドログラフを推定するのに有効な手段となる。

文責 宮武 真由子

参考文献

- 1) Eagleson, P.S. : Dynamic Hydrology, McGraw-Hill Book Co., 1970.
- 2) Li, R.M., Simons, D.B. and Stevens, M.A. : Nonlinear Kinematic Wave Approximation for Water Routing, Water Resources Research, 11(2), pp.245-252, 1975.
- 3) Prasad, R. : A Nonlinear Hydrologic System Response Model, Jour. of Hydraul. Div., Proc. of ASCE, Vol.93, No.HY4, pp.201-221, 1967.
- 4) Kiyoshi Hoshi : Sensitivity of Estimates for the Design Flood Magnitude to Hydrologic and Statistical Approaches, 研究所紀要(XII), (財)北海道河川防災研究センター研究所, pp. 207-216, 2001.
- 5) 藤田睦博：斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第314号, pp. 75-86, 1981.
- 6) 星 清・野田 徹：一般化貯留関数法のパラメータ同定, 土木学会北海道支部論文報告集, 第37号, pp. 237-242, 1981.
- 7) 星 清・山岡 勲：雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第26回水理講演会論文集, pp. 273-78, 土木学会, 1982.
- 8) 星 清・村上泰啓：小流域における総合貯留関数法の開発, 第31回水理講演会論文集, pp. 107-112, 土木学会, 1987.
- 9) 北海道開発局土木試験所河川研究室：実用的な洪水流出計算法, pp. 149-158, 1987.
- 10) 角屋 睦・福島 晟・佐合純造：丘陵山地流域モデルと洪水流出モデル, 京都大学防災研究所年報, 第21号B-2, pp. 219-233, 1978.
- 11) 永井明博・角屋 睦：洪水流出モデルの適用比較－丘陵山地流域及び市街地流域を対象として－, 京都大学防災研究所年報, 第21号B-2, pp. 235-249, 1978.
- 12) 永井明博・角屋 睦・杉山博信・鈴木克英：貯留関数法の総合化, 京都大学防災研究所年報, 第21号B-2, pp. 207-220, 1982.

- 13) 高棹琢馬・宝 馨・楠橋康弘：洪水流出モデルの確率過程的評価に関する研究，京都大学防災研究所年報，第28号B-2，pp.221-235，1985.
- 14) 杉山博信・角屋 瞳・永井明博：総合貯留関数モデルに関する研究，農業土木学会論文集134，pp.69-75，1988.
- 15) 木村俊晃：貯留関数法，土木技術資料，第3巻，第12号，1961及び第4巻第1,4,5,6,7号，1962.
- 16) 木村俊晃：貯留関数法，水文研究資料，河鍋書店，57p.，1975.
- 17) 川村 明：2.3 水文学における逆問題，第2章 土木工学に現れる逆問題，土木工学における逆問題入門，土木学会，2000.

第9回 流出解析ゼミ

— 損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル) —

貯留関数法は、集中定数系モデルであり、降雨流出現象の非線形性を比較的単純な構造式で表現できる。また、洪水逐次予測(Operational Forecast)に要求される計算の簡便さと迅速さを兼ね備えていることから、洪水流出解析に広く利用されてきた。

しかしながら、前回までの流出解析ゼミにおいて解説してきたように、従来の貯留関数法では、入力として、流出率などによって算定された有効雨量を用いるため、データの前処理に多くの時間を要する。すなわち、有効雨量の算出には直接流出成分と基底流出成分の分離が必要であり、その分離作業を自動的に行うことが困難な場合が多く、しかも主観的要素が入りやすい。さらに、流出率を洪水期間中、リアルタイムに求めることは非常に困難である。したがって、洪水逐次予測という観点からも、観測雨量と観測流量を直接取り込むことができる流出モデルがあれば、より実用性が高まると考えられる。

以上の現実的課題を踏まえて、ここでは、貯留関数モデル自身に有効雨量を表現できるパラメータの導入を図る。有効雨量と損失雨量はコインの表裏の関係にあることから、降雨流出過程に含まれるすべての損失を1個のモデル定数で代表させる。すなわち、損失機構を含む貯留関数法を開発し、実測雨量と実測流量を直接流出解析に用いる。

その結果、貯留関数モデル自身に損失項を表す未知定数を含めることができるので、この損失パラメータの自動最適化が可能となる。また、従来の方法と異なり、流出成分分離過程における主観的判断が取り除かれる。

1. 損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)

図-1に示す損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)を想定すると、基礎式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r - q - b + q_0 \\ s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ b = k_{13}q \\ q_0 = q_B \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad (9.1)$$

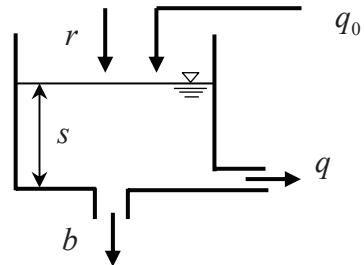


図-1 1段タンク型貯留関数モデル

ここに、 s : 貯留高[mm]、 r : 観測雨量[mm/h]、 q : 観測流出高[mm/h]、 b : 損失高[mm/h]、 q_0 : 基底流出高[mm/h]、 q_B : 初期流出高[mm/h]、 k_{11}, k_{12} : 貯留係数、 k_{13} : 損失係数、 p_1, p_2 : 貯留指數、 λ : 減衰係数

式(9.1)に示される損失項を含む貯留関数法の特徴を以下に要約して述べる。

- (a) 式(9.1)に記述される貯留関数式は「第8回ゼミ」で述べた Kinematic wave 法を貯留関数法に理論的に集中化したモデルを基本としている。
- (b) 降雨流出過程における不確定なすべての損失(蒸発散・浸透・初期損失など)を損失項 b でパラメタライズしている。
- (c) 流域内の湿潤状態を考慮するため、基底流出高 q_0 を導入している。基底流出高 q_0 の導入は、解析期間内

の総流出量 Σq が総降雨量 Σr を上回る際に計算不可能となることへの対応策でもあり、強制入力として与えることによって水収支のバランスが保たれている。なお、 λ はハイドログラフ減水部の標準透減曲線から得られる流域に固有な値である。北海道内における 650 例の既往洪水資料を解析した結果、平均値として、 $\lambda=0.019$ の値が得られている。北海道内の一級河川・13 水系における λ の値は後述する。

- (d) 「第8回ゼミ」で述べたように、モデル定数 p_1 と p_2 の値は、表面流が卓越する比較的大きな出水を解析対象とする場合、マニング則を想定すると、 $p_1=0.6$ 、 $p_2=0.4648$ に近似できる。したがって、本報告においても上記の値に固定した。
- (e) モデル定数 k_{11} と k_{12} に関しても、「第8回ゼミ」の研究成果に基づき、次の関係式が成立すると仮定している。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11} A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \end{cases} \quad (9.2)$$

ここに、 A ：流域面積 [km²]、 \bar{r} ：平均雨量強度 [mm/h]、 c_{11}, c_{12} ：未知定数

モデル定数 k_{11} は流域特性値に、 k_{12} は流域・降雨特性値の双方に依存して変化するので、各定数の流出に及ぼす影響を独立に評価できないことになる。一方、係数 c_{11} と c_{12} は流域・降雨特性に依存しないことが望ましく、互いに無相関であれば、それぞれの効果を独立に評価することができる。その結果、「損失項を含む貯留関数法」における未知定数は、 c_{11}, c_{12}, k_{13} の 3 個となり、その最適値を同定して、採用モデルの検証を行い、モデル定数の総合化を図る。

2. 非線形方程式の数値解法

式(9.1)の貯留関数モデルの解法にあたって、次の変数変換を行う。

$$x_1 = q^{p_2}, \quad x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad (9.3)$$

式(9.1)と式(9.3)より、非線形連立常微分方程式(9.4)を得る。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, k_{11}, k_{12}, c_{13}) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \end{cases} \quad (9.4)$$

ここに、

$$c_{13} = 1 + k_{13} \quad (9.5)$$

初期条件は次式で与えられる。

$$x_{1|t=0} = q_B^{p_2}, \quad x_{2|t=0} = 0 \quad (9.6)$$

ここで、 q_B ：初期流出高

前回までに述べた「二価の非線形貯留関数法」によるシステム方程式と式(9.4)の相違点は、右辺第 2 項目と第 3 項目にそれぞれ、 c_{13} と q_0 が追加されたことにある。したがって、式(9.4)の線形近似解は「第4回ゼミ」

における「5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法」を準拠すれば、次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

式(9.7)はさらに式(9.8)のようにベクトル表示できる。

$$\frac{dX}{dt} = AX + D \quad (9.8)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 - \frac{1}{k_{12}} \frac{c_{13}}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \\ d_1 = \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \end{cases} \quad (9.10)$$

式(9.8)の差分解は、「第4回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して容易に求めることができる。

3. 目的関数

モデル定数の最適化は、観測流量 q_i^* と計算流量 $q_i(c_{11}, c_{12}, c_{13})$ の誤差の 2 乗和、 $e_i^2(c_{11}, c_{12}, c_{13})$ ができるだけ小さくなるように定数を同定することを目的としている。したがって、次式に示す平均 2 乗誤差(Mean Squares Error : MSE) を最小とする目的関数(評価関数) $J(c_{11}, c_{12}, c_{13})$ を採用する。

$$\underset{c_{11}, c_{12}, c_{13}}{\text{Min}} J(c_{11}, c_{12}, c_{13}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2(c_{11}, c_{12}, c_{13}) \quad (9.11)$$

ここに、 $J(c_{11}, c_{12}, c_{13})$: 目的関数、 $e_i(c_{11}, c_{12}, c_{13})$: 誤差項、 N : 標本数

また、誤差項は次式で与えられる。

$$e_i(c_{11}, c_{12}, c_{13}) = q_i^* - q_i(c_{11}, c_{12}, c_{13}) \quad (9.12)$$

ここに、 q_i^* : 観測流量、 $q_i(c_{11}, c_{12}, c_{13})$: モデル定数が規定されたときの計算流量

今、新たにモデル定数ベクトル K を定義する。

$$K = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]^T \quad (9.13)$$

式(9.11)で定義された目的関数は「第5回ゼミ」において記述した「2. 目的関数」と同一の特性を有している。

4. 感度係数の算定

「第5回ゼミ」の「8. 感度係数の算定」において、一次感度係数と二次感度係数を解析的に算定する方法を詳述してきた。その手順に従って、感度係数の算定結果を以下に要約して示す。

4.1 一次感度方程式の解法

式(9.4)をモデル定数 k_{11} , k_{12} 及び c_{13} に関して微分すると、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = u_4 \\ \frac{du_2}{dt} = u_5 \\ \frac{du_3}{dt} = u_6 \\ \frac{du_4}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_4 + b_1 \\ \frac{du_5}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_5 + b_2 \\ \frac{du_6}{dt} = a_1 u_3 + a_2 u_6 + b_3 \end{array} \right. \quad (9.14)$$

上式を行列表示すると、次式となる。

$$\frac{dU}{dt} = A_1 U + B \quad (9.15)$$

ここで、

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 \\ b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{c_{13}}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} - \frac{1}{k_{12}^2} (r + q_0) \\ b_3 = \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2} \end{array} \right. \quad (9.16)$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial k_{11} \\ \partial x_1 / \partial k_{12} \\ \partial x_1 / \partial c_{13} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_2 / \partial k_{11} \\ \partial x_2 / \partial k_{12} \\ \partial x_2 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \quad (9.17)$$

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{array} \right] \quad (9.18)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

式(9.17)を用い、式(9.15)を行列表示すると次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

式(9.20)を離散化表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \phi_3 I & \phi_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}_m \quad (9.21)$$

ここで、 I は (3×3) の単位行列である。

$$\begin{aligned} (U_1)_{m+1} &= \phi_1 (U_1)_m + \phi_2 (U_2)_m + \gamma_2 (B_2)_m \\ (U_2)_{m+1} &= \phi_3 (U_1)_m + \phi_4 (U_2)_m + \gamma_4 (B_2)_m \end{aligned} \quad (9.22)$$

式(9.22)を要素展開すると、次の漸化式が得られる。

$$\begin{cases} (u_1)_{m+1} = \phi_1 (u_1)_m + \phi_2 (u_4)_m + \gamma_2 (b_1)_m \\ (u_2)_{m+1} = \phi_1 (u_2)_m + \phi_2 (u_5)_m + \gamma_2 (b_2)_m \\ (u_3)_{m+1} = \phi_1 (u_3)_m + \phi_2 (u_6)_m + \gamma_2 (b_3)_m \\ (u_4)_{m+1} = \phi_3 (u_1)_m + \phi_4 (u_4)_m + \gamma_4 (b_1)_m \\ (u_5)_{m+1} = \phi_3 (u_2)_m + \phi_4 (u_5)_m + \gamma_4 (b_2)_m \\ (u_6)_{m+1} = \phi_3 (u_3)_m + \phi_4 (u_6)_m + \gamma_4 (b_3)_m \end{cases} \quad (9.23)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ 等の係数は「第4回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して容易に求めることができる。

流出高 q に関する感度係数は、 $q = x_1^{1/p_2}$ の関係式から、次式により容易に計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial k_{11}} = \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} u_1 \\ \frac{\partial q}{\partial k_{12}} = \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} u_2 \\ \frac{\partial q}{\partial c_{13}} = \frac{\partial q}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} u_3 \end{cases} \quad (9.24)$$

式(9.24)の右辺に示される感度係数 u_1 , u_2 及び u_3 は、式(9.23)あるいは式(9.17)のベクトル U_1 の 3 要素に対応していることが分かる。

ここで提案した「損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数法モデル)」の最適化定数は式(9.2)に示される c_{11} と c_{12} 及び式(9.5)に与えられる c_{13} の未知数であるから、 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の感度係数が必要となる。これらの一次微係数(一次感度係数)は次式で計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial c_{11}} = \frac{\partial q}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = (A^{0.24}) \frac{\partial q}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial q}{\partial c_{12}} = \frac{\partial q}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = (k_{11}^2 r^{-0.2648}) \frac{\partial q}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial q}{\partial c_{13}} = \frac{\partial q}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (9.25)$$

以上、一次感度係数が算出されたので、「第5回ゼミ」で述べた「3. 一階ニュートン法」による計算手順に準拠してモデル定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の最適化が可能となる。

4.2 二次感度方程式の解法

式(9.14)をパラメータ k_{11} , k_{12} 及び c_{13} について微分すると、次の二次感度方程式が得られる。

$$\frac{dW}{dt} = A_1 W + V \quad (9.26)$$

ここで、

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}, & W_1 &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial k_{11} & \partial u_1 / \partial k_{12} & \partial u_1 / \partial c_{13} \\ \partial u_2 / \partial k_{11} & \partial u_2 / \partial k_{12} & \partial u_2 / \partial c_{13} \\ \partial u_3 / \partial k_{11} & \partial u_3 / \partial k_{12} & \partial u_3 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial^2 x_1 / \partial k_{11}^2 & \partial^2 x_1 / \partial k_{11} \partial k_{12} & \partial^2 x_1 / \partial k_{11} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_1 / \partial k_{12} \partial k_{11} & \partial^2 x_1 / \partial k_{12}^2 & \partial^2 x_1 / \partial k_{12} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_1 / \partial c_{13} \partial k_{11} & \partial^2 x_1 / \partial c_{13} \partial k_{12} & \partial^2 x_1 / \partial c_{13}^2 \end{bmatrix} \quad (9.27) \\ W_2 &= \begin{bmatrix} w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{16} & w_{17} & w_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_4 / \partial k_{11} & \partial u_4 / \partial k_{12} & \partial u_4 / \partial c_{13} \\ \partial u_5 / \partial k_{11} & \partial u_5 / \partial k_{12} & \partial u_5 / \partial c_{13} \\ \partial u_6 / \partial k_{11} & \partial u_6 / \partial k_{12} & \partial u_6 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \partial^2 x_2 / \partial k_{11}^2 & \partial^2 x_2 / \partial k_{11} \partial k_{12} & \partial^2 x_2 / \partial k_{11} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_2 / \partial k_{12} \partial k_{11} & \partial^2 x_2 / \partial k_{12}^2 & \partial^2 x_2 / \partial k_{12} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_2 / \partial c_{13} \partial k_{11} & \partial^2 x_2 / \partial c_{13} \partial k_{12} & \partial^2 x_2 / \partial c_{13}^2 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

W_1 と W_2 はともに (3×3) の二次微係数からなるヘシアン行列で、対称行列である。

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

$$\begin{cases} v_{11} = u_1 \frac{da_1}{dk_{11}} + u_4 \frac{da_2}{dk_{11}} + \frac{db_1}{dk_{11}}, \quad v_{12} = u_1 \frac{da_1}{dk_{12}} + u_4 \frac{da_2}{dk_{12}} + \frac{db_1}{dk_{12}}, \quad v_{13} = u_1 \frac{da_1}{dc_{13}} + u_4 \frac{da_2}{dc_{13}} + \frac{db_1}{dc_{13}} \\ v_{21} = u_2 \frac{da_1}{dk_{11}} + u_5 \frac{da_2}{dk_{11}} + \frac{db_2}{dk_{11}}, \quad v_{22} = u_2 \frac{da_1}{dk_{12}} + u_5 \frac{da_2}{dk_{12}} + \frac{db_2}{dk_{12}}, \quad v_{23} = u_2 \frac{da_1}{dc_{13}} + u_5 \frac{da_2}{dc_{13}} + \frac{db_2}{dc_{13}} \\ v_{31} = u_3 \frac{da_1}{dk_{11}} + u_6 \frac{da_2}{dk_{11}} + \frac{db_3}{dk_{11}}, \quad v_{32} = u_3 \frac{da_1}{dk_{12}} + u_6 \frac{da_2}{dk_{12}} + \frac{db_3}{dk_{12}}, \quad v_{33} = u_3 \frac{da_1}{dc_{13}} + u_6 \frac{da_2}{dc_{13}} + \frac{db_3}{dc_{13}} \end{cases} \quad (9.30)$$

変量 a_1, a_2, b_1, b_2 及び b_3 は式(9.16)で定義される。また、式(9.26)中の行列 A_i は式(9.18)で与えられる。式(9.30)を行列表示すると、次式が得られる。

$$V_2 = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} = U_* \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \frac{\partial B}{\partial X} U_*^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (9.31)$$

式(9.31)の誘導に関しては、「第5回ゼミ」の「8.3 二次微係数の算定」を参照されたい。式(9.31)中の U_* は、式(9.17)で定義される (3×1) である一次感度係数ベクトル U_1 と U_2 を次式に示す行列で置き換えたものである。

$$U_* = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_4 \\ u_2 & u_5 \\ u_3 & u_6 \end{bmatrix} \quad (9.32)$$

式(9.31)中の $\partial A / \partial X, \partial A / \partial K, \partial B / \partial X$ 及び $\partial B / \partial K$ の行列は、以下のように定義される行列である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_1 / \partial x_2 \\ \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial K} = \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_{11} & \partial a_1 / \partial k_{12} & \partial a_1 / \partial c_{13} \\ \partial a_2 / \partial k_{11} & \partial a_2 / \partial k_{12} & \partial a_2 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial B}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_1 / \partial x_2 \\ \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_2 \\ \partial b_3 / \partial x_1 & \partial b_3 / \partial x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial B}{\partial K} = \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_{11} & \partial b_1 / \partial k_{12} & \partial b_1 / \partial c_{13} \\ \partial b_2 / \partial k_{11} & \partial b_2 / \partial k_{12} & \partial b_2 / \partial c_{13} \\ \partial b_3 / \partial k_{11} & \partial b_3 / \partial k_{12} & \partial b_3 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.33)$$

上式の行列要素は式(9.10)と式(9.16)の関係式から次式で計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left(\frac{p_1}{p_2} - 2 \right) x_1^{p_1/p_2-3} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12} p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} = \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (9.34)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 \\ \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{c_{13}}{p_2} x_1^{1/p_2-1} + \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 \\ \frac{\partial a_1}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12} p_2} x_1^{1/p_2-1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial c_{13}} = 0 \end{cases} \quad (9.35)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} = \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}}, \quad \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} = \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}}, \quad \frac{\partial b_2}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial b_3}{\partial x_1} = \frac{\partial a_1}{\partial c_{13}}, \quad \frac{\partial b_3}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (9.36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial k_{11}} = 0 \\ \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} = \frac{1}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 \\ \frac{\partial b_1}{\partial c_{13}} = 0 \\ \frac{\partial b_2}{\partial k_{11}} = \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial b_2}{\partial k_{12}} = -2 \frac{k_{11}}{k_{12}^3} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{2c_{13}}{k_{12}^3} x_1^{1/p_2} + \frac{2}{k_{12}^3} (r + q_0) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b_2}{\partial c_{13}} = \frac{1}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} \\ \frac{\partial b_3}{\partial k_{11}} = \frac{\partial b_1}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial b_3}{\partial k_{12}} = \frac{\partial b_2}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial b_3}{\partial c_{13}} = 0 \end{array} \right. \quad (9.37)$$

式(9.36)の関係式より、 $\partial A/\partial K$ と $\partial B/\partial X$ の間には、次の関係が成立していることがわかる。

$$\frac{\partial B}{\partial X} = \left(\frac{\partial A}{\partial K} \right)^T \quad (9.38)$$

また、式(9.33)の $\partial A/\partial X$ と $\partial B/\partial K$ は対称行列であることから、行列 V_2 も対称行列になることに注意すべきである。

式(9.38)を用いると、式(9.31)は次のように表される。

$$V_2 = U_* \frac{\partial A}{\partial X} U_*^T + U_* \frac{\partial A}{\partial K} + \left(U_* \left(\frac{\partial A}{\partial K} \right) \right)^T + \frac{\partial B}{\partial K} \quad (9.39)$$

式(9.27)と式(9.28)を用い、式(9.26)を行列表示すると次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (9.40)$$

式(9.40)を離散化表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 I & \phi_2 I \\ \phi_3 I & \phi_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 I & \gamma_2 I \\ \gamma_3 I & \gamma_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_m \quad (9.41)$$

式(9.41)は以下のように要素展開できる。

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ \hline w_7 & w_8 & w_9 \\ \hline w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{16} & w_{17} & w_{18} \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 \\ \hline \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{16} & w_{17} & w_{18} \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 \\ \hline \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}_m \quad (9.42)$$

式(9.42)は以下に示すように、容易に計算されることを意味している。

$$\begin{aligned}(W_1)_{m+1} &= \phi_1(W_1)_m + \phi_2(W_2)_m + \gamma_2(V_2)_m \\ (W_2)_{m+1} &= \phi_3(W_1)_m + \phi_4(W_2)_m + \gamma_4(V_2)_m\end{aligned}\quad (9.43)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ 等の係数は、「第4回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して容易に求めることができる。

式(9.24)をモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} について微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}^2} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \right)^2 + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}^2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11} \partial k_{12}} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \right) + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11} \partial c_{13}} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} \right) + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11} \partial c_{13}} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12} \partial k_{11}} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \right) + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12} \partial k_{11}} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}^2} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \right)^2 + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}^2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12} \partial c_{13}} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} \right) + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12} \partial c_{13}} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}^2} = \frac{1}{p_2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2-2} \left(\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} \right)^2 + \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}^2} \end{cases} \quad (9.44)$$

未知定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} に関する二次感度係数は、式(9.25)と式(9.44)の関係式を用いることにより、次式で算定される。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q}{\partial c_{11}^2} = (A^{0.48}) \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11}^2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{11} \partial c_{12}} = (A^{0.24}) (k_{11}^2 \bar{r}^{-0.2648}) \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11} \partial k_{12}} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{11} \partial c_{13}} = (A^{0.24}) \frac{\partial^2 q}{\partial k_{11} \partial c_{13}} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{12}^2} = (k_{11}^4 \bar{r}^{-0.5296}) \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12}^2} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{12} \partial c_{13}} = (k_{11}^2 \bar{r}^{-0.2648}) \frac{\partial^2 q}{\partial k_{12} \partial c_{13}} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}^2} \end{cases} \quad (9.45)$$

ダビドン法を用いた c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の最適化手法は「第5回ゼミ」における「6. ダビドン(Davidon)法」を準拠すればよい。このとき必要となる一次感度係数と二次感度係数は式(9.25)と式(9.45)にて与えられることになる。

文責 星 清
東海林 勉

参考文献

- 1) 星 清・山岡 熱：雨水流法と貯留関数法との相互関係，第26回水理講演会論文集，pp. 273-278，土木学会，1982.
- 2) 田中 敦・藤田睦博・清水康行：損失機構を含む貯留関数法に関する研究，土木学会北海道支部論文報告集，第53号(B)，pp. 54-59，1997.
- 3) 八田茂実・藤田睦博・山梨光訓：損失を考慮した不飽和浸透流理論の集中化，土木学会論文集，No. 600/II-44，pp. 11-21，1998.
- 4) 平澤陽一・馬場仁志・星 清：損失を考慮した貯留関数のパラメータ総合化，土木学会北海道支部論文報告集，第54号(B)，pp. 34-37，1998.
- 5) 馬場仁志・星 清・橋本識秀：損失機構を導入した総合化貯留関数モデル，北海道開発土木研究所月報，No. 550，pp. 2-9，1999.
- 6) 馬場仁志・星 清・橋本識秀：損失機構を組み合わせた貯留関数モデルの総合化，水工学論文集，第43卷，pp. 1085-1090，土木学会，1999.
- 7) Baba, H., Hoshi, K. and Hashimoto, N. : Synthetic Storage Routing Model Coupled with Loss Mechanisms, J. of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol. 18, No. 1, pp. 61-71, JSCE, 2000.
- 8) 佐藤力信・嵯峨 浩・馬場仁志・星 清：損失機構を含む貯留関数法を応用したタンクモデルの提案，土木学会北海道支部論文報告集，第55号(B)，pp. 32-33，1999.
- 9) 佐々木靖博・星 清・井出康郎・松木賢治：北海道における損失項を含む総合化貯留関数法，土木学会北海道支部論文報告集，第56号(B)，pp. 210-215，2000.
- 10) 佐々木靖博・星 清・井出康郎：損失項を含む総合化貯留関数法の精度評価，河川技術に関する論文集，第6卷，土木学会，pp. 303-308，2000.
- 11) 佐々木靖博・星 清・井出康郎：損失項を含む総合貯留関数法の開発，北海道開発土木研究所月報，No. 562，pp. 2-10，2000.
- 12) 星 清・佐々木靖博：損失項を含む総合化貯留関数法の開発，研究所紀要(XI)，(財)北海道河川防災研究センター研究所，pp. 95-106，2000.
- 13) 園山裕士・星 清・井出康郎：損失項を考慮した貯留関数法の一般化，河川技術に関する論文集，第7卷，土木学会，pp. 465-468，2001.
- 14) 星 清・佐々木靖博：損失項を含む総合化貯留関数法の精度評価，研究所紀要(XII)，(財)北海道河川防災研究センター研究所，pp. 169-178，2001.
- 15) 園山裕士・星 清：ダム流域を対象とした損失機構を有する貯留関数法の総合化，研究所紀要(XIII)，(財)北海道河川防災研究センター研究所，pp. 207-215，2002.
- 16) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行：單一流域を対象とした貯留関数法の精度比較，189p.，2002.

第10回 流出解析ゼミ

— フィルターフレーバーを活用した2段タンク型貯留関数モデル —

前回のゼミにおいては、降雨流出過程における浸透・蒸発散・初期損失・葉面貯留などの短期流出に含まれない降雨成分を「損失項」として貯留関数法に取り入れ、主観的な事前作業である有効雨量の算出を必要としない客觀性に優れた「損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)」について検討を行ってきた。

しかしながら、1段タンク型貯留関数モデルによる解析を行った結果、再現が不十分である事例がいくつか見られた。その再現の特徴としては、以下の点が挙げられる。

- (a) ピーク流量が低く再現される。
- (b) 減水部の再現形状が観測値と合わない。

また、数多くの洪水例を解析した経験によると、計算洪水ハイドログラフの再現性がよくない事例は以下の場合が多いことが判明した。

- (a) 火山灰土壤のような浸透性が高い流域では、損失及び遅れて流出していく成分を正しく表現できるようなモデル構成でなければ、洪水ハイドログラフ全体の形状特性、とくに、低減曲線部の再現がよくない。
- (b) 長期にわたって断続的な降雨が続き、流域の保水能力が小さくなっている場合、その影響を正確に評価することができなければ、その後の集中豪雨に対する出水特性がうまく再現できない。

1段タンク型貯留関数モデルにおいては、上述の浸透により遅れる流出成分の再現が不十分であることから再現性が劣る洪水例があったと考えられる。

従来の貯留関数法は有効雨量を用いるために、「表面・中間流出成分」の解析に主眼をおいた手法と言える。また、前回のゼミにおいて検討した1段タンク型貯留関数モデルは、実測雨量を直接用いるために損失を考慮したが、上述した洪水事例に含まれるような問題点を解決するためには、「地下水流出成分」を表現できるモデルが必要となってくる。

基本高水の再検討には、貯留関数法を用いている実務者(技術者)が圧倒的に多い。すなわち、貯留関数法は実務者にとってはなじみやすい。一方、地下水流出成分が考慮されるタンクモデルや「フィルター成分分離法」は研究レベルでは数多く適用され、研究成果も多いが、基本高水での検討例は少ない。

一般に、全流量は2ないし3個の流出成分に分離されることが知られている(図-1参照)。したがって、本章では研究と実務の溝を埋め、理解しやすい貯留関数モデルを構築するために、流出成分を「表面・中間流出成分」と「地下水流出成分」とに分離し、比較的早く流出する「表面・中間流出成分」を1段目タンク型で表現し、浸透により遅く流出する「地下水流出成分」については2段目タンクを設けて表現する2段タンク型貯留関数モデルを提案する。

流出成分の分離法として、日野・長谷部が提案している「数学的フィルター成分分離法」を用いて表面・中間流出成分と地下水流出成分に分離するため、客觀性が維持される。その結果、流出特性の違いを考慮して、全流出量を2成分に分離して解析することで、洪水ハイドログラフ再現性の向上を図ることが可能となる。また、地下水流出成分の未知定数を最適化手法に用いることなく決定できるので、計算負担を増大させない特徴を有している。

「フィルター分離法を活用した2段タンク型貯留関数モデル」の基本的な概念は、図-2に示される。また、2段タンク型貯留関数モデルの計算フローを図-3に示す。日野・長谷部は表面・中間流出成分と地下水流出

成分を共に線形モデルで表現している。一方、基本高水の検討には、非線形貯留関数法が用いられており、表面・中間流出成分の解析が主体である。したがって、図-3に示されるように、1段目タンクの表面・中間流出成分については、中小洪水に対応できる「二価の線形貯留関数法」と大出水を表現できる1段タンク型貯留関数モデルと同様に「二価の非線形貯留関数法」についても検討を行う。地下水流出成分を表す2段目タンクは「二価の線形貯留関数法」を用いる。

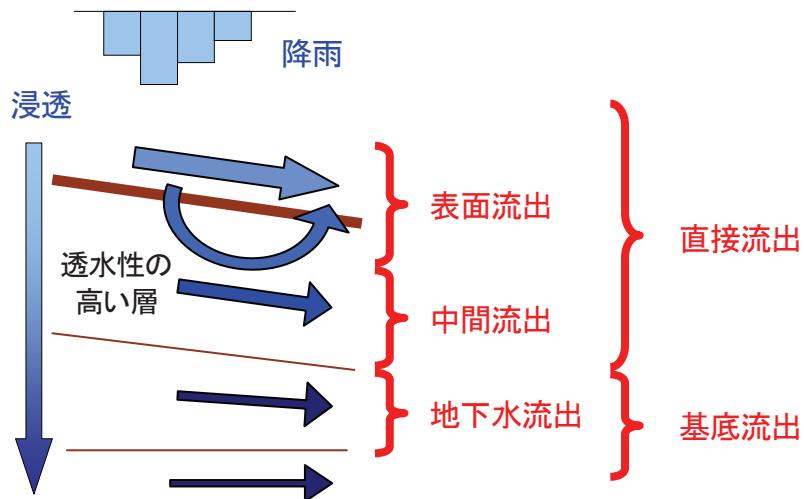


図-1 流出成分の構成

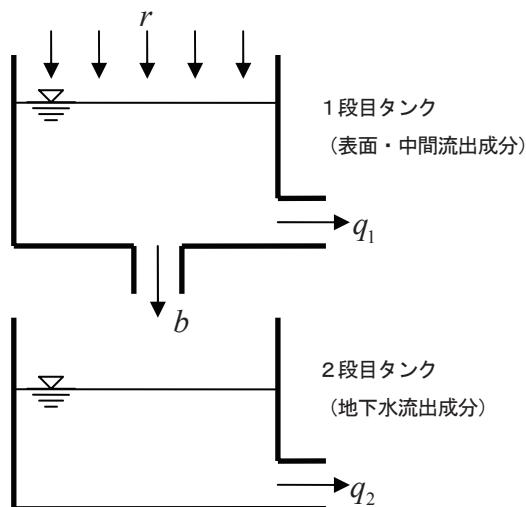


図-2 2段タンク型貯留関数モデルの概念図

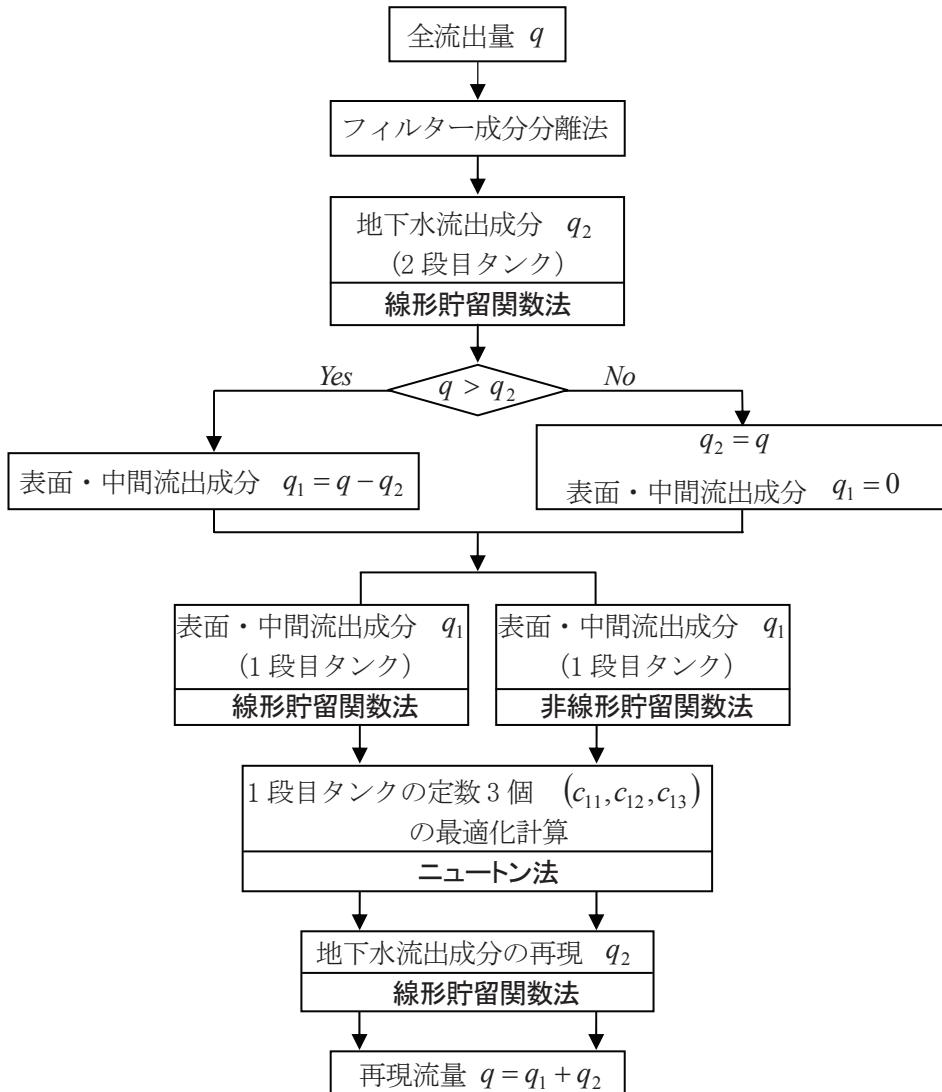


図-3 2段タンク型貯留関数モデル計算フロー図

1. フィルター成分分離法による地下水流出成分の算定

日野・長谷部は巧妙に流出成分を分離する手法を提案した。このとき、地下水流出成分 q_2 を「質点一バネ一ダッシュポット系」の運動方程式を利用して、以下の2階微分方程式で表現した。

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c_1 \frac{dq_2}{dt} + c_0 q_2 = c_0 q \quad (10.1)$$

ここで、 q_2 ：地下水流出成分、 $q = q_1 + q_2$ ：全流出量、 q_1 ：表面・中間流出成分、 c_0, c_1 ：未知定数。 c_0 と c_1 は次式で与えられる。

$$c_0 = (\delta/T_c)^2 \quad , \quad c_1 = \delta^2/T_c \quad (10.2)$$

ここで、 T_c ：地下水流出成分の時定数(ハイドログラフ低減曲線のうち、一番低減率が小さいところの減衰係数を α とすれば、 $T_c = 1/\alpha$ で決定される)、 δ ：式(10.1)が非振動解を持つための減衰係数で、 $\delta = 2 \sim 3$ の範囲にあると言われているが、ここでは、 $\delta = 2.1$ に固定する。したがって、式(10.2)によって、定数 c_0 と

c_1 の値が一義的に求まることになる。

式(10.1)の線形2階微分方程式は式(10.3)のベクトル微分方程式に変換できる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_0 q \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

ここに、

$$x_3 = q_2 \quad , \quad x_4 = \frac{dq_2}{dt} \quad (10.4)$$

式(10.3)により、地下水流出成分 q_2 が求められる。従って、表面・中間流出成分 q_1 は、 $q_1 = q - q_2$ により算出される。ただし、 $q_2 > q$ となった時点以降は、 $q_1 = 0$ とみなす。式(10.3)の離散化数値解法については、「第4回ゼミ」を参照されたい。

なお、日野・長谷部によって提案された式(10.1)は、次の二価の線形貯留関数法による表現と同一であることが分かる。

$$s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt}, \quad \frac{ds_2}{dt} = q - q_2 \quad (10.5)$$

ここに、

$$c_1 = k_{21}/k_{22} \quad , \quad c_0 = 1/k_{22} \quad (10.6)$$

2. 表面・中間流出成分の解析

2.1 二価の線形貯留関数法による解法

「表面・中間流出成分(1段目タンク)」が線形貯留関数法で表現できると仮定すれば、その基礎式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} s_1 = k_{11}q_1 + k_{12} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{ds_1}{dt} = r - q_1 - b \\ b = k_{13}q_1 = k_{13}(q - q_2) \end{cases} \quad (10.7)$$

ここで、 s_1 ：貯留高[mm]、 r ：有効雨量[mm/h]、 q_1 ：表面・中間流出高[mm/h]、 b ：1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量[mm/h]、 k_{11}, k_{12} ：貯留係数、 k_{13} ：浸透係数

「第8回ゼミ」においては、Kinematic wave法を貯留関数法に変換する手法を記述した。このとき、流れがダルシー則に従うとき、貯留関数方程式は式(10.7)に示される線形式となり、貯留係数 k_{11}, k_{12} は次の関係式で与えられる。(「第8回ゼミ」の「問題」を参照されたい。)

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11}A^{0.4} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2 \end{cases} \quad (10.8)$$

ここで、 c_{11}, c_{12} :未知定数、 A :流域面積[km²]

$x_1 = q_1$, $x_2 = dq_1/dt$ として変数変換を行うと、式(10.7)の貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, k_{11}, k_{12}, c_{13}) = -\frac{c_{13}}{k_{12}}x_1 - \frac{k_{11}}{k_{12}}x_2 + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (10.9)$$

ここに、 k_{13} と未知定数 c_{13} は、以下の関係式で表わされる。

$$c_{13} = 1 + k_{13} \quad (10.10)$$

式(10.9)は線形連立微分方程式であり、「第 4 回ゼミ」における「3. 二価の線形貯留方程式の数値解法」より、次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

ここで、

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{c_{13}}{k_{12}} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \\ d_1 = \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (10.12)$$

モデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} の最適化を一階のニュートン法で行うためには、感度係数を算定する必要がある。「第 5 回ゼミ」における「8. 感度係数の算定」に従って、感度係数を算定した結果を以下に要約して示す。式(10.9)を k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関して微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_4 \\ \frac{du_2}{dt} = u_5 \\ \frac{du_3}{dt} = u_6 \\ \frac{du_4}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_4 + b_1 \\ \frac{du_5}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_5 + b_2 \\ \frac{du_6}{dt} = a_1 u_3 + a_2 u_6 + b_3 \end{cases} \quad (10.13)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}}x_2 \\ b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \frac{c_{13}}{k_{12}^2}x_1 + \frac{k_{11}}{k_{12}^2}x_2 - \frac{r}{k_{12}^2} \\ b_3 = \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}}x_1 \end{cases} \quad (10.15)$$

式(10.13)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

式(10.16)の離散化要素は、次式で表わされる。

$$\begin{cases} (u_1)_{m+1} = \phi_1(u_1)_m + \phi_2(u_4)_m + \gamma_2(b_1)_m \\ (u_2)_{m+1} = \phi_1(u_2)_m + \phi_2(u_5)_m + \gamma_2(b_2)_m \\ (u_3)_{m+1} = \phi_1(u_3)_m + \phi_2(u_6)_m + \gamma_2(b_3)_m \\ (u_4)_{m+1} = \phi_3(u_1)_m + \phi_4(u_4)_m + \gamma_4(b_1)_m \\ (u_5)_{m+1} = \phi_3(u_2)_m + \phi_4(u_5)_m + \gamma_4(b_2)_m \\ (u_6)_{m+1} = \phi_3(u_3)_m + \phi_4(u_6)_m + \gamma_4(b_3)_m \end{cases} \quad (10.17)$$

ここで、下添字の m は、離散化時間ステップを表わす。 $\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は「第4回ゼミ」における「3. 二価の線形貯留方程式の数値解法」で算定した行列要素と同一であることに注意されたい。

未知定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の最適化には、これらの定数に関する一次感度係数(一次微係数)が必要となる。式(10.8)と式(10.10)の関係式を利用すれば、 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} に関する感度係数は次式で計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial c_{11}} = \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = (A^{0.4}) \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} = (A^{0.4}) u_1 \\ \frac{\partial q_1}{\partial c_{12}} = \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = (k_{11}^2) \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} = (k_{11}^2) u_2 \\ \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} = \frac{\partial q_1}{\partial k_{13}} = u_3 \end{cases} \quad (10.18)$$

以上、一次感度係数が算出されたので、「第5回ゼミ」で述べた「3. 一階ニュートン法」による計算手順に準拠して、モデル定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の最適化が可能となる。

2.2 二価の非線形貯留関数法による解法

「表面・中間流出成分(1段目タンク)」が非線形貯留関数法で表現されるとすれば、その基本式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} s_1 = k_{11}q_1^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ \frac{ds_1}{dt} = r - q_1 - b \\ b = k_{13}q_1 = k_{13}(q - q_2) \end{cases} \quad (10.19)$$

ここで、 s_1 : 貯留高[mm]、 r : 有効雨量[mm/h]、 q_1 : 表面・中間流出高[mm/h]、 b : 1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量[mm/h]、 k_{11}, k_{12} : 貯留係数、 k_{13} : 浸透係数、 p_1, p_2 : 貯留指数

「第9回ゼミ」における「損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)」で既述したように、モデル定数は次の関係式で与えられる。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648} \\ c_{13} = k_{13} + 1 \\ p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \end{cases} \quad (10.20)$$

式(10.19)において、 $x_1 = q_1^{p_2}$, $x_2 = dq_1^{p_2}/dt$ として変数変換を行うと、次のシステム方程式に変換される。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, k_{11}, k_{12}, c_{13}) = -\frac{c_{13}}{k_{12}}x_1^{1/p_2} - \frac{k_{11}}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}x_2 + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (10.21)$$

式(10.21)を線形近似した結果は「第4回ゼミ」における「5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法」より、次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

ここで、

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-2} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \\ a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} \\ d_1 = \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) x_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (10.23)$$

モデル定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の最適化手法は、「第9回ゼミ」における「損失項を含む貯留関数法」で述べた方法と同一であるので、ここでは最小限の説明にとどめる。式(10.21)を k_{11} , k_{12} 及び c_{13} に関して微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_4 \\ \frac{du_2}{dt} = u_5 \\ \frac{du_3}{dt} = u_6 \\ \frac{du_4}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_4 + b_1 \\ \frac{du_5}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_5 + b_2 \\ \frac{du_6}{dt} = a_1 u_3 + a_2 u_6 + b_3 \end{cases} \quad (10.24)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} \end{bmatrix} \quad (10.25)$$

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 \\ b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 + \frac{c_{13}}{k_{12}^2} x_1^{1/p_2} - \frac{r}{k_{12}^2} \\ b_3 = \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2} \end{cases} \quad (10.26)$$

式(10.24)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (10.27)$$

式(10.27)の離散化要素は、次式で表わされる。

$$\begin{cases} (u_1)_{m+1} = \phi_1(u_1)_m + \phi_2(u_4)_m + \gamma_2(b_1)_m \\ (u_2)_{m+1} = \phi_1(u_2)_m + \phi_2(u_5)_m + \gamma_2(b_2)_m \\ (u_3)_{m+1} = \phi_1(u_3)_m + \phi_2(u_6)_m + \gamma_2(b_3)_m \\ (u_4)_{m+1} = \phi_3(u_1)_m + \phi_4(u_4)_m + \gamma_4(b_1)_m \\ (u_5)_{m+1} = \phi_3(u_2)_m + \phi_4(u_5)_m + \gamma_4(b_2)_m \\ (u_6)_{m+1} = \phi_3(u_3)_m + \phi_4(u_6)_m + \gamma_4(b_3)_m \end{cases} \quad (10.28)$$

$\phi_1 \sim \phi_4$ および $\gamma_1 \sim \gamma_4$ の係数は「第4回ゼミ」における「5. 二価の非線形貯留方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して、容易に求めることができる。

c_{11}, c_{12} 及び c_{13} の一次微係数(一次感度係数)も、式(10.20)の関係式から次式で計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial q_1}{\partial c_{11}} = \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = (A^{0.24}) \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} = (A^{0.24}) u_1 \\ \frac{\partial q_1}{\partial c_{12}} = \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = (k_{11}^2 \bar{r}^{-0.2648}) \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} = (k_{11}^2 \bar{r}^{-0.2648}) u_2 \\ \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} = u_3 \end{cases} \quad (10.29)$$

以上、一次感度係数が算出されたので、「第5回ゼミ」で述べた「3. 一階ニュートン法」による計算手順に準拠して、モデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} の最適化が可能となる。

今回のゼミの特徴は、数値フィルターフィルタ一分離法によって、全流出量を表面・中間流出成分と地下水流出成分に分離し、表面・中間流出成分に対してのみ、モデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} の最適化を行った点にある。したがって、「第5回ゼミ」で述べた「6. ダビドン(Davidon)法」によるモデル定数の最適化にあたっては、「第9回ゼミ」における「損失項を含む貯留関数法」で既述した二次感度方程式の解法に準拠して、計算を進めればよいことが分かる。

3. 地下水流出成分の解析

「地下水流出成分(2段目タンク)」を表現するために、次の線形貯留関数法を採用する。

$$\begin{cases} s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} = b - q_2 \end{cases} \quad (10.30)$$

ここで、 s_2 : 2段目タンク貯留高[mm]、 q_2 : 地下水流出成分[mm/h]、 k_{21}, k_{22} : 貯留係数、 b : 1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量[mm/h]

式(10.30)は以下のように変形される。

$$\frac{ds_2}{dt} = k_{21} \frac{dq_2}{dt} + k_{22} \frac{d^2q_2}{dt^2} = b - q_2 \quad (10.31)$$

すなわち、

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + c'_1 \frac{dq_2}{dt} + c'_0 q_2 = c'_0 b \quad (10.32)$$

ここに、

$$c'_1 = \frac{k_{21}}{k_{22}}, \quad c'_0 = \frac{1}{k_{22}} \quad (10.33)$$

先に述べたように、フィルター成分分離法による線形方程式(10.1)と貯留関数法による線形方程式(10.32)は同じ表現になっており、全流出量 q が浸透供給量 b に置き換わっているだけである。二式の関係を調べるために、式(10.32)に式(10.7)の第3式を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + c'_1 \frac{dq_2}{dt} + c'_0 (1 + k_{13}) q_2 = c'_0 k_{13} \quad (10.34)$$

式(10.34)の定数項部分に式(10.33)の関係式を代入すると、以下の式が得られる。

$$c'_0 (1 + k_{13}) = \frac{1 + k_{13}}{k_{22}}, \quad c'_0 k_{13} = \frac{k_{13}}{k_{22}} \quad (10.35)$$

既往洪水の解析結果によれば、 $k_{22} \gg 1$ であることから、 $1/k_{22} \approx 0$ とみなすことができる。したがって、近似的に次式が成り立つと考えられる。

$$c'_0 (1 + k_{13}) \approx c'_0 k_{13} \quad (10.36)$$

以上の仮定のもとに、式(10.1)と式(10.34)が等価であるとするとき、定数間に次の関係式が成立する。

$$\begin{cases} c'_1 = c_1 \\ c'_0 (1 + k_{13}) \approx c'_0 k_{13} = c_0 \end{cases} \quad (10.37)$$

式(10.33)を式(10.37)に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{k_{21}}{k_{22}} = c_1, \quad \frac{k_{13}}{k_{22}} = c_0 \quad (10.38)$$

上式より、モデル定数は次式で求められる。

$$\begin{cases} k_{21} = c_1 k_{22} \\ k_{22} = k_{13}/c_0 \end{cases} \quad (10.39)$$

したがって、流出成分の分離に用いた式(10.2)に示される定数 c_0 と c_1 を 2 段目タンクの貯留係数 k_{21} と k_{22} の決定に利用することができる。

さらに、 k_{21} と k_{22} を用いた 2 段目タンクの流出高計算にあたっては、式(10.30)において $x_3 = q_2$, $x_4 = dq_2/dt$ として変数変換を行うと、次のシステム方程式に変換される。

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_3, x_4) = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = f_4(x_3, x_4, k_{21}, k_{22}, c_{13}) = -\frac{1}{k_{22}}x_3 - \frac{k_{21}}{k_{22}}x_4 + \frac{b}{k_{22}} \end{cases} \quad (10.40)$$

この時、式(10.40)に式(10.33)を代入すると、以下のように表現される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c'_0 & -c'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c'_0 b \end{bmatrix} \quad (10.41)$$

式(10.41)は式(10.3)と同一の式形になることから、その数値解法も同一に行うことができる。

したがって、未知定数 $c_{11}, c_{12}, c_{13}, k_{21}, k_{22}$ の 5 個のうち、最適化が必要となるのは、 c_{11}, c_{12}, k_{13} の 3 個だけとなり、モデル定数の最適化は大幅に容易となる。

「表面・中間流出成分(1段目タンク)」の流出高 q_1 と「地下水流出成分(2段目タンク)」の流出高 q_2 を合計して、全流出高 q とする。すなわち、

$$q = q_1 + q_2 \quad (10.42)$$

4. 地下水流出成分計算における浸透供給量の取り扱い

「表面・中間流出成分」を表わす 1 段目タンクと「地下水流出成分」を表わす 2 段目タンクのシステム方程式を再記すれば、次式で表わされる。

1段目タンク

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) = -\frac{c_{13}}{k_{12}}x_1^{1/p_2} - \frac{k_{11}}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}x_1^{p_1/p_2-1}x_2 + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (10.43)$$

2段目タンク

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_4) = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = f_4(x_3, x_4) = -\frac{1}{k_{22}}x_3 - \frac{k_{21}}{k_{22}}x_4 + \frac{b}{k_{22}} \end{cases} \quad (10.44)$$

浸透供給量 b が既知量の場合には、前出の「3. 地下水流出成分の解析」で示したように、式(10.44)は線形方程式として扱うことができ、1段目タンクの流出高 q_1 と2段目タンクの流出高 q_2 は独立に算出できる。式(10.43)は式(10.21)の再掲、式(10.44)は式(10.40)と同じである。式(10.43)の線形近似式は、式(10.22)で与えられる。また、式(10.44)の解は、式(10.41)のそれと同一となる。

式(10.44)の右辺第3項には、1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量 b が含まれており、次式で表わされる。

$$b = k_{13}q_1 = k_{13}x_1^{1/p_2} \quad (10.45)$$

ここで、

$$x_1 = q_1^{p_2}, \quad x_2 = \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \quad (10.46)$$

したがって、式(10.44)は、以下のように変形される。

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_4) = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = f_4(x_1, x_3, x_4) = -\frac{1}{k_{22}}x_3 - \frac{k_{21}}{k_{22}}x_4 + \frac{k_{13}x_1^{1/p_2}}{k_{22}} \end{cases} \quad (10.47)$$

浸透供給量 b が未知量の場合には、1段目タンクの流出高 q_1 が未知であるため、式(10.47)は非線形方程式となる。この条件下では、式(10.43)と式(10.47)を用いて、1段目タンクの流出高 q_1 と2段目タンクの流出高 q_2 を同時に求める必要がある。

非線形関数 $F(X)$ をあらかじめ既知な $X = X^*$ において一次の項までテーラー級数展開し、式(10.43)と式(10.47)を同時に線形近似化すると、次式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = AX + D \quad (10.48)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad A(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad D(X^*) = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \quad (10.49)$$

ここで、

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2-2} (x_2^*) - \frac{c_{13}}{k_{12}} \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2-1}$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (x_1^*)^{p_1/p_2-1}$$

$$\begin{aligned}
 a_{41} &= \frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{k_{13}}{k_{22}} \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2 - 1} \\
 a_{43} &= \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = -\frac{1}{k_{22}} \\
 a_{44} &= \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = -\frac{k_{21}}{k_{22}}
 \end{aligned} \tag{10.50}$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= x_2^* - x_2^* = 0 \\
 d_2 &= \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{p_1/p_2 - 1} (x_2^*) + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) (x_1^*)^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \\
 d_3 &= x_4^* - x_4^* = 0 \\
 d_4 &= \frac{k_{13}}{k_{22}} \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) (x_1^*)^{1/p_2}
 \end{aligned} \tag{10.51}$$

すなわち、浸透供給量 b を未知量とする場合、 a_{41} の要素が追加されることになる。

ここで、「第4回ゼミ」の「1. 微分方程式の数値解法」を参考に、式(10.48)を離散化すると次式が得られる。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \tag{10.52}$$

ここで、 Φ_k と Γ_k は (4×4) 行列であり、次式で計算される。

$$\left\{
 \begin{aligned}
 \Phi_k &= e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \frac{1}{24} A^4 T^4 \dots \\
 &= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34} \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44} \end{bmatrix} \\
 \Gamma &= [e^{AT} - I] A^{-1} \\
 &= \left[I + AT + \frac{1}{2} A^2 T^2 + \frac{1}{6} A^3 T^3 + \frac{1}{24} A^4 T^4 + \dots - I \right] A^{-1} \\
 &= T \left[I + \frac{1}{2} AT + \frac{1}{6} A^2 T^2 + \frac{1}{24} A^3 T^3 + \dots \right] \\
 &= \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right. \tag{10.53}$$

すなわち、式(10.49)で与えられる (4×4) 行列からなる A を式(10.53)に代入して、行列演算を行えばよい。以上により、 $q_1 = x_1^{1/p_2}$ 、 $q_2 = x_3$ から 1 段目タンクの流出高 q_1 と 2 段目タンクの流出高 q_2 を同時に算出し、 $q = q_1 + q_2$ を求める。

式(10.52)の漸化式を用いる場合、式(10.50)の X^* の値として、 $X^* = X_k$ を用いればよい。なお、 T は計算時間間隔である。

浸透供給量 b を既知量とするか、あるいは未知量とするかによって、計算結果に差異が生ずることが推定される。しかしながら、その差が実用上、無視できる程度に小さければ、1段目タンクの流出高 q_1 と2段目タンクの流出高 q_2 を独立に求めることができ、計算方法も大幅に簡略化される。とくに、浸透供給量 b を既知量として扱うことによって、両段タンクのシステム方程式の解法のみならず、1段目タンクモデル定数の地下水流出成分に及ぼす感度係数の算定が容易となる。

解析対象流域を單一流域とみなした場合の計算手順を以下に示す。

- (a) ハイドログラフ低減部曲線を片対数紙上にプロットすれば、低減部が2~3本の直線で近似できる。もっとも緩い勾配の直線部を地下水流出成分とみなし、その勾配から地下水流出成分の分離時定数 T_c を求める。また、減衰係数は $\delta = 2.1$ とする。
- (b) 「フィルタ一分離法」を用いて、式(10.3)により地下水流出成分 q_2 を求める。このとき、定数 c_0 と c_1 は式(10.2)により算出される。
- (c) 表面・中間流出成分 q_1 を $q_1 = q - q_2$ (q : 全流量) より求め、これに式(10.7)の線形貯留関数モデルをあてはめ、一階ニュートン法を用いて、モデル定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の最適値を求める。分離された表面・中間流出成分 q_1 と再現表面・中間流出成分 q_1 を比較する。
- (d) 同様に、表面・中間流出成分 q_1 に式(10.19)の非線形貯留関数モデルをあてはめ、一階ニュートン法及びダビドン法を用いて、モデル定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の最適値を求める。分離表面・中間流出成分 q_1 と再現表面・中間流出成分 q_1 を比較する。
- (e) 式(10.30)を用いて、再現地下水流出成分 q_2 を計算する。この時、モデル定数は式(10.39)より求める。
(b)で求めた分離地下水流出成分 q_2 と再現地下水流出成分 q_2 を比較する。
- (f) 全流出量 $q = q_1 + q_2$ を再計算し、実測流量 q との比較を行う。

文責 宮武真由子
星 清

参考文献

- 1) 吉井秀夫・砂田憲吾・鈴木 順：流量遞減部の特性を考慮した流出モデル，第22回水理講演会論文集，土木学会，pp. 175-180, 1978.
- 2) 日野幹雄・長谷部正彦：水文流出解析，森北出版，254p., 1985.
- 3) 日野幹雄：確率過程水文学と私，研究討論会「20世紀の水文・水資源学—21世紀における発展の礎に—」，土木学会水理委員会と水文・水資源学会の共催，pp. 17-35, 2001.
- 4) 秀島好昭・星 清：成分分離AR法による徳富川流域の流出解析－北海道の山岳地の融雪流出に関する研究(I)－，農業土木学会論文集148, pp. 11-18, 1990.
- 5) Saga H., Hoshi, K. and Hashimoto, N. : A New Tank Model Coupled with the Storage Routing Method, Proc. of XX Nordic Hydrological Conference, pp.605-614, Vol.II, Helsinki, Finland, 1998.
- 6) 中津川誠・星 清・園山裕士：成分分離に基づく2段タンク型貯留関数モデルの同定－異常出水への洪水流出計算の適用－，北海道開発土木研究所月報，No. 581, pp. 4-14, 2001.

- 7) 園山裕士・星 清:2 段タンク型貯留関数モデルの同定手法の改良, 北海道開発土木研究所月報, No. 589, pp. 7-18, 2002.
- 8) 園山裕士・星 清・橋本識秀:2 段タンク型貯留関数法の精度評価, 河川技術に関する論文集, 第 8 卷, 土木学会, pp. 425-430, 2002.
- 9) 園山裕士・星 清・橋本識秀:実用的 2 段タンク型貯留関数法の提案, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 58 号, pp. 336-339, 2002.
- 10) 高坂佳祐・嵯峨 浩・星 清・橋本識秀:北海道地方における二段タンク型貯留関数モデルによる流出解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 58 号, pp. 340-343, 2002.
- 11) 嵯峨 浩・高坂佳祐・星 清・橋本識秀:二段タンク型貯留関数モデルの未知定数推定に関する研究, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 58 号, pp. 344-347, 2002.
- 12) 中津川誠・星 清・園山裕士:異常出水例への 2 段タンク型貯留関数モデルの適用, 研究所紀要(XIII), (財)北海道河川防災研究センター研究所, pp. 219-237, 2002.
- 13) 星 清・園山裕士:成分分離に基づく貯留関数モデルの同定手法の改良, 研究所紀要(XIII), (財)北海道河川防災研究センター研究所, pp. 241-252, 2002.

第11回 流出解析ゼミ

— 全流出量の感度係数を用いた2段タンク型貯留関数モデルの最適化 —

降雨流出過程に含まれる素過程をできるだけ忠実に表現しようとすれば、モデル自体が複雑となり、同定すべきモデル定数の個数も必然的に多くなってくる。一般に、モデル構造の複雑さに比例して、パラメータの数学的最適値探索が困難となる場合が多くなる。

前回のゼミで述べた表面・中間流出過程と地下水流出過程を取り入れた洪水流出モデルは5個の定数を有するが、実際問題上、常にこれらの5個のパラメータを同時に最適化できるとは限らない。このため、洪水流出過程の物理性を考慮して、同定すべきモデル定数をできるだけ少なくする工夫が必要となる。

前回のゼミでは、「フィルター成分分離法」を用いて全流出成分を客観的に「表面・中間流出成分」と「地下水流出成分」に分離する2段タンク型貯留関数モデルを紹介した。すなわち、ハイドログラフの低減部から求めた分離時定数 T_c と減衰係数 δ (通常2.0~3.0)を用いて、まず地下水流出成分を求めた。次に、表面・中間流出成分を分離したのち、5個のモデル定数のうち、表面・中間流出成分に対してのみ3個のパラメータの最適化を行った。その最適化結果から求められる浸透供給量を入力として、地下水流出成分を再計算し、全流出量を再現している。

したがって、「フィルターフィルター分離法を活用した2段タンク型貯留関数モデル」では、成分分離に用いた定数を直接利用するために、地下水流出成分のモデル定数の最適化を必要としない簡易法と言える。この手法は「第9回ゼミ」で述べた1段タンク型貯留関数モデルと同等に、簡易であると同時にピーク流量の再現性が大幅に向上した解析例が多くなっている。一方、「第10回ゼミ」において検討してきた湧別川・丸瀬布地点における洪水解析結果に示されるように、分離された地下水流出成分と再現地下水流出成分との差が大きくなると、当然のことながら、ハイドログラフ低減部の再現性が悪い洪水例も数多く見受けられた。

ここでは、前回ゼミの欠点を克服するために、1段目タンク(表面・中間流出成分)のモデル定数の地下水流出成分に及ぼす影響(感度係数)を算定して、全流出成分の最適化に関して理論展開を行い、ハイドログラフ全体の再現性の向上を試みた。なお、同定すべきモデル定数は3個である。本報告での2段タンク型貯留関数モデルの計算フローを図-1に示す。

1段目タンクで表現される「表面・中間流出成分」は、基本高水算定に代表されるように、比較的大きい洪水に関しては、非線形貯留関数モデルによる再現性が良い。一方、ピーク流量は小さいが、融雪期のように長期間に亘る出水規模に対しては、線形モデルによる再現性が良いことが知られている。したがって、本ゼミにおいては、「表面・中間流出成分」を非線形・線形モデル双方によって表現する場合の理論展開を行う。また、「地下水流出成分」は「第10回ゼミ」で記述した線形貯留関数モデルを使用することにする。

1. 地下水流出成分を含む非線形貯留関数法

1.1 表面・中間流出成分の算定方法

前回のゼミにおいて述べたように、1段目タンクで表される「表面・中間流出成分」を式(11.1)に示す二価の非線形貯留関数モデルで表現する。

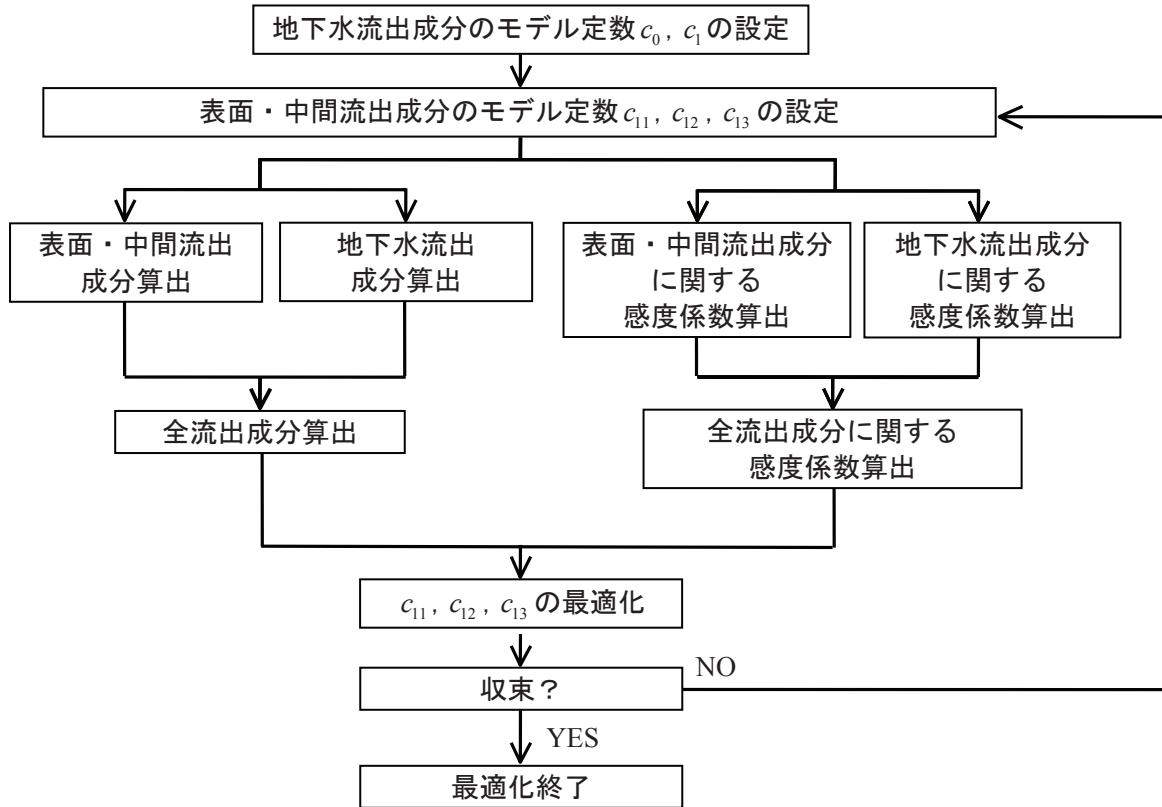


図-1 2段タンク型貯留関数モデルの最適化計算フローチャート

$$\begin{cases} s_1 = k_{11}q_1^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ \frac{ds_1}{dt} = r - q_1 - b \\ b = k_{13}q_1 \end{cases} \quad (11.1)$$

ここで、 s_1 : 1段目タンク貯留高[mm], r : 観測雨量[mm/h], q_1 : 表面・中間流出高[mm/h], b : 1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量[mm/h], k_{11}, k_{12} : 貯留係数, k_{13} : 浸透係数, p_1, p_2 : 貯留指数

1段目タンクの損失項 b は浸透供給量として、すべて2段目タンクへの入力とした。また、 p_1, p_2, k_{11} 及び k_{12} については表面流にマニング則を用い、以下の値に固定した。

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.6, \quad p_2 = 0.4648 \\ k_{11} &= c_{11}A^{0.24}, \quad k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648}, \quad k_{13} = c_{13} - 1 \end{aligned} \quad (11.2)$$

ここに、 A : 流域面積[km^2], \bar{r} : 平均雨量強度[mm/h], c_{11}, c_{12}, c_{13} : 未知定数

式(11.1)において、次式の変数変換を行う。

$$x_1 = q_1^{p_2}, \quad x_2 = \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \quad (11.3)$$

式(11.3)を用いると、式(11.1)で表される貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_2) = x_{12} \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (11.4)$$

上式の解法は、「第 9 回ゼミ」における「損失項を含む貯留関数法(1 段タンク型貯留関数モデル)」で用いた貯留関数法と同型であるため、その解法に準拠すればよい。ただし、入力項 $r+q_b$ が r に置き換わっている点に注意する必要がある。

1.2 地下水流出成分の算定方法

前回のゼミにおいて述べたように、2 段目タンクで表される「地下水流出成分」を次式に示す二価の線形貯留関数モデルで表現する。

$$\begin{cases} s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} = b - q_2 \end{cases} \quad (11.5)$$

ここで、 s_2 : 2 段目タンク貯留高[mm], q_2 : 地下水流出高[mm/h], k_{21}, k_{22} : 貯留係数

なお、浸透供給量 b を既知量と扱っても、精度上問題が生じないことは既述した。したがって、以後の解析でも b を既知量として議論を進める。

前回のゼミで述べた「フィルター成分分離法」を利用して、地下水流出成分のモデル定数 k_{21} と k_{22} は、確定値 c_0, c_1 と 1 段目タンクの未知浸透係数 k_{13} を用いて、次式で与えられることが分かっている。

$$\begin{cases} k_{21} = c_1 k_{22} = k_{13} \frac{c_1}{c_0} = (c_{13} - 1) \frac{c_1}{c_0} \\ k_{22} = \frac{k_{13}}{c_0} = \frac{c_{13} - 1}{c_0} \end{cases} \quad (11.6)$$

c_0 と c_1 は次式で与えられる。

$$c_0 = \left(\frac{\delta}{T_c} \right)^2, \quad c_1 = \frac{\delta^2}{T_c} \quad (11.7)$$

ここに、 T_c はハイドログラフの低減部より決定される定数であり、減衰係数 δ は通常 2.0~3.0 の値をとるが、本報告では $\delta = 2.1$ に固定する。

式(11.5)において、次式の変数変換を行う。

$$x_3 = q_2, \quad x_4 = \frac{dq_2}{dt} \quad (11.8)$$

式(11.8)を用いると、式(11.5)で表される貯留関数モデルは次のシステム方程式で表される。

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_4) = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = f_4(x_3, x_4, k_{21}, k_{22}, c_{13}, q_1) = -\frac{1}{k_{22}}x_3 - \frac{k_{21}}{k_{22}}x_4 + \frac{c_{13}-1}{k_{22}}q_1 \end{cases} \quad (11.9)$$

式(11.6)の関係式を用いて、モデル定数を変換すると、式(11.9)は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_4) = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = f_4(x_3, x_4, c_{13}, q_1) = -\frac{c_0}{c_{13}-1}x_3 - c_1x_4 + c_0q_1 \end{cases} \quad (11.10)$$

式(11.9)を行列表示すると、次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = A_2 X_2 + D_2 \quad (11.12)$$

ここで、

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

$$a_3 = -\frac{c_0}{c_{13}-1}, \quad a_4 = -c_1, \quad d_2 = c_0q_1 \quad (11.14)$$

式(11.14)に示されるように、地下水流出成分の算定には表面・中間流出成分が必要となる。式(11.12)の解法は「第4回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して計算される。

全流出成分 q は、表面・中間流出成分 q_1 と地下水流出成分 q_2 を別々に計算した後、合算して、次式にて算出する。

$$q = q_1 + q_2 \quad (11.15)$$

1.3 一次微係数の算定

本モデルの特徴として、全流出成分に対するモデル定数の最適化を図ることがあげられる。このため、モデル定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} についての全流出成分の微係数を求めることが必要となる。

全流出成分の一次微係数ベクトルは次式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial c_{11}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{11}} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24} \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_{12}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{12}} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_{13}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (11.16)$$

1.3.1 表面・中間流出成分の一次微係数の算定

表面・中間流出成分の一次微係数の算定するためには、「第 9 回ゼミ」の「損失項を含む貯留関数法(1 段タンク型貯留関数モデル)」で説明した解法に準拠すればよい。

1.3.2 地下水流出成分の一次微係数の算定

式(11.16)中の微係数 $\partial q_2 / \partial k_{11}, \partial q_2 / \partial k_{12}$ 及び $\partial q_2 / \partial c_{13}$ は、式(11.8)の変数変換より次式で得られる。

$$\frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} = \frac{\partial x_3}{\partial k_{11}}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} = \frac{\partial x_3}{\partial k_{12}}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial c_{13}} = \frac{\partial x_3}{\partial c_{13}} \quad (11.17)$$

式(11.17)中の変量 x_3 に関する一次微係数 $\partial x_3 / \partial k_{11}, \partial x_3 / \partial k_{12}$ 及び $\partial x_3 / \partial c_{13}$ を算定するために、モデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} が時間的に変化しないと仮定して、式(11.10)をモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関して微分すれば、地下水流出成分の一次微係数に関する微分方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial x_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_3}{\partial k_{11}} \right) = \frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{12}} \left(\frac{\partial x_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_3}{\partial k_{12}} \right) = \frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial c_{13}} \left(\frac{\partial x_3}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_3}{\partial c_{13}} \right) = \frac{\partial x_4}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial x_4}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} \right) = a_3 \frac{\partial x_3}{\partial k_{11}} + a_4 \frac{\partial x_4}{\partial k_{11}} + \frac{\partial f_4}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{12}} \left(\frac{\partial x_4}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} \right) = a_3 \frac{\partial x_3}{\partial k_{12}} + a_4 \frac{\partial x_4}{\partial k_{12}} + \frac{\partial f_4}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial c_{13}} \left(\frac{\partial x_4}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_4}{\partial c_{13}} \right) = a_3 \frac{\partial x_3}{\partial c_{13}} + a_4 \frac{\partial x_4}{\partial c_{13}} + \frac{\partial f_4}{\partial c_{13}} \end{array} \right. \quad (11.18)$$

ここで、次の変数変換を行う。

$$U_2 = \begin{bmatrix} U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix}, \quad U_{21} = \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_3 / \partial k_{11} \\ \partial x_3 / \partial k_{12} \\ \partial x_3 / \partial c_{13} \end{bmatrix}, \quad U_{22} = \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_4 / \partial k_{11} \\ \partial x_4 / \partial k_{12} \\ \partial x_4 / \partial c_{13} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_4 / \partial k_{11} \\ \partial f_4 / \partial k_{12} \\ \partial f_4 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \quad (11.19)$$

式(11.19)中の強制入力項は次式で計算される。

$$\begin{cases} b_4 = \frac{\partial f_4}{\partial k_{11}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} \\ b_5 = \frac{\partial f_4}{\partial k_{12}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} \\ b_6 = \frac{\partial f_4}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial f_4}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (11.20)$$

式(11.20)中の微係数は式(11.10)より、以下の式で表される。

$$\frac{\partial f_4}{\partial q_1} = c_0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial c_{13}} = \frac{c_0}{(c_{13}-1)^2} x_3 \quad (11.21)$$

つまり、式(11.20)は次式で与えられる。

$$b_4 = c_0 \frac{\partial q_1}{\partial k_{11}}, \quad b_5 = c_0 \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}}, \quad b_6 = c_0 \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} + \frac{c_0}{(c_{13}-1)^2} x_3 \quad (11.22)$$

式(11.20)で表される地下水流出成分の一次微係数に関する強制入力項の算定にあたっては、一次微係数 $\partial q_1 / \partial k_{11}$, $\partial q_1 / \partial k_{12}$ 及び $\partial q_1 / \partial c_{13}$ が必要となることに注意する。

式(11.14)及び式(11.19)を用いて、式(11.18)を整理すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{du_7}{dt} = u_{10}, & \frac{du_{10}}{dt} = a_3 u_7 + a_4 u_{10} + b_4 \\ \frac{du_8}{dt} = u_{11}, & \frac{du_{11}}{dt} = a_3 u_8 + a_4 u_{11} + b_5 \\ \frac{du_9}{dt} = u_{12}, & \frac{du_{12}}{dt} = a_3 u_9 + a_4 u_{12} + b_6 \end{cases} \quad (11.23)$$

式(11.23)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

式(11.24)の係数行列は、次式にて簡略化される。

$$A_3 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_3 I & a_4 I \end{array} \right] \quad (11.25)$$

ここで、 I は (3×3) の単位行列である。

式(11.19)及び式(11.25)を用い、式(11.24)を整理すると、次式で表わされる。

$$\frac{dU_2}{dt} = A_3 U_2 + B_2 \quad (11.26)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ a_3 I & a_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{21} \\ U_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

式(11.27)の解は「第 4 回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して計算される。

以上により、「表面・中間流出成分」の一次微係数 $\partial q_1 / \partial c_{11}, \partial q_1 / \partial c_{12}, \partial q_1 / \partial c_{13}$ 及び「地下水流出成分」の一次微係数 $\partial q_2 / \partial c_{11}, \partial q_2 / \partial c_{12}, \partial q_2 / \partial c_{13}$ が計算されたので、それらの微係数を式(11.16)に代入することにより、全流出成分の一次微係数 $\partial q / \partial c_{11}, \partial q / \partial c_{12}, \partial q / \partial c_{13}$ の算定が可能となる。

1.4 二次微係数の算定

一次微係数と同様に、式(11.16)をモデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} で微分すると、全流出成分の二次微係数は次式で表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 q}{\partial c_{11}^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{11}^2} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}^2} \right) \left(\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} \right)^2 = A^{0.48} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}^2} \right) \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{11} \partial c_{12}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{11} \partial c_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{11} \partial c_{12}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial k_{12}} \right) \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = A^{0.24} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial k_{12}} \right) \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{11} \partial c_{13}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{11} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{11} \partial c_{13}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial c_{13}} \right) \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial c_{13}} \right) \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{12} \partial c_{11}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{12} \partial c_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{12} \partial c_{11}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12} \partial k_{11}} \right) \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12} \partial k_{11}} \right) \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{12}^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{12}^2} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}^2} \right) \left(\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} \right)^2 = \left\{ k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \right\}^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}^2} \right) \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{12} \partial c_{13}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{12} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{12} \partial c_{13}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12} \partial c_{13}} \right) \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12} \partial c_{13}} \right) \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{13} \partial c_{11}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial c_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial c_{11}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{11}} \right) \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{11}} \right) \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{13} \partial c_{12}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial c_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial c_{12}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{12}} \right) \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{12}} \right) \\ \frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}^2} \end{array} \right. \quad (11.28)$$

1.4.1 表面・中間流出成分の二次微係数の算定

表面・中間流出成分の二次微係数の算定方法は、すでに「第 9 回ゼミ」における「損失項を含む貯留関数法(1 段タンク型貯留関数モデル)」で説明した。

1.4.2 地下水流出成分の二次微係数の算定

式(11.28)中の微係数 $\partial^2 q_2 / \partial k_{11}^2 \sim \partial^2 q_2 / \partial c_{13}^2$ は、式(11.8)の変数変換より次式で得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}^2} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial k_{11}^2}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial k_{12}} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial k_{11} \partial k_{12}}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial c_{13}} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial k_{11} \partial c_{13}} \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12} \partial k_{11}} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial k_{12} \partial k_{11}}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}^2} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial k_{12}^2}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12} \partial c_{13}} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial k_{12} \partial c_{13}} \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{11}} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial c_{13} \partial k_{11}}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{12}} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial c_{13} \partial k_{12}}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}^2} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial c_{13}^2} \end{array} \right. \quad (11.29)$$

式(11.29)中の変量 x_3 に関する二次微係数 $w_{19} = \partial^2 x_3 / \partial k_{11}^2 \sim w_{27} = \partial^2 x_3 / \partial c_{13}^2$ を算定するためには、モデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} が時間的に変化しないと仮定して、式(11.18)をモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関して微分すれば、地下水流出成分の二次微係数に関する微分方程式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_{19}}{dt} = w_{28}, \quad \frac{dw_{20}}{dt} = w_{29}, \quad \frac{dw_{21}}{dt} = w_{30} \\ \frac{dw_{22}}{dt} = w_{31}, \quad \frac{dw_{23}}{dt} = w_{32}, \quad \frac{dw_{24}}{dt} = w_{33} \\ \frac{dw_{25}}{dt} = w_{34}, \quad \frac{dw_{26}}{dt} = w_{35}, \quad \frac{dw_{27}}{dt} = w_{36} \\ \frac{dw_{28}}{dt} = a_3 w_{19} + a_4 w_{28} + v_{10}, \quad \frac{dw_{29}}{dt} = a_3 w_{20} + a_4 w_{29} + v_{11}, \quad \frac{dw_{30}}{dt} = a_3 w_{21} + a_4 w_{30} + v_{12} \\ \frac{dw_{31}}{dt} = a_3 w_{22} + a_4 w_{31} + v_{13}, \quad \frac{dw_{32}}{dt} = a_3 w_{23} + a_4 w_{32} + v_{14}, \quad \frac{dw_{33}}{dt} = a_3 w_{24} + a_4 w_{33} + v_{15} \\ \frac{dw_{34}}{dt} = a_3 w_{25} + a_4 w_{34} + v_{16}, \quad \frac{dw_{35}}{dt} = a_3 w_{26} + a_4 w_{35} + v_{17}, \quad \frac{dw_{36}}{dt} = a_3 w_{27} + a_4 w_{36} + v_{18} \end{array} \right. \quad (11.30)$$

ここで、

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{bmatrix} W_{21} \\ W_{22} \end{bmatrix} \\ W_{21} &= \begin{bmatrix} w_{19} & w_{20} & w_{21} \\ w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{25} & w_{26} & w_{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_7 / \partial k_{11} & \partial u_7 / \partial k_{12} & \partial u_7 / \partial c_{13} \\ \partial u_8 / \partial k_{11} & \partial u_8 / \partial k_{12} & \partial u_8 / \partial c_{13} \\ \partial u_9 / \partial k_{11} & \partial u_9 / \partial k_{12} & \partial u_9 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial^2 x_3 / \partial k_{11}^2 & \partial^2 x_3 / \partial k_{11} \partial k_{12} & \partial^2 x_3 / \partial k_{11} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_3 / \partial k_{12} \partial k_{11} & \partial^2 x_3 / \partial k_{12}^2 & \partial^2 x_3 / \partial k_{12} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_3 / \partial c_{13} \partial k_{11} & \partial^2 x_3 / \partial c_{13} \partial k_{12} & \partial^2 x_3 / \partial c_{13}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$W_{22} = \begin{bmatrix} w_{28} & w_{29} & w_{30} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \\ w_{34} & w_{35} & w_{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_{10} / \partial k_{11} & \partial u_{10} / \partial k_{12} & \partial u_{10} / \partial c_{13} \\ \partial u_{11} / \partial k_{11} & \partial u_{11} / \partial k_{12} & \partial u_{11} / \partial c_{13} \\ \partial u_{12} / \partial k_{11} & \partial u_{12} / \partial k_{12} & \partial u_{12} / \partial c_{13} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \partial^2 x_4 / \partial k_{11}^2 & \partial^2 x_4 / \partial k_{11} \partial k_{12} & \partial^2 x_4 / \partial k_{11} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_4 / \partial k_{12} \partial k_{11} & \partial^2 x_4 / \partial k_{12}^2 & \partial^2 x_4 / \partial k_{12} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_4 / \partial c_{13} \partial k_{11} & \partial^2 x_4 / \partial c_{13} \partial k_{12} & \partial^2 x_4 / \partial c_{13}^2 \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

W_{21} と W_{22} はともに (3×3) の二次微係数からなるヘシアン行列であり、対称行列となる。

次式において、新しいベクトルと行列を定義する。

$$V_2 = \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix}, \quad V_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_{22} = \begin{bmatrix} v_{10} & v_{11} & v_{12} \\ v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ v_{16} & v_{17} & v_{18} \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

式(11.25)、式(11.31)及び式(11.32)を用い、式(11.30)を整理すると、次式が得られる。

$$\frac{dW_2}{dt} = A_3 W_2 + V_2 \quad (11.33)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W_{21} \\ W_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_3 I & a_4 I \end{array} \right] \begin{bmatrix} W_{21} \\ W_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix} \quad (11.34)$$

ここで、 I は (3×3) の単位行列である。

V_{22} の算出方法については、「第 5 回ゼミ」における「8.3 二次微係数の算定」の結果を参照すれば、次式で与えられることがわかる。

$$V_{22} = U_{2^*} \frac{\partial A_3}{\partial X_2} U_{2^*}^T + U_{2^*} \frac{\partial A_3}{\partial K} + \frac{\partial B_{22}}{\partial X_2} U_{2^*}^T + \frac{\partial B_{22}}{\partial K} \quad (11.35)$$

式(11.35)の微係数行列 $U_{2^*}, \partial A_3 / \partial X_2, \partial A_3 / \partial K, \partial B_{22} / \partial X_2$ 及び $\partial B_{22} / \partial K$ は以下の行列で定義される。

$$\begin{aligned} U_{2^*} &= \begin{bmatrix} u_7 & u_{10} \\ u_8 & u_{11} \\ u_9 & u_{12} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A_3}{\partial X_2} = \begin{bmatrix} \partial a_3 / \partial x_3 & \partial a_3 / \partial x_4 \\ \partial a_4 / \partial x_3 & \partial a_4 / \partial x_4 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial A_3}{\partial K} &= \begin{bmatrix} \partial a_3 / \partial k_{11} & \partial a_3 / \partial k_{12} & \partial a_3 / \partial c_{13} \\ \partial a_4 / \partial k_{11} & \partial a_4 / \partial k_{12} & \partial a_4 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial B_{22}}{\partial X_2} &= \left(\frac{\partial A_3}{\partial K} \right)^T = \begin{bmatrix} \partial b_4 / \partial x_3 & \partial b_4 / \partial x_4 \\ \partial b_5 / \partial x_3 & \partial b_5 / \partial x_4 \\ \partial b_6 / \partial x_3 & \partial b_6 / \partial x_4 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial B_{22}}{\partial K} &= \begin{bmatrix} \partial b_4 / \partial k_{11} & \partial b_4 / \partial k_{12} & \partial b_4 / \partial c_{13} \\ \partial b_5 / \partial k_{11} & \partial b_5 / \partial k_{12} & \partial b_5 / \partial c_{13} \\ \partial b_6 / \partial k_{11} & \partial b_6 / \partial k_{12} & \partial b_6 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.36)$$

式(11.14)より、微係数行列 $\partial A_3 / \partial X_2$ は次式に示されるように、ゼロ行列となる。

$$\begin{cases} \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = 0 & , \quad \frac{\partial a_3}{\partial x_4} = 0 \\ \frac{\partial a_4}{\partial x_3} = 0 & , \quad \frac{\partial a_4}{\partial x_4} = 0 \end{cases} \quad (11.37)$$

式(11.14)より、微係数行列 $\partial A_2 / \partial K$ の各要素は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{\partial a_3}{\partial k_{11}} = \frac{\partial b_4}{\partial x_3} = 0 & , \quad \frac{\partial a_3}{\partial k_{12}} = \frac{\partial b_5}{\partial x_3} = 0 & , \quad \frac{\partial a_3}{\partial c_{13}} = \frac{\partial b_6}{\partial x_3} = \frac{c_0}{(c_{13}-1)^2} \\ \frac{\partial a_4}{\partial k_{11}} = \frac{\partial b_4}{\partial x_4} = 0 & , \quad \frac{\partial a_4}{\partial k_{12}} = \frac{\partial b_5}{\partial x_4} = 0 & , \quad \frac{\partial a_4}{\partial c_{13}} = \frac{\partial b_6}{\partial x_4} = 0 \end{cases} \quad (11.38)$$

式(11.20)より、微係数行列 $\partial B_{22} / \partial K$ の各要素は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{\partial b_4}{\partial k_{11}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} & , \quad \frac{\partial b_4}{\partial k_{12}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}} & , \quad \frac{\partial b_4}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial c_{13}} \\ \frac{\partial b_5}{\partial k_{11}} = \frac{\partial b_4}{\partial k_{12}} & , \quad \frac{\partial b_5}{\partial k_{12}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} & , \quad \frac{\partial b_5}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial c_{13}} \\ \frac{\partial b_4}{\partial c_{13}} = \frac{\partial b_6}{\partial k_{11}} & , \quad \frac{\partial b_5}{\partial c_{13}} = \frac{\partial b_6}{\partial k_{12}} & , \quad \frac{\partial b_6}{\partial c_{13}} = \frac{\partial f_4}{\partial q_1} \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}^2} + \frac{\partial^2 f_4}{\partial c_{13}^2} \end{cases} \quad (11.39)$$

式(11.39)中の微係数は式(11.21)より、次式で表わされる。

$$\frac{\partial f_4}{\partial q_1} = c_0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f_4}{\partial c_{13}^2} = -2 \frac{c_0}{(c_{13}-1)^3} x_3 \quad (11.40)$$

式(11.39)からわかるように、地下水流出成分の二次微係数に関する強制入力項には、表面・中間流出成分の二次微係数 $\partial^2 q_1 / \partial k_{11}^2 \sim \partial^2 q_1 / \partial c_{13}^2$ が含まれていることに注意する。

式(11.34)を離散表示すると、次式となる。

$$\begin{bmatrix} W_{21} \\ W_{22} \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_5 I & \phi_6 I \\ \phi_7 I & \phi_8 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{21} \\ W_{22} \end{bmatrix}_m + \begin{bmatrix} \gamma_5 I & \gamma_6 I \\ \gamma_7 I & \gamma_8 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \end{bmatrix}_m \quad (11.41)$$

ここで、 I は (3×3) の単位行列である。

式(11.41)は以下のように要素展開できる。

$$\begin{bmatrix} w_{19} & w_{20} & w_{21} \\ w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ \hline w_{25} & w_{26} & w_{27} \\ \hline w_{28} & w_{29} & w_{30} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \\ \hline w_{34} & w_{35} & w_{36} \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \phi_5 & 0 & 0 & \phi_6 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_5 & 0 & 0 & \phi_6 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_5 & 0 & 0 & \phi_6 \\ \hline \phi_7 & 0 & 0 & \phi_8 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_7 & 0 & 0 & \phi_8 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_7 & 0 & 0 & \phi_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{19} & w_{20} & w_{21} \\ w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ \hline w_{25} & w_{26} & w_{27} \\ \hline w_{28} & w_{29} & w_{30} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \\ \hline w_{34} & w_{35} & w_{36} \end{bmatrix}_m$$

$$+ \begin{bmatrix} \gamma_5 & 0 & 0 & | & \gamma_6 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_5 & 0 & | & 0 & \gamma_6 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_5 & | & 0 & 0 & \gamma_6 \\ \hline \gamma_7 & 0 & 0 & | & \gamma_8 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_7 & 0 & | & 0 & \gamma_8 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_7 & | & 0 & 0 & \gamma_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline v_{10} & v_{11} & v_{12} \\ v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ v_{16} & v_{17} & v_{18} \end{bmatrix}_m \quad (11.42)$$

$$\begin{aligned} (W_{21})_{m+1} &= \phi_5 (W_{21})_m + \phi_6 (W_{22})_m + \gamma_6 (V_{21})_m \\ (W_{22})_{m+1} &= \phi_7 (W_{21})_m + \phi_8 (W_{22})_m + \gamma_8 (V_{22})_m \end{aligned} \quad (11.43)$$

$\phi_5 \sim \phi_8$ 及び $\gamma_5 \sim \gamma_8$ の係数は、式(11.14)の a_3 と a_4 を用いて、「第 4 回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して計算することができる。

式(11.43)の漸化式によって求められた値を、式(11.29)に代入すれば、任意の離散時刻 m における「地下水流出成分」の二次微係数が解析的に算定されることになる。

なお、行列 W_{21} と W_{22} のヘシアン行列は対称行列となることから、式(11.42)における要素のうち、 $w_{20} = w_{22}, w_{21} = w_{25}, w_{24} = w_{26}, w_{29} = w_{31}, w_{30} = w_{34}$ 及び $w_{33} = w_{35}$ になることに注意すべきである。

以上の理論展開により、「表面・中間流出成分」と「地下水流出成分」の二次微係数が計算されたので、それらの微係数を式(11.28)に代入することにより全流出成分の二次微係数の算定が可能となる。

したがって、「全流出量の感度係数を用いた 2 段タンク型非線形貯留関数モデル」におけるパラメータ c_{11}, c_{12} 及び c_{13} についての一次及び二次微係数が算出されたので、一階ニュートン法ならびにダビドン法を用いた 2 種類の最適化手法が実行可能となる。

3 個のパラメータに関する最適化手法については、「第 9 回ゼミ」で述べた「損失項を含む貯留関数法（1 段タンク型貯留関数モデル）」を参照されたい。

1.4.3 実流域への適用例

湧別川・開盛橋地点（流域面積 1334.80 km^2 ）における平成 10 年 9 月 17 日洪水の再現計算例を示す。図-2 は「第 10 回ゼミ」において検討した「フィルタ一分離法を活用した 2 段タンク型貯留関数モデル」、図-3 は「全流出量の感度係数を用いた 2 段タンク型貯留関数モデル」による計算結果である。

表-1 に示すように、ピーク相対誤差 (J_{PE}) はフィルタ一分離法活用モデルの 0.108 に対し全流出量感度係数活用モデルは 0.064、ハイドログラフ相対誤差 (J_{RE}) に関しては、フィルタ一分離法活用モデルが 0.195 に対し、0.169 となっており、全流出量感度係数活用モデルの方が 2 つの相対誤差ともに小さく、ハイドログラフ全体において再現性が向上したといえる。

表-1 解析結果一覧表 [湧別川・開盛橋地点 (1334.8 km^2), $T_c=62.46$]

| | フィルタ一分離法活用モデル | 全流出量感度係数活用モデル |
|----------|---------------|---------------|
| c_{11} | 6.288 | 6.651 |
| c_{12} | 0.368 | 0.285 |
| c_{13} | 1.828 | 1.546 |
| J_{PE} | 0.108 | 0.064 |
| J_{RE} | 0.195 | 0.169 |

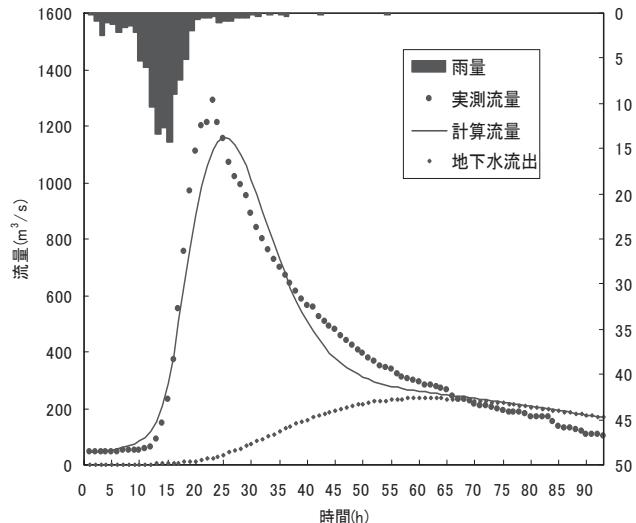


図-2 フィルター分離法を活用した2段タンク型貯留関数モデルによる解析結果
(開盛橋地点・平成10年9月17日)

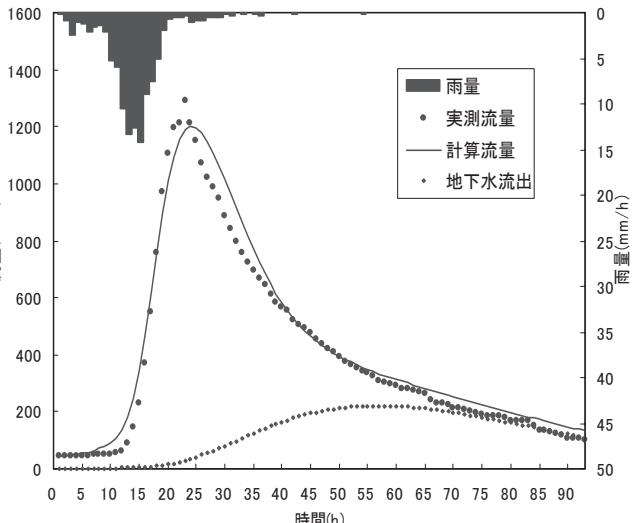


図-3 全流出量の感度係数を用いた2段タンク型貯留関数モデルによる解析結果
(開盛橋地点・平成10年9月17日)

2. 地下水流出成分を含む線形貯留関数法

2.1 表面・中間流出成分の算定方法

前回のゼミにおいて述べたように、1段目タンクで表わされる「表面・中間流出成分」を次式に示す二価の線形貯留関数モデルで表現することにする。

$$\begin{cases} s_1 = k_{11}q_1 + k_{12} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{ds_1}{dt} = r - q_1 - b \\ b = k_{13}q_1 \end{cases} \quad (11.44)$$

ここで、 s_1 : 1段目タンク貯留高[mm], r : 観測雨量[mm/h], q_1 : 表面・中間流出高[mm/h], b : 1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量[mm/h], k_{11}, k_{12} : 貯留係数, k_{13} : 浸透係数

1段目タンクの損失項 b は浸透供給量として、すべて2段目タンクへの入力とした。また、モデル定数 k_{11} と k_{12} については、表面流にダルシー則を用いて次式で与える。

$$k_{11} = c_{11}A^{0.4} \quad , \quad k_{12} = c_{12}k_{11}^2 \quad , \quad k_{13} = c_{13} - 1 \quad (11.45)$$

ここに、 A : 流域面積[km²], c_{11}, c_{12}, c_{13} : 未知モデル定数

式(11.44)において、次式の変数変換を行う。

$$x_1 = q_1 \quad , \quad x_2 = \frac{dq_1}{dt} \quad (11.46)$$

式(11.46)を用いると、式(11.44)で表される線形貯留関数モデルは次のシステム方程式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_2) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, c_{11}, c_{12}, c_{13}) = -\frac{c_{13}}{k_{12}}x_1 - \frac{k_{11}}{k_{12}}x_2 + \frac{r}{k_{12}} \end{cases} \quad (11.47)$$

式(11.47)を行列表示すると、次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (11.48)$$

$$\frac{dX_1}{dt} = AX_1 + D_1 \quad (11.49)$$

ここで、

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (11.50)$$

$$a_1 = -\frac{c_{13}}{k_{12}}, \quad a_2 = -\frac{k_{11}}{k_{12}}, \quad d_1 = \frac{r}{k_{12}} \quad (11.51)$$

式(11.48)の解は「第 4 回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠して容易に計算される。

2.2 地下水流出成分の算定方法

地下水流出成分を表す線形貯留関数法とその解法については、「1.2 地下水流出成分の算定方法」で既述した。

2.3 一次微係数の算定

本モデルの特徴として、全流出成分に対するモデル定数の最適化を図ることがあげられる。このため、モデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} についての全流出成分の微係数を求めることが必要となる。

全流出成分の一次微係数ベクトルは次式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial c_{11}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{11}} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.4} \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_{12}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{12}} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_{13}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (11.52)$$

2.3.1 表面・中間流出成分の一次微係数の算定方法

まず、表面・中間流出成分の一次微係数の算定を行う。式(11.52)中の微係数 $\partial q_1 / \partial k_{11}, \partial q_1 / \partial k_{12}$ 及び $\partial q_1 / \partial c_{13}$ は、式(11.46)の変数変換より次式で得られる。

$$\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} = \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} = \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} = \frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} \quad (11.53)$$

式(11.53)中の変量 x_1 に関する一次微係数 $\partial x_1 / \partial k_{11}$, $\partial x_1 / \partial k_{12}$ 及び $\partial x_1 / \partial c_{13}$ を算定するために、モデル定数 k_{11} , k_{12} 及び c_{13} が時間的に変化しないと仮定して、式(11.47)をモデル定数 k_{11} , k_{12} 及び c_{13} に関して微分すれば、表面・中間流出成分の一次微係数に関する感度方程式が求められる。すなわち、次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} \right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{12}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} \right) = \frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial c_{13}} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} \right) = \frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{11}} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} \right) = a_1 \frac{\partial x_1}{\partial k_{11}} + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial k_{11}} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial k_{12}} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} \right) = a_1 \frac{\partial x_1}{\partial k_{12}} + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial k_{12}} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial c_{13}} \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} \right) = a_1 \frac{\partial x_1}{\partial c_{13}} + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial c_{13}} + \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (11.54)$$

上式において、次の変数変換を行う。

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix}, \quad U_{11} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_1 / \partial k_{11} \\ \partial x_1 / \partial k_{12} \\ \partial x_1 / \partial c_{13} \end{bmatrix}, \quad U_{12} = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x_2 / \partial k_{11} \\ \partial x_2 / \partial k_{12} \\ \partial x_2 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_2 / \partial k_{11} \\ \partial f_2 / \partial k_{12} \\ \partial f_2 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.55)$$

式(11.55)中の強制入力項は次式で計算される。

$$\begin{cases} b_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\frac{1}{k_{12}} x_2, \\ b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} x_2 + \frac{c_{13}}{k_{12}^2} x_1 - \frac{r}{k_{12}^2}, \\ b_3 = \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{k_{12}} x_1 \end{cases} \quad (11.56)$$

式(11.51)及び式(11.55)を用いて、式(11.54)を整理すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_4 & , \quad \frac{du_4}{dt} = a_1 u_1 + a_2 u_4 + b_1 \\ \frac{du_2}{dt} = u_5 & , \quad \frac{du_5}{dt} = a_1 u_2 + a_2 u_5 + b_2 \\ \frac{du_3}{dt} = u_6 & , \quad \frac{du_6}{dt} = a_1 u_3 + a_2 u_6 + b_3 \end{cases} \quad (11.57)$$

式(11.57)を行列表示すると、次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (11.58)$$

式(11.58)中の係数行列は、次式にて簡略化される。

$$A_1 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_1 I & a_2 I \end{array} \right] \quad (11.59)$$

ここで、 I は (3×3) の単位行列である。

式(11.55)及び式(11.59)を用い、式(11.58)を整理すると、次式で表わされる。

$$\frac{dU_1}{dt} = A_1 U_1 + B_1 \quad (11.60)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_1 I & a_2 I \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} \quad (11.61)$$

式(11.61)の解法は「第 4 回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠すればよい。

2.3.2 地下水流出成分の一次微係数の算定方法

地下水流出成分の一次微係数の算定方法については、「2.2.2 地下水流出成分の一次微係数の算定方法」で述べた方法に準拠して求めることができる。

以上により、「表面・中間流出成分」の一次微係数 $\partial q_1 / \partial c_{11}$, $\partial q_1 / \partial c_{12}$, $\partial q_1 / \partial c_{13}$ 及び「地下水流出成分」の一次微係数 $\partial q_2 / \partial c_{11}$, $\partial q_2 / \partial c_{12}$, $\partial q_2 / \partial c_{13}$ が計算されたので、それらの微係数を式(11.52)に代入することにより、全流出成分に関する一次微係数 $\partial q / \partial c_{11}$, $\partial q / \partial c_{12}$, $\partial q / \partial c_{13}$ の算定が可能となる。

2.4 二次微係数の算定

一次微係数と同様に、式(11.52)をモデル定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} で微分すると、全流出成分の二次微係数は次式で表わされる。

$$\begin{cases}
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{11}^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{11}^2} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}^2} \right) \left(\frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} \right)^2 = A^{0.8} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11}^2} \right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{11} \partial c_{12}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{11} \partial c_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{11} \partial c_{12}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial k_{12}} \right) \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = A^{0.4} k_{11}^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial k_{12}} \right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{11} \partial c_{13}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{11} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{11} \partial c_{13}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial c_{13}} \right) \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.4} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial c_{13}} \right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{12} \partial c_{11}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{12} \partial c_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{12} \partial c_{11}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12} \partial k_{11}} \right) \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.4} k_{11}^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{11} \partial k_{12}} \right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{12}^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{12}^2} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}^2} \right) \left(\frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} \right)^2 = k_{11}^4 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12}^2} \right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{12} \partial c_{13}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{12} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{12} \partial c_{13}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12} \partial c_{13}} \right) \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial c_{13}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial k_{12} \partial c_{13}} \right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13} \partial c_{11}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial c_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial c_{11}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{11}} \right) \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.4} \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{11}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{11}} \right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13} \partial c_{12}} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial c_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial c_{12}} = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{12}} \right) \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{12}} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13} \partial k_{12}} \right) \\
\frac{\partial^2 q}{\partial c_{13}^2} = \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial c_{13}^2}
\end{cases} \quad (11.62)$$

2.4.1 表面・中間流出成分の二次微係数の算定方法

式(11.62)中の微係数 $\partial^2 q_1 / \partial k_{11}^2 \sim \partial^2 q_1 / \partial c_{13}^2$ は、式(11.46)の変数変換より次式で得られる。

$$\begin{cases}
\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11}^2} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11}^2}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11} \partial k_{12}}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{11} \partial c_{13}} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{11} \partial c_{13}} \\
\frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial k_{11}} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12} \partial k_{11}}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12}^2} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12}^2}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial k_{12} \partial c_{13}} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial k_{12} \partial c_{13}} \\
\frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{11}} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13} \partial k_{11}}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13} \partial k_{12}} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13} \partial k_{12}}, \quad \frac{\partial^2 q_1}{\partial c_{13}^2} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial c_{13}^2}
\end{cases} \quad (11.63)$$

式(11.63)中の変量 x_1 に関する二次微係数 $w_1 = \partial^2 x_1 / \partial k_{11}^2 \sim w_9 = \partial^2 x_1 / \partial c_{13}^2$ を算定するためには、モデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} が時間的に変化しないと仮定して、式(11.54)をモデル定数 k_{11}, k_{12} 及び c_{13} に関して微分すれば、次式に示される表面・中間流出成分の二次微係数に関する感度方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{dw_1}{dt} &= w_{10}, \quad \frac{dw_2}{dt} = w_{11}, \quad \frac{dw_3}{dt} = w_{12} \\
\frac{dw_4}{dt} &= w_{13}, \quad \frac{dw_5}{dt} = w_{14}, \quad \frac{dw_6}{dt} = w_{15} \\
\frac{dw_7}{dt} &= w_{16}, \quad \frac{dw_8}{dt} = w_{17}, \quad \frac{dw_9}{dt} = w_{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dw_{10}}{dt} &= a_1 w_1 + a_2 w_{10} + v_1 \quad , \quad \frac{dw_{11}}{dt} = a_1 w_2 + a_2 w_{11} + v_2 \quad , \quad \frac{dw_{12}}{dt} = a_1 w_3 + a_2 w_{12} + v_3 \\ \frac{dw_{13}}{dt} &= a_1 w_4 + a_2 w_{13} + v_4 \quad , \quad \frac{dw_{14}}{dt} = a_1 w_5 + a_2 w_{14} + v_5 \quad , \quad \frac{dw_{15}}{dt} = a_1 w_6 + a_2 w_{15} + v_6 \\ \frac{dw_{16}}{dt} &= a_1 w_7 + a_2 w_{16} + v_7 \quad , \quad \frac{dw_{17}}{dt} = a_1 w_8 + a_2 w_{17} + v_8 \quad , \quad \frac{dw_{18}}{dt} = a_1 w_9 + a_2 w_{18} + v_9\end{aligned}\quad (11.64)$$

ここで、

$$\begin{aligned}W_1 &= \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \end{bmatrix} \\ W_{11} &= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_1 / \partial k_{11} & \partial u_1 / \partial k_{12} & \partial u_1 / \partial c_{13} \\ \partial u_2 / \partial k_{11} & \partial u_2 / \partial k_{12} & \partial u_2 / \partial c_{13} \\ \partial u_3 / \partial k_{11} & \partial u_3 / \partial k_{12} & \partial u_3 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial^2 x_1 / \partial k_{11}^2 & \partial^2 x_1 / \partial k_{11} \partial k_{12} & \partial^2 x_1 / \partial k_{11} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_1 / \partial k_{12} \partial k_{11} & \partial^2 x_1 / \partial k_{12}^2 & \partial^2 x_1 / \partial k_{12} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_1 / \partial c_{13} \partial k_{11} & \partial^2 x_1 / \partial c_{13} \partial k_{12} & \partial^2 x_1 / \partial c_{13}^2 \end{bmatrix} \\ W_{12} &= \begin{bmatrix} w_{10} & w_{11} & w_{12} \\ w_{13} & w_{14} & w_{15} \\ w_{16} & w_{17} & w_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_4 / \partial k_{11} & \partial u_4 / \partial k_{12} & \partial u_4 / \partial c_{13} \\ \partial u_5 / \partial k_{11} & \partial u_5 / \partial k_{12} & \partial u_5 / \partial c_{13} \\ \partial u_6 / \partial k_{11} & \partial u_6 / \partial k_{12} & \partial u_6 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial^2 x_2 / \partial k_{11}^2 & \partial^2 x_2 / \partial k_{11} \partial k_{12} & \partial^2 x_2 / \partial k_{11} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_2 / \partial k_{12} \partial k_{11} & \partial^2 x_2 / \partial k_{12}^2 & \partial^2 x_2 / \partial k_{12} \partial c_{13} \\ \partial^2 x_2 / \partial c_{13} \partial k_{11} & \partial^2 x_2 / \partial c_{13} \partial k_{12} & \partial^2 x_2 / \partial c_{13}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (11.65)$$

W_{11} と W_{12} はともに (3×3) の二次微係数からなるヘシアン行列であることから対称行列となる。

次式において、新しいベクトルと行列を定義する。

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad V_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V_{12} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_4 & v_5 & v_6 \\ v_7 & v_8 & v_9 \end{bmatrix} \quad (11.66)$$

式(11.59)と式(11.67)及び式(11.66)を用い、式(11.64)を整理すると、次式が得られる。

$$\frac{dW_1}{dt} = A_1 W_1 + V_1 \quad (11.68)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline a_1 I & a_2 I \end{array} \right] \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix} \quad (11.69)$$

ここで、 I は (3×3) の単位行列である。

V_{12} の算出方法に関しては、「第 5 回ゼミ」における「8.3 二次微係数の算定」の結果を参照すれば、次式で与えられることが分かる。

$$V_{12} = U_{1^*} \frac{\partial A_1}{\partial X_1} U_{1^*}^T + U_{1^*} \frac{\partial A_1}{\partial K} + \frac{\partial B_{12}}{\partial X_1} U_{1^*}^T + \frac{\partial B_{12}}{\partial K} \quad (11.70)$$

式(11.70)の微係数 $U_{1^*}, \partial A_1 / \partial X_1, \partial A_1 / \partial K, \partial B_{12} / \partial X_1$ 及び $\partial B_{12} / \partial K$ は以下の行列で表される。

$$\begin{aligned} U_{1^*} &= \begin{bmatrix} u_1 & u_4 \\ u_2 & u_5 \\ u_3 & u_6 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial X_1} = \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial x_1 & \partial a_1 / \partial x_2 \\ \partial a_2 / \partial x_1 & \partial a_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial A_1}{\partial K} &= \begin{bmatrix} \partial a_1 / \partial k_{11} & \partial a_1 / \partial k_{12} & \partial a_1 / \partial c_{13} \\ \partial a_2 / \partial k_{11} & \partial a_2 / \partial k_{12} & \partial a_2 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial B_{12}}{\partial X_1} &= \left(\frac{\partial A_1}{\partial K} \right)^T = \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_1 / \partial x_2 \\ \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_2 \\ \partial b_3 / \partial x_1 & \partial b_3 / \partial x_2 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial B_{12}}{\partial K} &= \begin{bmatrix} \partial b_1 / \partial k_{11} & \partial b_1 / \partial k_{12} & \partial b_1 / \partial c_{13} \\ \partial b_2 / \partial k_{11} & \partial b_2 / \partial k_{12} & \partial b_2 / \partial c_{13} \\ \partial b_3 / \partial k_{11} & \partial b_3 / \partial k_{12} & \partial b_3 / \partial c_{13} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.71)$$

式(11.51)より、微係数行列 $\partial A_1 / \partial X_2$ は次式に示されるように、ゼロ行列となる。

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0 & , \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0 & , \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (11.72)$$

式(11.51)より、微係数行列 $\partial A_1 / \partial K$ の各要素は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial k_{11}} = \frac{\partial b_1}{\partial x_1} = 0 & , \quad \frac{\partial a_1}{\partial k_{12}} = \frac{\partial b_2}{\partial x_1} = \frac{c_{13}}{k_{12}^2} & , \quad \frac{\partial a_1}{\partial c_{13}} = \frac{\partial b_3}{\partial x_1} = -\frac{1}{k_{12}} \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_{11}} = \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{k_{12}} & , \quad \frac{\partial a_2}{\partial k_{12}} = \frac{\partial b_2}{\partial x_2} = \frac{k_{11}}{k_{12}^2} & , \quad \frac{\partial a_2}{\partial c_{13}} = \frac{\partial b_3}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (11.73)$$

式(11.56)より、微係数行列 $\partial B_{12} / \partial K$ の各要素は次式で表わされる。

$$\begin{cases} \frac{\partial b_1}{\partial k_{11}} = 0 & , \quad \frac{\partial b_1}{\partial k_{12}} = \frac{\partial b_2}{\partial k_{11}} = \frac{1}{k_{12}^2} x_2 \\ \frac{\partial b_2}{\partial k_{12}} = -2 \frac{k_{11}}{k_{12}^3} x_2 - 2 \frac{c_{13}}{k_{12}^3} x_1 + \frac{2}{k_{12}^3} r & \\ \frac{\partial b_2}{\partial c_{13}} = \frac{\partial b_3}{\partial k_{12}} = \frac{1}{k_{12}^2} x_1 & , \quad \frac{\partial b_3}{\partial c_{13}} = 0 \end{cases} \quad (11.74)$$

式(11.69)の解法は式(11.41)のそれと同様に、「第4回ゼミ」における「1. 微分方程式の数値解法」において説明した方法に準拠すればよい。

2.4.2 地下水流出成分の二次微係数の算定方法

地下水流出成分の二次微係数の算定方法については、「1.4.2 地下水流出成分の二次微係数の算定方法」述べた方法に準拠して求めることができる。

以上述べてきた理論展開に従えば、「表面・中間流出成分」と「地下水流出成分」の二次微係数が計算されるので、それらの結果を式(11.62)に代入することにより全流出成分の二次微係数の算定が可能となる。

以上、「全流出量の感度係数を用いた 2 段タンク型線形貯留関数モデル」におけるモデル定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} についての一次及び二次微係数が算出されたので、一階ニュートン法ならびにダビドン法を用いた 2 種類の最適化手法が実行可能となる。

3 個のモデル定数の最適化計算手順に関しては、「第 9 回ゼミ」における「損失項を含む貯留関数法(1 段タンク型貯留関数モデル)」を参照されたい。

文責 仙庭真司
星 清

参考文献

- 1) 馬場仁志・星 清:蒸発散を組み合わせた二段型貯留関数モデルの提案, 河川技術に関する論文集, 第 7 卷, 土木学会, pp. 459-464, 2001.
- 2) 馬場仁志・星 清・藤田睦博:蒸発散および浸透を組み合わせた二段型貯留関数型流出モデルの開発, 水文・水資源学会誌, Vol. 14, No. 5, pp. 364-375, 2001.
- 3) 秋田大輔・星 清・橋本識秀: 地下水流出成分の感度係数を考慮した 2 段タンク型貯留関数モデル, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 59 号, pp. 442-445, 2003.
- 4) 高坂佳祐・嵯峨 浩・星 清・橋本識秀: 二段型貯留関数モデルの未知パラメータ総合化に関する一考察, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 59 号, pp. 446-449, 2003.
- 5) 嵯峨 浩・星 清・橋本識秀: 二段タンク型貯留関数モデルの未知定数推定に関する研究(II), 土木学会北海道支部論文報告集, 第 60 号, II-1, pp. 272-275, 2004.
- 6) 秋田大輔・星 清: 2 段タンク型貯留関数法の最適化比較, 研究所紀要(XIV), (財) 北海道河川防災研究センター研究所, pp. 249-282, 2003.
- 7) 嵯峨 浩: 流出解析モデルと計算手法, 平成 16 年度土木学会夏期講習会テキスト, 水工学シリーズ 04-A-1~20, 土木学会水工学委員会・海岸工学委員会, 2004.

第12回 流出解析ゼミ

— 1段・2段タンク型非線形貯留関数モデルの総合化 —

近年、局所的な集中豪雨による中小河川での洪水被害が多発しており、河川計画や管理上種々の問題が起きている。今後、流量資料が不完備な中小河川流域(二級河川)において、洪水ハイドログラフを推定することが重要となってくる。そのためには、精度が高い洪水流出モデルをより多くの洪水事例に適用して、モデル定数の総合化を図る必要がある。

水文資料の不備な流域におけるハイドログラフを推定するという目的から、世界的にも「PUB」研究が盛んである。「PUB」とは Prediction in Ungauged Basin の略である。

「第9ゼミ」においては「損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)」を、「第10ゼミ」では「フィルタ一分離法を活用した2段タンク型貯留関数モデル」を紹介し、3個のモデル定数最適化手法に関して詳述してきた。

ここでは、北海道内一級河川13水系の650既往洪水資料に1段・2段タンク型非線形貯留関数モデルを適用して、モデル定数の最適同定を行い、洪水ハイドログラフの再現精度比較を行う。併せて、北海道内の流量資料の不備な小流域における洪水ハイドログラフを推定する目的で、北海道を4地域に分割し、貯留関数モデル定数の総合化(PUBの提案)を図る。

1. 損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)の概要

「第9ゼミ」で述べた損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)を再記述すれば、基本式は以下のシステム方程式で表される(図-1参照)。

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{dt} = r - q_1 - b + q_0 \\ s_1 = k_{11}q_1^{p_1} + k_{12}\frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ b = k_{13}q_1 = (c_{13}-1)q_1 \\ q_0 = q_B \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad (12.1)$$

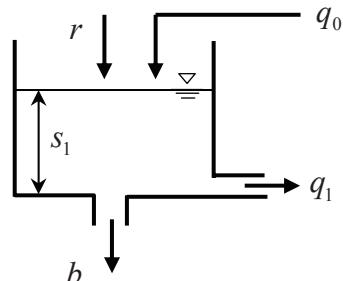


図-1 1段タンク型貯留関数流出モデル

ここに、 s_1 : 貯留高[mm]、 r : 観測雨量[mm/h]、

q_1 : 観測流出高[mm/h]、 b : 損失高[mm/h]、 q_0 : 基底流出高[mm/h]、 q_B : 初期流出高[mm/h]、 k_{11}, k_{12} : 貯留係数、 k_{13} : 損失係数、 p_1, p_2 : 貯留指数、 λ : 減衰係数

モデル定数 k_{11}, k_{12}, p_1 及び p_2 に関しても、次に示す関係式や一定値で与えられる。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11}A^{0.24} & , \quad k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648} & , \quad k_{13} = c_{13} - 1 \\ p_1 = 0.6 & , \quad p_2 = 0.4648 \end{cases} \quad (12.2)$$

ここに、 A : 流域面積[km^2]、 \bar{r} : 平均雨量強度[mm/h]、 c_{11}, c_{12}, c_{13} : 未知定数

したがって、数学的最適化手法を用いて、未知定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} を同定しなければならない。

2. フィルタ一分離法を活用した2段タンク型非線形貯留関数モデルの概要

「第10回ゼミ」において既述したように、損失機構を持つ1段タンク型貯留関数モデルに地下水流出成分を追加した2段タンク型非線形貯留関数モデルを導入する(図-2参照)。

1段目タンクにおいては、1段タンク型貯留関数モデルと同じ式(12.1)の非線形貯留方程式を用いる。一方、地下水流出成分となる2段目タンクは線形貯留方程式で表現される。

したがって、2段目タンクの線形貯留関数法は次式で与えられる。

$$\begin{cases} s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} = b - q_2 \end{cases} \quad (12.3)$$

ここに、 s_2 :2段目タンク貯留高[mm]、 q_2 :地下水流出高[mm/h]、 b :浸透供給高[mm/h]

2段目タンクの貯留係数 k_{21} と k_{22} については、流出成分分離法より求められる c_0 と c_1 の値を利用して、次式で近似表現されている。

$$k_{21} = c_1 k_{22}, \quad k_{22} = k_{13}/c_0, \quad c_0 = (\delta/T_c)^2, \quad c_1 = \delta^2/T_c \quad (12.4)$$

ここに、 k_{21}, k_{22} :2段目タンクの貯留係数、 c_0, c_1 :既知定数、 T_c :地下流出成分の分離時定数、 δ :減衰係数

T_c は、ハイドログラフの低減部より決定される定数である。 δ は通常2.0~3.0の値をとるが、本検討では $\delta=2.1$ とした。その結果、2段目タンクの未知定数は k_{13} だけとなる。

1段目(表面・中間流出成分)の流出高 q_1 と2段目(地下水流出成分)の流出高 q_2 を合計して、全流出高 q とする。

$$q = q_1 + q_2 \quad (12.5)$$

2段タンク型非線形貯留関数モデルに含まれる未知定数は、1段タンク型貯留関数モデルと同じく c_{11}, c_{12} 及び $c_{13}(=k_{13}+1)$ の3個であり、これらを数学的最適化手法で同定する必要がある。

3. 1段・2段タンク型非線形貯留関数モデルによる適用例

北海道内の1級河川13水系と標津川(指定河川)において、昭和36年から平成13年までに観測されたピーク比流量が $0.4[\text{m}^3/\text{sec}/\text{km}^2]$ 以上(網走川と常呂川は0.3以上)の洪水資料を解析対象とした。表-1に水系毎の解析洪水資料数を示す。

表-2は観測地点122箇所における全水系の流域面積の統計量で、平均(μ)が 506.6km^2 で標準偏差(σ)は 441.0km^2 となり、全流域における $\mu \pm \sigma$ 内の標本数は89で約73%の集中度(「平均値土標準偏差」の範囲に含まれる標本数の割合)を示した。

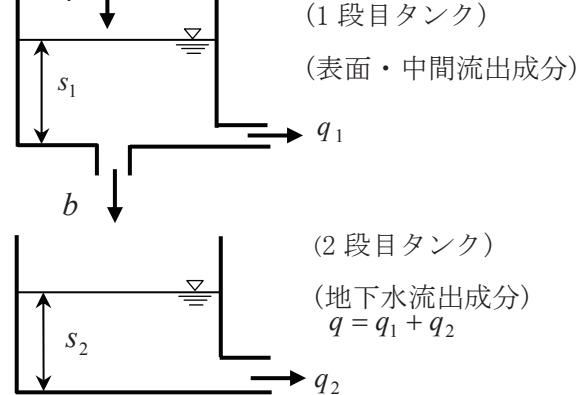


図-2 2段タンク型非線形貯留関数モデル

図-3は解析対象の全水系の流域面積度数分布である。流域面積の規模は、 300km^2 以下が48%、 600km^2 以下が65%であり、斜面流出が卓越し、河道の遅れ効果が少ない河川流域であると考えられる。

表-3は全洪水における比流量の統計量で、平均(μ)が1.04で標準偏差(σ)は0.76となり、全洪水における $\mu \pm \sigma$ 内の標本数は570で約88%の集中度(「平均値±標準偏差」の範囲に含まれる標本数の割合)を示した。

表-1 解析対象洪水

| 水系名 | 洪水数 | 水系名 | 洪水数 |
|-----|-----|-------|-----|
| 天塩川 | 51 | 尻別川 | 69 |
| 渚滑川 | 42 | 後志利別川 | 65 |
| 湧別川 | 32 | 鶴川 | 34 |
| 常呂川 | 34 | 沙流川 | 60 |
| 網走川 | 20 | 釧路川 | 42 |
| 留萌川 | 39 | 十勝川 | 86 |
| 石狩川 | 72 | 標津川 | 4 |
| 合計 | | 650洪水 | |

表-2 全水系の流域面積統計量

| 観測地点数 | 流域面積 (km^2) | | | |
|-------|------------------------|----------------------|-------------------------|------------|
| | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) | $\mu \pm \sigma$ 標本数 | 集中度 (%) |
| 122 | 506.6 | 441.0 | 89 | 73 |

表-3 全水系の比流量度数分布

| 洪水数 | 比流量 | | | |
|-----|-----------------|----------------------|-------------------------|------------|
| | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) | $\mu \pm \sigma$ 標本数 | 集中度 (%) |
| 650 | 1.04 | 0.76 | 570 | 88 |

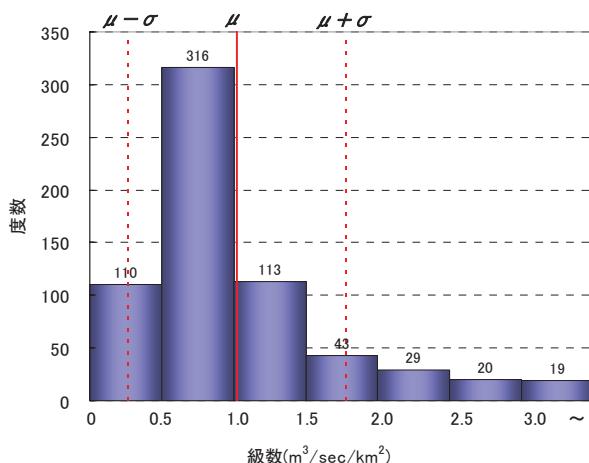


図-3 全水系における流域面積の度数分布

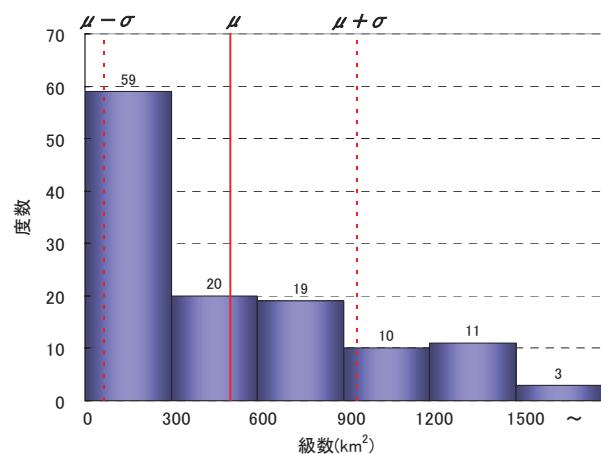


図-4 全水系における比流量の度数分布

図-4はピーク比流量の度数分布であり、約83%のデータが0.5以上の範囲に含まれている。

1段・2段タンク型貯留関数モデル定数 c_{11} 、 c_{12} 及び c_{13} の最適化手法として、1階ニュートン法を用いた。また、目的関数は「第5回 流出解析ゼミ」の「9. モデル定数最適化の目的関数と精度評価指標」で既述したKAI2(カイ2乗基準)に準拠した。

実測ハイドログラフと計算ハイドログラフの精度評価を次式で計算する。

$$\text{ピーク誤差} \quad J_{PE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|q_p^* - q_p|}{q_p^*} \quad (12.6)$$

$$\text{相対誤差} \quad J_{RE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|q_{si}^* - q_{si}|}{q_{si}^*}$$

ここに、 q_p^* :観測ピーク流出高[mm/h]、 q_p :計算ピーク流出高[mm/h]、 q_{si}^* :観測流出高[mm/h]、 q_{si} :計算流出高[mm/h]、 N :流量標本数

各水系の1段タンク型モデル定数統計量(平均値及び標準偏差)と2段タンク型モデル定数統計量をそれぞれ、表-4と表-5に示す。

全水系における1段タンク型モデルと2段タンク型モデルによる観測ピーク流出高と計算ピーク流出高の比較を、それぞれ図-5と図-6に示す。

ピーク相対誤差(J_{PE})を比較した結果においては、1段タンク型モデルに比べて2段タンク型モデルの方が小さい値を示しており、2段タンク型モデルのピーク流出高の再現性が向上していることがわかる。

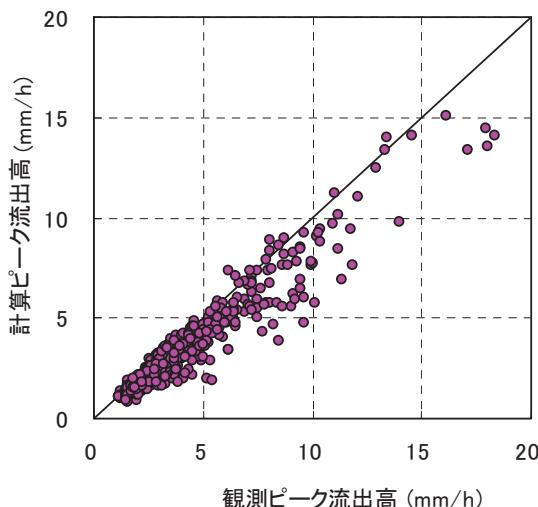


図-5 1段タンク型モデルによる
ピーク流出高の比較(全データ)

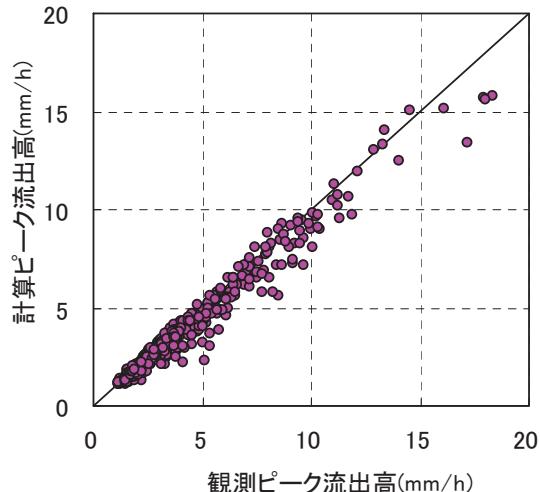


図-6 2段タンク型モデルによる
ピーク流出高の比較(全データ)

表-4 水系毎のモデル定数統計量(1段タンク型モデル)

| 水系名 | 洪水数 | c_{11} | | c_{12} | | c_{13} | | 減衰係数(λ) | |
|-------|-----|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-------------------|----------------------|
| | | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) |
| 天塩川 | 51 | 12.213 | 5.040 | 0.143 | 0.178 | 1.445 | 0.406 | 0.019 | 0.005 |
| 渚滑川 | 42 | 11.193 | 3.992 | 0.183 | 0.124 | 1.308 | 0.491 | 0.017 | 0.005 |
| 湧別川 | 32 | 10.157 | 2.219 | 0.181 | 0.072 | 1.438 | 0.289 | 0.014 | 0.003 |
| 常呂川 | 34 | 13.581 | 3.894 | 0.123 | 0.073 | 1.652 | 0.488 | 0.018 | 0.005 |
| 網走川 | 20 | 17.005 | 4.604 | 0.094 | 0.040 | 2.939 | 1.259 | 0.014 | 0.003 |
| 留萌川 | 39 | 11.293 | 2.816 | 0.193 | 0.087 | 1.477 | 0.479 | 0.017 | 0.010 |
| 石狩川 | 72 | 11.193 | 4.320 | 0.144 | 0.126 | 1.848 | 0.600 | 0.019 | 0.014 |
| 尻別川 | 69 | 12.624 | 4.172 | 0.106 | 0.058 | 1.854 | 0.484 | 0.017 | 0.004 |
| 後志利別川 | 65 | 9.232 | 2.382 | 0.148 | 0.081 | 1.469 | 0.396 | 0.020 | 0.006 |
| 鵡川 | 34 | 10.591 | 2.580 | 0.146 | 0.065 | 1.491 | 0.680 | 0.023 | 0.005 |
| 沙流川 | 60 | 10.893 | 2.470 | 0.130 | 0.077 | 1.307 | 0.357 | 0.016 | 0.005 |
| 釧路川 | 42 | 21.878 | 7.517 | 0.078 | 0.047 | 3.370 | 1.287 | 0.018 | 0.006 |
| 十勝川 | 86 | 13.649 | 4.143 | 0.114 | 0.065 | 1.781 | 0.789 | 0.017 | 0.004 |
| 標津川 | 4 | 20.465 | 3.495 | 0.073 | 0.007 | 2.448 | 0.429 | 0.012 | 0.005 |
| 全水系 | 650 | 12.488 | 5.035 | 0.135 | 0.094 | 1.750 | 0.824 | 0.019 | 0.013 |

表-5 水系毎のモデル定数統計量(2段タンク型モデル)

| 水系名 | 洪水数 | c_{11} | | c_{12} | | c_{13} | | 分離時定数(T_c) | |
|-------|-----|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| | | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) |
| 天塩川 | 51 | 8.091 | 4.044 | 0.331 | 0.213 | 2.331 | 0.788 | 55.5 | 16.16 |
| 渚滑川 | 42 | 8.092 | 2.906 | 0.378 | 0.216 | 2.115 | 0.808 | 65.9 | 20.99 |
| 湧別川 | 32 | 7.463 | 1.951 | 0.384 | 0.181 | 2.139 | 0.465 | 75.8 | 19.93 |
| 常呂川 | 34 | 9.698 | 3.340 | 0.304 | 0.212 | 2.744 | 0.732 | 60.0 | 16.63 |
| 網走川 | 20 | 12.883 | 3.815 | 0.197 | 0.104 | 4.036 | 1.415 | 72.7 | 12.96 |
| 留萌川 | 39 | 8.666 | 2.099 | 0.337 | 0.257 | 1.787 | 0.558 | 76.7 | 35.65 |
| 石狩川 | 72 | 8.081 | 3.444 | 0.272 | 0.207 | 2.453 | 0.850 | 51.8 | 25.98 |
| 尻別川 | 69 | 9.225 | 2.782 | 0.242 | 0.140 | 2.751 | 0.840 | 62.9 | 15.47 |
| 後志利別川 | 65 | 5.906 | 1.689 | 0.403 | 0.263 | 1.866 | 0.528 | 55.6 | 18.01 |
| 鵡川 | 34 | 7.215 | 1.847 | 0.385 | 0.218 | 2.561 | 1.220 | 45.3 | 11.55 |
| 沙流川 | 60 | 8.035 | 2.279 | 0.264 | 0.176 | 1.898 | 0.586 | 69.1 | 22.86 |
| 釧路川 | 42 | 14.692 | 4.870 | 0.165 | 0.102 | 4.434 | 1.375 | 62.6 | 19.04 |
| 十勝川 | 86 | 9.405 | 2.942 | 0.297 | 0.259 | 2.487 | 0.988 | 60.8 | 16.13 |
| 標津川 | 4 | 12.393 | 0.999 | 0.265 | 0.026 | 3.942 | 0.928 | 95.4 | 39.08 |
| 全水系 | 650 | 8.803 | 3.618 | 0.304 | 0.217 | 2.499 | 1.097 | 61.7 | 22.01 |

4. 北海道4地域におけるモデル定数の総合化

洪水ハイドログラフを推定するために、モデル定数の総合化を行った。既往洪水資料から流域の特性を考慮して、北海道を4地域に分割した結果を図-7に示す。表-6には各地域に属する河川名と解析洪水数を示す。



図-7 北海道における4地域の分類

表-6 地域区内の河川と解析洪水数

| 地域区 | 河川名 | 洪水数 |
|--------|-------------------|-----|
| I 地域 | 留萌川・石狩川・尻別川・後志利別川 | 245 |
| II 地域 | 天塩川・渚滑川・湧別川・常呂川 | 159 |
| III 地域 | 網走川・標津川・釧路川 | 66 |
| IV 地域 | 鵡川・沙流川・十勝川 | 180 |

表-7 地域毎のモデル定数統計量 (1段タンク型モデル)

| 地域区 | c_{11} | | c_{12} | | c_{13} | |
|--------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) |
| I 地域 | 11.092 | 3.821 | 0.142 | 0.096 | 1.690 | 0.531 |
| II 地域 | 11.822 | 4.206 | 0.153 | 0.119 | 1.461 | 0.431 |
| III 地域 | 20.316 | 6.881 | 0.082 | 0.044 | 3.184 | 1.261 |
| IV 地域 | 12.152 | 3.668 | 0.125 | 0.070 | 1.568 | 0.684 |
| 全水系 | 12.501 | 5.035 | 0.134 | 0.094 | 1.752 | 0.824 |

表-8 地域毎のモデル定数統計量 (2段タンク型モデル)

| 地域区 | c_{11} | | c_{12} | | c_{13} | | T_c | |
|--------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) |
| I 地域 | 7.919 | 2.950 | 0.308 | 0.225 | 2.275 | 0.827 | 59.9 | 25.0 |
| II 地域 | 8.308 | 3.321 | 0.348 | 0.208 | 2.323 | 0.759 | 63.3 | 19.7 |
| III 地域 | 14.005 | 4.485 | 0.180 | 0.102 | 4.283 | 1.363 | 67.6 | 20.5 |
| IV 地域 | 8.535 | 2.689 | 0.303 | 0.229 | 2.305 | 0.967 | 60.6 | 19.7 |
| 全水系 | 8.803 | 3.618 | 0.304 | 0.217 | 2.499 | 1.097 | 61.7 | 22.0 |

表-9 地域毎の誤差統計量(1段タンク型モデル)

| 地域区 | J_{PE} | | J_{RE} | |
|--------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) |
| I 地域 | 0.169 | 0.133 | 0.173 | 0.083 |
| II 地域 | 0.150 | 0.105 | 0.131 | 0.061 |
| III 地域 | 0.208 | 0.119 | 0.166 | 0.071 |
| IV 地域 | 0.179 | 0.121 | 0.146 | 0.064 |
| 全水系 | 0.171 | 0.123 | 0.155 | 0.074 |

表-10 地域毎の誤差統計量(2段タンク型モデル)

| 地域区 | J_{PE} | | J_{RE} | |
|--------|-----------------|----------------------|-----------------|----------------------|
| | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) | 平均 (μ) | 標準偏差 (σ) |
| I 地域 | 0.093 | 0.091 | 0.317 | 0.622 |
| II 地域 | 0.071 | 0.062 | 0.202 | 0.165 |
| III 地域 | 0.084 | 0.070 | 0.189 | 0.118 |
| IV 地域 | 0.100 | 0.077 | 0.181 | 0.097 |
| 全水系 | 0.089 | 0.079 | 0.238 | 0.400 |

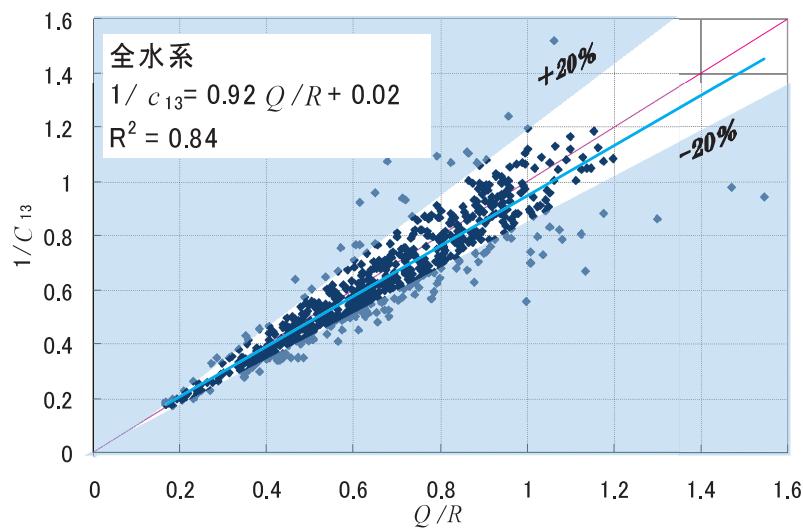
図-8 $1/c_{13}$ と Q/R (総流出量/総雨量) の関係

表-11 地域毎の $1/c_{13}$ と Q/R の関係式

| 地域 | 回帰方程式 | R^2 値 |
|--------|-----------------------------|---------|
| I 地域 | $1/c_{13} = 0.83Q/R + 0.11$ | 0.86 |
| II 地域 | $1/c_{13} = 0.78Q/R + 0.20$ | 0.66 |
| III 地域 | $1/c_{13} = 1.20Q/R - 0.04$ | 0.90 |
| IV 地域 | $1/c_{13} = 0.97Q/R + 0.07$ | 0.89 |

全水系及び地域毎の1段タンク型モデル定数統計量と2段タンク型モデル定数統計量をそれぞれ、表-7と表-8に示す。表-9と表-10には、それぞれ地域毎の1段・2段タンク型モデルによる誤差統計量が示されている。III地域(網走川・標津川・釧路川)のモデル定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} の値は1段・2段タンク型モデルにおいて顕著な差異を示している。他の地域と比較すると、 c_{11} と c_{13} の値は大きく、 c_{12} の値は小さいことが分かる。

誤差統計量である J_{PE} (ピーク誤差)はIII地域の1段タンク型モデルで20.8%と大きかったが、2段タンク型モデルでは8.4%と小さくなり、浸透性の高いIII地域においては2段タンク型モデルの方がハイドログラフのピークの再現性が良いことが明らかとなった。

全水系における $1/c_{13}$ と Q/R (総流出量/総雨量)の関係を図-8に示す。また、表-11には4地域における $1/c_{13}$ と Q/R (総流出量/総雨量)の関係式を示す。

提案モデルの損失係数 c_{13} の値は、基底流出成分の分離と流出率から理論的に導かれる値の±20%内にほぼ収まっており、有効雨量を用いた手法と同等の結果が得られる事を示唆している。各地域の R^2 値も大きく、 $1/c_{13}$ と Q/R の相関が高いことがわかる。

5. 中小河川におけるハイドログラフ推定

平成15年8月、台風10号が北海道に上陸し、甚大な被害をもたらした。門別町と新冠町を境とする厚別川流域では既往最大の記録的な豪雨となり(総降雨量356mm、最大時間雨量47mm)、既往水位～流量曲線を用いて補間すれば、比流量 $9.39\text{m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ とかなり大きな値を記録した。しかしながら、洪水時には河川水位が計画高水位を越え、破堤や溢流し正確な観測を行うことが出来なかった。また、総雨量と総流出量の水収支の関係からも、流出率が1を超えており、既往水位～流量曲線による洪水流量推定は不可能であると考えられる。

そこで、厚別川流量観測所・豊田地点(流域面積 270km^2)における過去の代表的な洪水を例に、1段タンク型モデルと2段タンク型モデルによるハイドログラフの検証を行った。また、この流域は、図-7のIV地域に属し、表-7と表-8に示されるIV地域の平均値(μ)と標準偏差(σ)を用い、安全側の計画となるようにモデル定数を選択する。 c_{11} が小さい時はハイドログラフが尖鋭化し、 c_{12} が小さくなるとピークの生起時刻が早まる。 c_{13} は流出率と高い相関関係があり、 c_{13} が小さくなると流出率が大きくなり、総流出量が大きくなる。このようなモデル定数の特徴より、 c_{11} は $\mu-\sigma$ 、 c_{12} は $\mu-\sigma$ 、 c_{13} は $\mu-\sigma$ ($c_{13}\geq 1$)の値を用いる。また、分離時定数 T_c はIV地域の平均値 μ (60.6hrs)を使用し、減衰係数 λ は $1/T_c$ の値から求め、それらの定数をまとめて表-12に示す。

厚別川流量観測所・豊田地点における代表的な3洪水の再現結果を図-9～図-14と表-13及び表-14に示す。なお、3洪水の流出解析にあたっては、モデル定数は表-12に示す値に固定していることに注意すべきである。3洪水のモデルによる誤差とIV地域180洪水例の誤差統計量と比較すると、ピーク誤差(J_{PE})はほぼ平均値となり、相対誤差(J_{RE})はやや大きい値を示しているが、「平均値±標準偏差」の範囲内に収まっており、十分な適合度となっていることがわかる。

表-12 IV地域のモデル統計量（平均値±標準偏差）・分離時定数・減衰係数

| | c_{11} | c_{12} | c_{13} | T_c | λ |
|-----------|----------|----------|----------|-------|-----------|
| 1段タンク型モデル | 8.484 | 0.055 | 1.000 | - | 0.017 |
| 2段タンク型モデル | 5.846 | 0.074 | 1.338 | 60.6 | - |

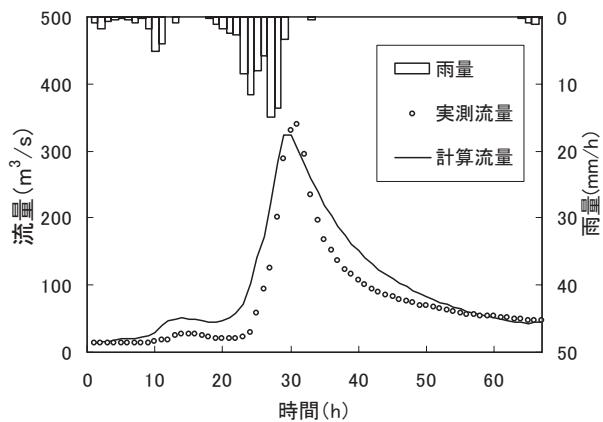


図-9 H10.9.22 洪水

1段タンク型モデル再現結果

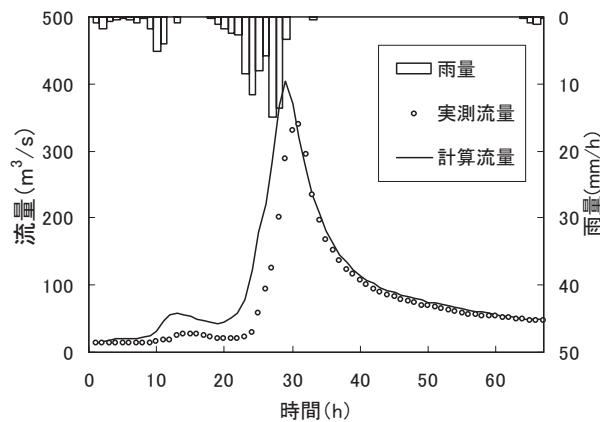


図-10 H10.9.22 洪水

2段タンク型モデル再現結果

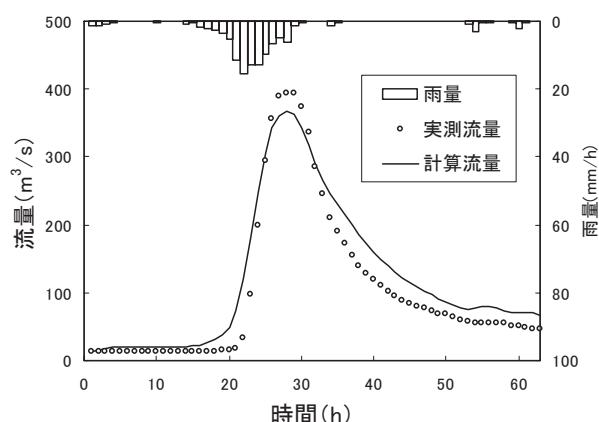


図-11 H11.5.4 洪水

1段タンク型モデル再現結果

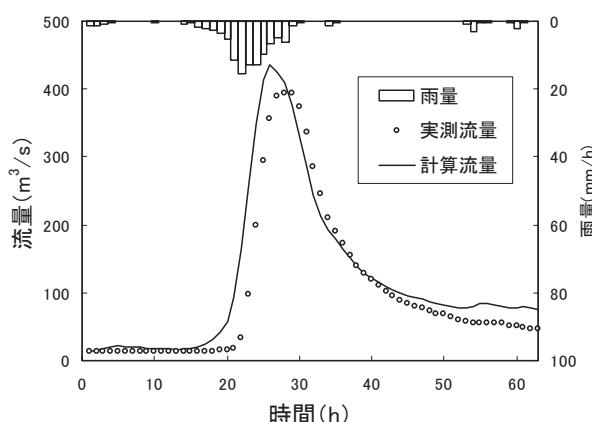


図-12 H11.5.4 洪水

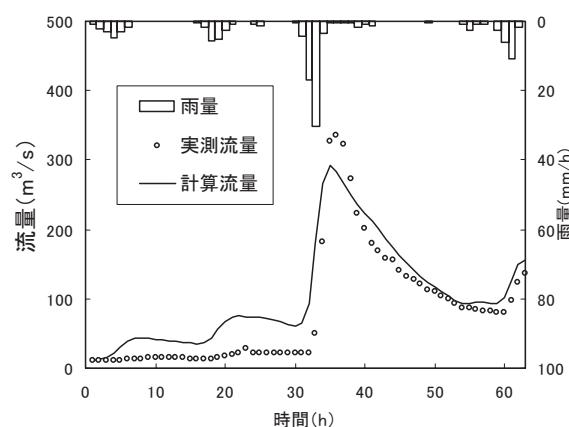
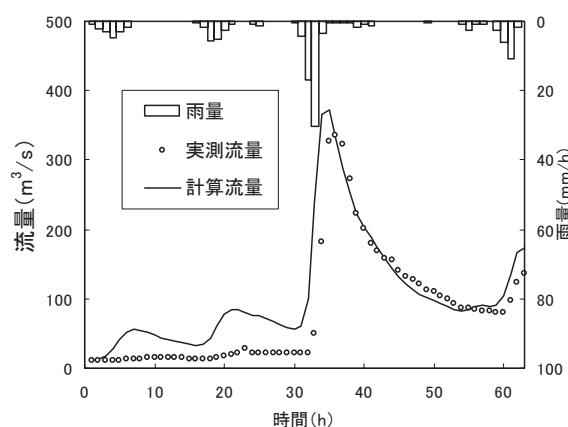
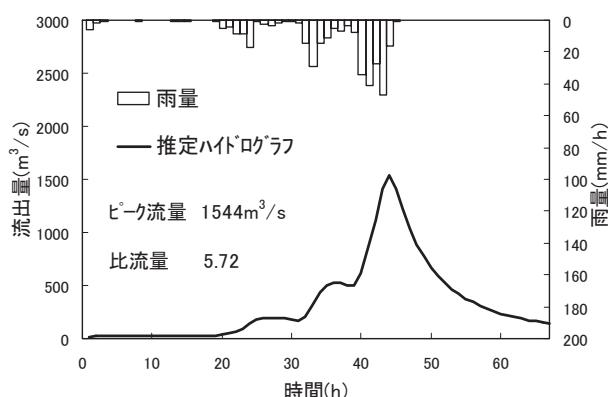
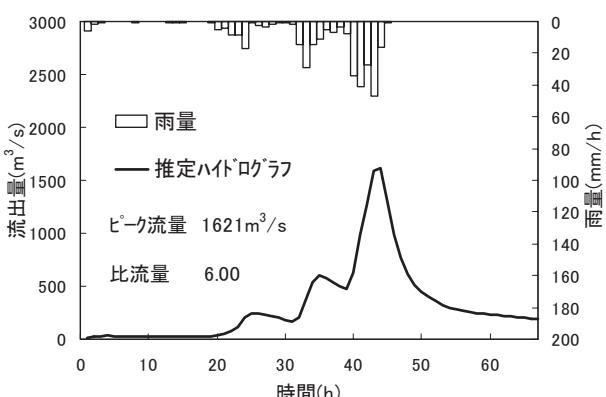
2段タンク型モデル再現結果

表-13 1段タンク型モデルによる洪水再現結果

| 洪水名 | 総雨量 (mm) | 比流量 (m ³ /s/km ²) | 実測ピーク流量 (m ³ /s) | 計算ピーク流量 (m ³ /s) | J_{PE} | J_{RE} |
|--------------|-------------|---|--------------------------------|--------------------------------|----------|----------|
| 平成10年9月22日洪水 | 97.9 | 1.26 | 340.4 | 324.1 | 0.05 | 0.49 |
| 平成11年5月4日洪水 | 113.0 | 1.45 | 392.7 | 368.3 | 0.06 | 0.50 |
| 平成14年8月7日洪水 | 126.5 | 1.24 | 335.6 | 291.3 | 0.13 | 1.00 |
| 平成15年8月10日洪水 | 327.1 | 5.72 | - | 1543.2 | - | - |

表-14 2段タンク型モデルによる洪水再現結果

| 洪水名 | 総雨量 (mm) | 比流量 (m ³ /s/km ²) | 実測ピーク流量 (m ³ /s) | 計算ピーク流量 (m ³ /s) | J_{PE} | J_{RE} |
|--------------|-------------|---|--------------------------------|--------------------------------|----------|----------|
| 平成10年9月22日洪水 | 97.9 | 1.26 | 340.4 | 403.3 | 0.19 | 0.51 |
| 平成11年5月4日洪水 | 113.0 | 1.45 | 392.7 | 436.7 | 0.11 | 0.52 |
| 平成14年8月7日洪水 | 126.5 | 1.24 | 335.6 | 372.5 | 0.11 | 1.12 |
| 平成15年8月10日洪水 | 327.1 | 6.00 | - | 1621.0 | - | - |

図-13 H14.8.7 洪水
1段タンク型モデル再現結果図-14 H14.8.7 洪水
2段タンク型モデル再現結果図-15 1段タンク型モデルによる推定
ハイドログラフ(H15.8.10 洪水)図-16 2段タンク型モデルによる推定
ハイドログラフ(H15.8.10 洪水)

ハイドログラフ再現結果より、1段タンク型モデルでは、実測ピーク流量より計算ピーク流量が小さく、2段タンク型モデルでは、実測ピーク流量より計算ピーク流量が大きい値となり、またピークの生起時刻も実測より早く、2段タンク型モデルの方が安全側にピーク流量を再現出来ているのがわかる。

検証結果と同様に、平成15年8月10日洪水における厚別川流量観測所・豊田地点(流域面積270km²)について、1段タンク型モデルと2段タンク型モデルを用いてハイドログラフの推定を試みた。

洪水ハイドログラフの推定にあたっては、表-12に示すモデル定数に固定した。

表-13と表-14に推定結果を示し、図-15と図-16にそれぞれ1段タンク型モデルと2段タンク型モデルによる推定ハイドログラフを示す。2つの推定ハイドログラフを比較すると、1段タンク型モデルより2段タンク型モデルの方が、推定ピーク流量が大きいことがわかる。

今回の検討では、安全側から2段タンク型モデルによる推定ピーク流量1,621m³/s、比流量6.00m³/s/km²とするのが妥当と考えられる。

ここでは、2つの貯留型流出モデルを道内一級河川の既往洪水に適用し、北海道を4地域に分割して各モデル定数の総合化と普遍化を試みた。また、平成15年8月洪水時の厚別川流量観測所・豊田地点において、地域別のモデル定数の平均値(μ)と標準偏差(σ)を利用して流出計算を行ない、ハイドログラフの推定と再現について良好な結果が得られた。水文資料の乏しい河川や流量観測資料がない流域(PUB)においても、実用上の精度をもって、流出計算可能であると考える。

文責 東海林 勉

参考文献

- 1) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行：單一流域を対象とした貯留関数法の精度比較，189p.，2002.
- 2) 大泉卓也・星 清・橋本識秀：北海道におけるPUBの提案，土木学会北海道支部論文報告集，第60号，II-4, pp.284-287, 2004.
- 3) 大泉卓也・星 清・橋本識秀：2003年台風10号による中小河川のハイドログラフ推定，土木学会第59回年次学術講演会，CD-ROM 概要集，II-42, pp.83-84, 2004.
- 4) 星 清・大泉卓也：北海道におけるPUBの提案と中小河川のハイドログラフ推定法，研究所紀要(XV)，(財)北海道河川防災研究センター研究所, pp.317-342, 2004.

第13回 流出解析ゼミ

— 河道における Kinematic wave 法と貯留関数法の関係 —

流出過程のモデル化にあたっては、流域・河道系流出に Kinematic wave 法を適用する場合と、貯留関数法を適用する場合がある。「第8回ゼミ」では、流域流出系における Kinematic wave 法と貯留関数法の関係を詳細に述べてきた。ここでは、河道追跡モデルとして、Kinematic wave 法を貯留関数法に変換する手法を紹介する。

提案貯留関数法は Kinematic wave 法の解と等価なモデルに集中化されているので、モデル定数の物理的意味が明確である。したがって、分割流域数が多く、河道延長が長くなても、流域流出・河道追跡計算を迅速に行うことができる。洪水時に見られる貯留量と流量の2価性は、非線形貯留方程式で直接表現されているので、遅れ時間を必要としない。洪水河道追跡用の貯留方程式は、流域での流出解析に用いた貯留方程式と構造上同一であるため、理解が容易で、演算方式も簡単である。

1. 河道流出系の Kinematic wave 法

(横流入がない場合)

図-1 に示す横流入量がない場合の河道における

Kinematic wave 法の基本方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial a_s}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad (13.1)$$

$$a_s = \alpha q_s^m \quad (13.2)$$

$$s_s = \int_0^L a_s(x, t) dx \quad (13.3)$$

$$q_s(x, 0) = 0, \quad q_s(0, t) = q_0(t) \quad (13.4)$$

ここに、 t : 時間(s), x : 河道距離(m), q_s : 河道流量(m^3/s), a_s : 横断面積(m^2), L : 河道長(m), α , m : 河道流定数

式(13.4)はそれぞれ、流量に関する初期条件と上流端境界条件である。

以下に Kinematic wave 法の数値解法を述べる。

式(13.1)の差分式は式(13.5)で与えられる(図-2 参照)。

$$\frac{q_{s,j+1}^{n+1} - q_{s,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{a_{s,j+1}^{n+1} - a_{s,j+1}^n}{\Delta t} = 0 \quad (13.5)$$

ここで、 $q_{s,j}^n$: 格子点 $x = j\Delta x$, $t = n\Delta t$ における河道流量 q_s , Δx : 河道距離増分量, Δt : 時間増分量

式(13.5)における未知数は $q_{s,j+1}^{n+1}$ と $a_{s,j+1}^{n+1}$ であるが、河道流量と流下断面積は、式(13.2)によって関連づけられる。また、 q_s または a_s の一方を独立変数として選択することができるが、一般に $m < 1$ であるので、数値計算上、 q_s を独立変数として選んだ方が誤差の累積を防ぐのに都合がよい。

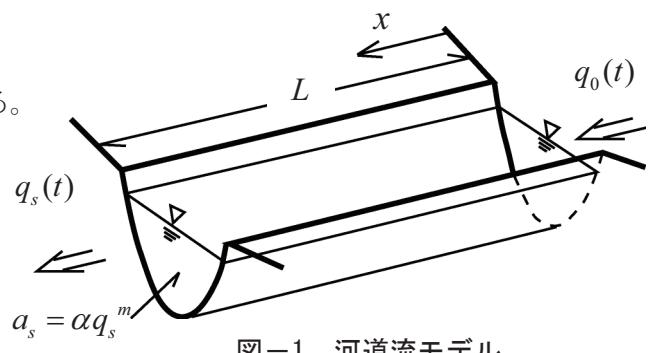


図-1 河道流モデル

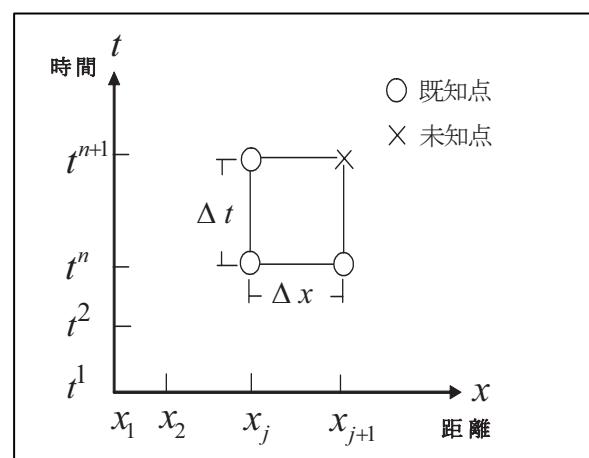


図-2 $x-t$ 面上における計算スキーム

式(13.2)より、式(13.6)と式(13.7)が得られる。

$$a_{s, j+1}^{n+1} = \alpha \left(q_{s, j+1}^{n+1} \right)^m \quad (13.6)$$

$$a_{s, j+1}^n = \alpha \left(q_{s, j+1}^n \right)^m \quad (13.7)$$

式(13.6)と式(13.7)を、式(13.5)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} q_{s, j+1}^{n+1} + \alpha \left(q_{s, j+1}^{n+1} \right)^m = \frac{\Delta t}{\Delta x} q_{s, j}^{n+1} + \alpha \left(q_{s, j+1}^n \right)^m \quad (13.8)$$

式(13.8)の右辺は既知量であり、次式で表わす。

$$\Omega = \frac{\Delta t}{\Delta x} q_{s, j}^{n+1} + \alpha \left(q_{s, j+1}^n \right)^m \quad (13.9)$$

ここで、 r と θ を式(13.10)と式(13.11)のように定義する。

$$r = q_{s, j+1}^{n+1} \text{ (未知量)} \quad (13.10)$$

$$\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (13.11)$$

この時、式(13.8)は式(13.12)で表される。

$$f(r) = \theta r + \alpha r^m = \Omega \quad (13.12)$$

式(13.12)は、 r に関して非線形であり、ニュートン法などの繰り返し計算によって解くことができる。ここで、 r^k を k 番目の繰り返し計算における r の値とする。式(13.12)を第 2 項までテーラー級数展開すると式(13.13)で表される。

$$f(r) \approx f(r^k) + (r - r^k) f'(r^k) + \frac{1}{2} (r - r^k)^2 f''(r^k) \quad (13.13)$$

式(13.12)の左辺を式(13.13)で近似すると、次式が得られる。

$$\Omega \approx f(r^k) + (r^{k+1} - r^k) f'(r^k) + \frac{1}{2} (r^{k+1} - r^k)^2 f''(r^k) \quad (13.14)$$

式(13.14)を r^{k+1} について解くと、式(13.15)が得られる。

$$r^{k+1} = r^k - \frac{f'(r^k)}{f''(r^k)} \pm \left[\left(\frac{f'(r^k)}{f''(r^k)} \right)^2 - \frac{2(f(r^k) - \Omega)}{f''(r^k)} \right]^{1/2} \quad (13.15)$$

ここで、式(13.15)に含まれる関数は次式で計算される。

$$f(r^k) = \theta r^k + \alpha(r^k)^m \quad (13.16)$$

$$f'(r^k) = \theta + \alpha m(r^k)^{m-1} \quad (\text{一次微係数}) \quad (13.17)$$

$$f''(r^k) = \alpha m(m-1)(r^k)^{m-2} \quad (\text{二次微係数}) \quad (13.18)$$

式(13.15)には2つの解がある。 $|f(r^{k+1}) - \Omega|$ の値がより小さい方を解として選択する。繰り返し計算は、絶対値エラー $|f(r^{k+1}) - \Omega|$ が、前もって与えた許容誤差 ε より小さくなるまで続ける。計算終了の基準は、式(13.19)で与えられる。

$$|f(r^{k+1}) - \Omega| \leq \varepsilon \quad (13.19)$$

ε のおおよその値は0.01Ωである。

式(13.15)の繰り返し計算の収束度は初期値 r^0 の設定に大きく依存する。以下に初期値 r^0 を求める方法を述べる。

式(13.1)における $\frac{\partial a_s}{\partial t}$ は、式(13.20)で表される。

$$\frac{\partial a_s}{\partial t} = \frac{\partial a_s}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial t} \quad (13.20)$$

また、式(13.2)より $\frac{\partial a_s}{\partial q_s}$ は、式(13.21)で表される。

$$\frac{\partial a_s}{\partial q_s} = \alpha m {q_s}^{m-1} \quad (13.21)$$

式(13.20)と式(13.21)を式(13.1)に代入すると、式(13.22)が得られる。

$$\frac{\partial q_s}{\partial x} + \alpha m {q_s}^{m-1} \frac{\partial q_s}{\partial t} = 0 \quad (13.22)$$

式(13.22)は、式(13.5)の差分式と同様に式(13.23)で表される。

$$\frac{q_{s,j+1}^{n+1} - q_{s,j}^{n+1}}{\Delta x} + \alpha m \left(\frac{q_{s,j+1}^n + q_{s,j}^{n+1}}{2} \right)^{m-1} \left(\frac{q_{s,j+1}^{n+1} - q_{s,j+1}^n}{\Delta t} \right) = 0 \quad (13.23)$$

式(13.23)を $r = q_{s,j+1}^{n+1}$ について解くと、初期値 r^0 は次式で与えられる。

$$r^0 = q_{s, j+1}^{n+1} = \left[\theta q_{s, j}^{n+1} + \alpha m q_{s, j+1}^n \left(\frac{q_{s, j+1}^n + q_{s, j}^{n+1}}{2} \right)^{m-1} \right] \left[\theta + \alpha m \left(\frac{q_{s, j+1}^n + q_{s, j}^{n+1}}{2} \right)^{m-1} \right]^{-1} \quad (13.24)$$

式(13.24)は、繰り返し計算における最良初期値 r^0 を与える。しかしながら、式(13.24)は $q_{s, j+1}^n$ と $q_{s, j}^{n+1}$ の両方が 0 の時適用できない。 $r = q_{s, j+1}^{n+1}$ と $r = q_{s, j}^{n+1}$ が 0 の時は、式(13.12)において $m=1$ を用い、さらに式(13.12)から式(13.25)を得る。

$$r^0 = \Omega / (\theta + \alpha) \quad (13.25)$$

2. 無次元領域における Kinematic wave 法

河道追跡における Kinematic wave 法を貯留関数法に変換するためには、両モデルのパラメータ間の関係を定式化する必要がある。そこで、実用的モデルパラメータの算定近似式を提案するために、式(13.1)～式(13.4)を無次元化して、対象変量の数を減らす方策を考える。

今、実領域での変数 x, t, s_s, q_s, a_s をそれぞれ距離、時間、河道貯留量、河道流出量及び河道断面積とする。それぞれの変数に対応する無次元量を大文字で表し、次の関係式を定義する。

$$x = x_* X, \quad t = t_* T, \quad s_s = s_* S_s, \quad q_s = q_* Q_s, \quad a_s = a_* A_s \quad (13.26)$$

ここに、 w_* は変数 w の規準化演算子であり、 X, T, S_s, Q_s, A_s はそれぞれ、距離、時間、貯留量、流量、横断面積の無次元量である。

式(13.26)を式(13.1)～式(13.3)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\partial A_s}{\partial T} + \frac{q_* t_*}{a_* x_*} \frac{\partial Q_s}{\partial X} = 0 \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (13.27)$$

$$A_s = \frac{\alpha q_*^m}{a_*} Q_s^m \quad (13.28)$$

$$S_s = \frac{a_* x_*}{S_*} \int_0^1 A_s dX \quad (13.29)$$

上式において、基準化演算子に関する係数を 1 とすれば次式が得られる。

$$t_* = a_* x_* / q_*, \quad a_* = \alpha q_*^m, \quad s_* = a_* x_* \quad (13.30)$$

ここで、 $x_* = L$ (対象河道長)， $q_* = \bar{q}_0$ (上流端流入ハイドログラフの平均値) とすれば、式(13.30)の基準化演算子は次式で定義される。

$$t_* = \alpha L (\bar{q}_0)^{m-1}, \quad a_* = \alpha (\bar{q}_0)^m, \quad s_* = \alpha L (\bar{q}_0)^m \quad (13.31)$$

したがって、式(13.27)～式(13.29)は次式で示される無次元 Kinematic wave 方程式に変換される。

$$\frac{\partial A_s}{\partial T} + \frac{\partial Q_s}{\partial X} = 0 \quad (0 \leq X \leq 1) \quad (13.32)$$

$$A_s = Q_s^m \quad (13.33)$$

$$S_s = \int_0^1 A_s dX \quad (13.34)$$

ただし、上流端境界条件と初期条件はそれぞれ、以下の式で与えられる。

$$Q_s(0, T) = Q_0(T), \quad Q_s(X, 0) = 0 \quad (13.35)$$

図-3 の左側は実流域での流入三角形ハイドログラフであり、右側はその無次元ハイドログラフであり、 $Q_0(T)$ のピーク値は 2 となる。

すなわち、実流域での式(13.1)と式(13.2)の Kinematic wave 法での変数と式(13.32)と式(13.33)で表わされる無次元 Kinematic wave 法の変数の対応関係は次式となり、

$$(\alpha, m, L, q_p, t_a, t_r) \rightarrow (1, m, 1, 2, T_a, T_r) \quad (13.36)$$

変数の個数が 6 個から 3 個に減少する。このため、パラメータの推定式の決定が容易となる。

「第 8 回ゼミ」における流域モデルと同様に、河道追跡における式(13.32)と式(13.33)の Kinematic wave 法を次に示す無次元貯留関数法に変換する。

$$S_s = K_3 Q_s^{p_3} + K_4 \frac{d}{dT} (Q_s^{p_4}) \quad (13.37)$$

$$\frac{dS_s}{dT} = Q_0 - Q_s \quad (13.38)$$

ここに、 K_3, K_4 ：無次元貯留係数、 Q_0 ：無次元領域での上流端流入量ハイドログラフ(図-3 参照)

無次元河道追跡モデル定数(K_3, K_4, p_3, p_4)を求める手順を以下に要約して示す。

- (a) 図-3 の右側に示される三角形ハイドログラフを考える場合、無次元領域での変数は m, T_a, T_r だけとなる。前述した方法に準拠して、式(13.32)～式(13.35)の無次元 Kinematic wave 法の数値解を求める。すなわち、 $\alpha = 1, L = 1$ (河道長)となる。また、数値計算にあたっては、 $T_r = 4$ と固定し、ピーク流量生起時刻 $T_a = 0.5(0.5)3.0$ の 6 通り、指數 $m = 0.5(0.05)0.95$ の 10 通りとして、合計 60 ケースを選定した。
- (b) 下流末端 $L = 1$ における流出量と式(13.34)の貯留量の数値解に無次元貯留関数モデル式(13.37)と式(13.38)にあてはめ、4 個のモデル定数 K_3, K_4, p_3, p_4 を一階ニュートン法により同定した。また、実用推定式を提案するため、4 個のパラメータをそれぞれ、 m と T_a/T_r の関数で表す近似式を作成した。

表-1 には (t_a/t_r) と m が与えられたときの定数(K_3, K_4, p_3, p_4)の最適値を、表-2 にはこれらの定数を推定するための近似式を示した。たとえば、 $m = 0.8$ と $t_a/t_r = 0.5$ のとき、モデルの定数は表-1 から次のように設定される。

$$K_3 = 0.9184, \quad K_4 = 0.6035, \quad p_3 = 0.8361, \quad p_4 = 0.4561$$

- (c) Kinematic wave 法ないし貯留関数法を用いて河道追跡を行う場合、河道定数(α, m)の設定が必要となる。対象河道区間(L)で河道断面積(a_s)と流量(q_s)の関係式を、あらかじめ不等流計算等により、式(13.2)で近似しておくことが可能である。したがって、河道定数(α, m)は既知となる。
- (d) 多くの流入量ハイドログラフは、三角形波形で近似できることから、図-4 に示すように、上流端流入ハイドログラフ(直上流河道からの流出量、流域からの流出量及びその合計流出量のいずれか)を三角形で近似する。このとき、 t_r = 洪水継続時間、 t_a = ピーク流量生起時刻を抽出し、その比(t_a/t_r)を算出する。
- (e) 以上の情報をもとに、貯留関数モデル定数(K_3, K_4, p_3, p_4)は、河道定数(m)及び(t_a/t_r)の関数として、表-2 に示される近似式を用いて算定される。
- (f) 図-5 に示される2山流入ハイドログラフの場合、(t_a/t_r)の値をどのように設定するかが問題となる。 (t_a/t_r) の値を種々変化させて、河道末端での流出量を Kinematic wave 法と貯留関数モデルで比較した結果、 $t_a/t_r = 0.5$ (二等辺三角形) と設定しても、実用上十分な精度で河道流出ハイドログラフが再現されることを確認している。
- (g) 既往洪水例に関しては、(t_a/t_r)の値を特定することは比較的容易である。しかしながら、洪水生起時における実時間洪水予測問題においては、(t_a/t_r)の値を前もって指定することはほとんど不可能である。したがって、上項(f)で述べたと同様に、 $t_a/t_r = 0.5$ と仮定して、河道追跡における貯留関数モデル定数を算定しても、実用上大きな問題は生じないと考えられる。

表-2 に示されるモデル定数算定式において、 $t_a/t_r = 0.5$ と設定した場合の河道追跡モデル定数(K_3, K_4, p_3, p_4)の値を求める近似式が表-3 に掲げられている。

表-1 で得られた最適値を用いて、4 個の貯留関数モデルパラメータをそれぞれ $m, T_a/T_r$ の関数で表す近似式を最小二乗法によって求めた結果が表-2 に示されている。この近似式の精度を調べるために、4 個のパラメータの最大相対誤差を表-4 に示す。すなわち、絶対相対誤差では、 K_3 は 0.61% 以下、 K_4 は 8.89% 以下、 p_3 は 2.88% 以下、 p_4 は 17.69% 以下であり、実用上十分な精度を持っていると考えられる。

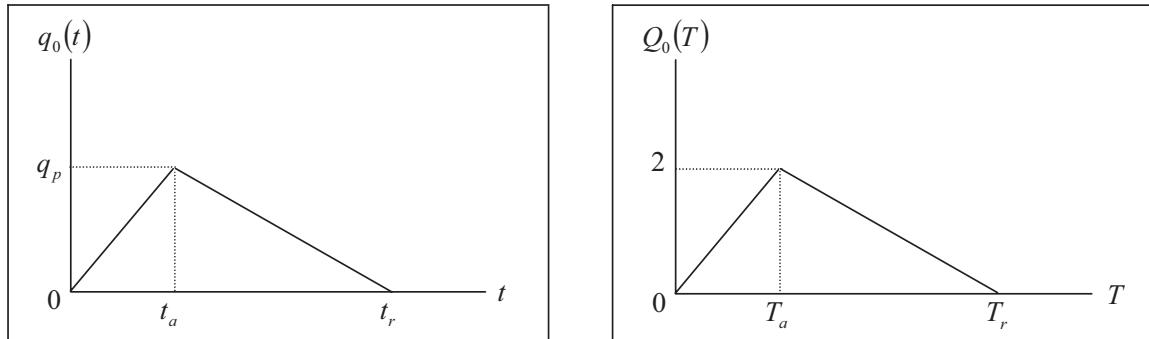


図-3 流入三角形ハイドログラフの変換

図-6 及び図-7 には、それぞれ $m=0.6$, $T_a/T_r = 0.375$ 及び $T_a/T_r = 0.75$ の場合の無次元領域における Kinematic wave 法と貯留関数法による末端 $L=1.0$ における流出量ハイドログラフと貯留量～流出量($S \sim Q$)の関係を比較して示した。Kinematic wave 法の計算条件は $\Delta T = 0.05$, $\Delta X = 0.02$ (河道長 $L=1.0$ を 50 分割) である。また、式(13.34)の河道貯留量の計算には台形公式を用いた。

貯留関数法におけるモデル定数 K_3, K_4, p_3, p_4 の値は表-1 に示される。以上の結果を総合的に判断すると、貯留関数法による解は十分な精度で Kinematic wave 法の解を再現していると考えられる。

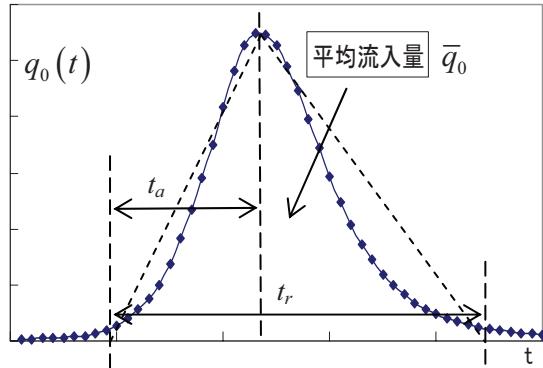


図-4 上流端流入ハイドログラフ

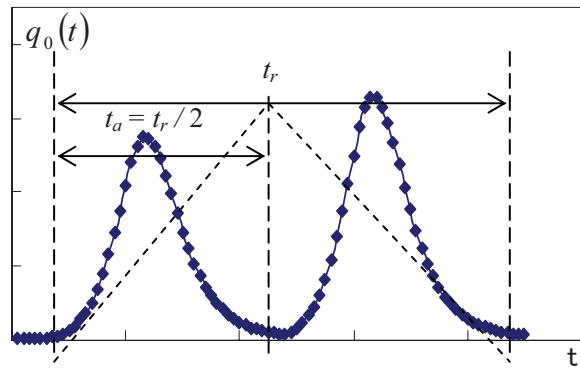


図-5 2山流入ハイドログラフ

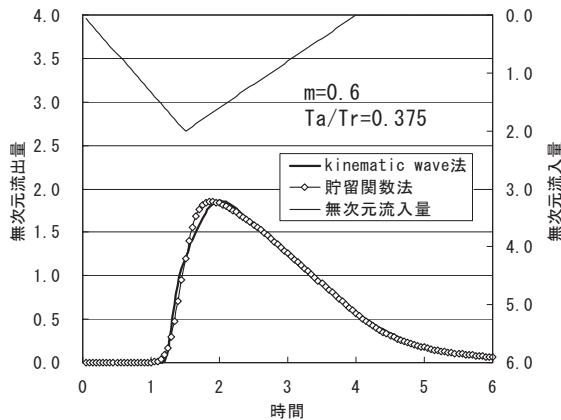


図-6a 無次元領域での Kinematic wave 法と貯留関数法によるハイドログラフ比較

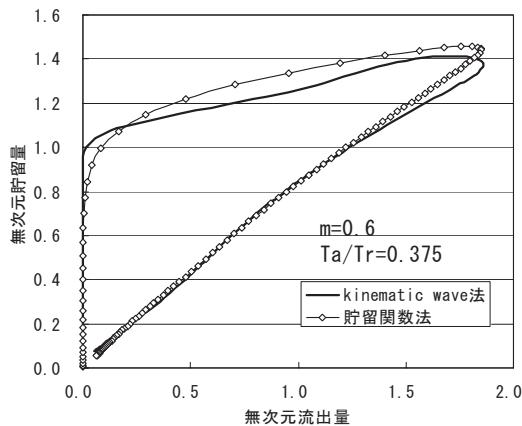
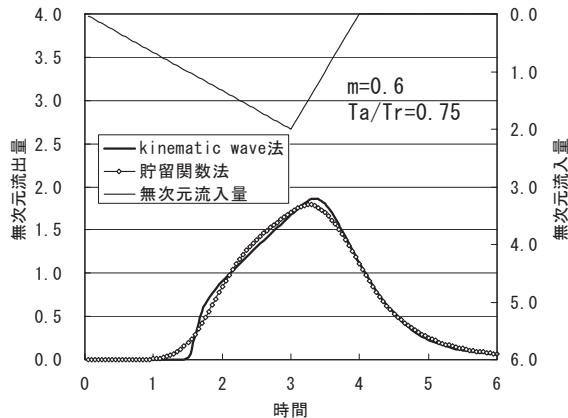
図-6b 無次元領域での Kinematic wave 法と貯留関数法による $S \sim Q$ 曲線比較

図-7a 無次元領域での Kinematic wave 法と貯留関数法によるハイドログラフ比較

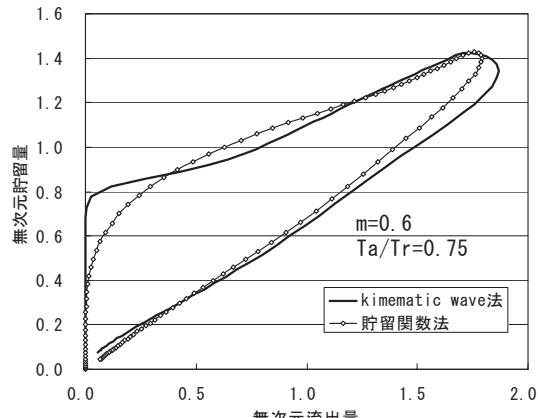
図-7b 無次元領域での Kinematic wave 法と貯留関数法による $S \sim Q$ 曲線比較

表-1 貯留関数モデルパラメータ最適値

| t_a / t_r | m | K_3 | K_4 | p_3 | p_4 |
|-------------|------|--------|--------|--------|--------|
| 0.125 | 0.95 | 0.8637 | 0.7809 | 1.0291 | 0.2597 |
| | 0.90 | 0.8574 | 0.7619 | 1.0219 | 0.2078 |
| | 0.85 | 0.8533 | 0.7402 | 1.0075 | 0.1647 |
| | 0.80 | 0.8503 | 0.7159 | 0.9879 | 0.1293 |
| | 0.75 | 0.8533 | 0.6861 | 0.9538 | 0.1026 |
| | 0.70 | 0.8636 | 0.6507 | 0.8985 | 0.0817 |
| | 0.65 | 0.8745 | 0.6149 | 0.8378 | 0.0647 |
| | 0.60 | 0.8855 | 0.5785 | 0.7723 | 0.0502 |
| | 0.55 | 0.8960 | 0.5426 | 0.7041 | 0.0412 |
| | 0.50 | 0.9010 | 0.5132 | 0.6445 | 0.0298 |
| 0.25 | 0.95 | 0.9015 | 0.7356 | 0.9435 | 0.3885 |
| | 0.90 | 0.8891 | 0.7282 | 0.9515 | 0.3257 |
| | 0.85 | 0.8794 | 0.7189 | 0.9487 | 0.2677 |
| | 0.80 | 0.8703 | 0.7031 | 0.9417 | 0.2184 |
| | 0.75 | 0.8662 | 0.6853 | 0.9236 | 0.1748 |
| | 0.70 | 0.8710 | 0.6580 | 0.8837 | 0.1393 |
| | 0.65 | 0.8783 | 0.6316 | 0.8337 | 0.1083 |
| | 0.60 | 0.8881 | 0.6008 | 0.7737 | 0.0836 |
| | 0.55 | 0.8973 | 0.5727 | 0.7111 | 0.0628 |
| | 0.50 | 0.9016 | 0.5518 | 0.6528 | 0.0434 |
| 0.375 | 0.95 | 0.9379 | 0.6594 | 0.8653 | 0.5363 |
| | 0.90 | 0.9238 | 0.6618 | 0.8773 | 0.4660 |
| | 0.85 | 0.9114 | 0.6620 | 0.8820 | 0.4008 |
| | 0.80 | 0.8995 | 0.6557 | 0.8814 | 0.3440 |
| | 0.75 | 0.8936 | 0.6444 | 0.8712 | 0.2903 |
| | 0.70 | 0.8938 | 0.6274 | 0.8452 | 0.2415 |
| | 0.65 | 0.8980 | 0.6023 | 0.8056 | 0.1993 |
| | 0.60 | 0.9050 | 0.5803 | 0.7572 | 0.1582 |
| | 0.55 | 0.9116 | 0.5593 | 0.7058 | 0.1207 |
| | 0.50 | 0.9164 | 0.5476 | 0.6560 | 0.0862 |
| 0.5 | 0.95 | 0.9614 | 0.5746 | 0.8013 | 0.6885 |
| | 0.90 | 0.9434 | 0.5975 | 0.8271 | 0.5940 |
| | 0.85 | 0.9299 | 0.6021 | 0.8356 | 0.5222 |
| | 0.80 | 0.9184 | 0.6035 | 0.8361 | 0.4561 |
| | 0.75 | 0.9096 | 0.6062 | 0.8368 | 0.3880 |
| | 0.70 | 0.9069 | 0.5965 | 0.8198 | 0.3289 |
| | 0.65 | 0.9092 | 0.5814 | 0.7875 | 0.2736 |
| | 0.60 | 0.9145 | 0.5635 | 0.7453 | 0.2200 |
| | 0.55 | 0.9195 | 0.5470 | 0.6990 | 0.1688 |
| | 0.50 | 0.9231 | 0.5420 | 0.6532 | 0.1210 |
| 0.625 | 0.95 | 0.9832 | 0.4567 | 0.7202 | 0.9171 |
| | 0.90 | 0.9627 | 0.5044 | 0.7561 | 0.7619 |
| | 0.85 | 0.9432 | 0.5419 | 0.7850 | 0.6432 |
| | 0.80 | 0.9308 | 0.5530 | 0.7902 | 0.5626 |
| | 0.75 | 0.9194 | 0.5697 | 0.8004 | 0.4766 |
| | 0.70 | 0.9143 | 0.5756 | 0.7938 | 0.4005 |
| | 0.65 | 0.9147 | 0.5682 | 0.7705 | 0.3335 |
| | 0.60 | 0.9187 | 0.5543 | 0.7335 | 0.2710 |
| | 0.55 | 0.9230 | 0.5409 | 0.6901 | 0.2112 |
| | 0.50 | 0.9260 | 0.5385 | 0.6458 | 0.1553 |
| 0.75 | 0.95 | 0.9980 | 0.3293 | 0.6341 | 1.2761 |
| | 0.90 | 0.9897 | 0.3428 | 0.6412 | 1.1434 |
| | 0.85 | 0.9682 | 0.4004 | 0.6792 | 0.9176 |
| | 0.80 | 0.9486 | 0.4520 | 0.7069 | 0.7480 |
| | 0.75 | 0.9305 | 0.5163 | 0.7431 | 0.5865 |
| | 0.70 | 0.9223 | 0.5410 | 0.7491 | 0.4857 |
| | 0.65 | 0.9195 | 0.5493 | 0.7397 | 0.4013 |
| | 0.60 | 0.9221 | 0.5405 | 0.7105 | 0.3308 |
| | 0.55 | 0.9256 | 0.5329 | 0.6725 | 0.2632 |
| | 0.50 | 0.9283 | 0.5318 | 0.6310 | 0.2017 |

表-2 貯留関数モデルパラメータ推定のための近似式

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $K_3 = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3$ | $a_0 = b_0 + b_1(t_a/t_r) + b_2(t_a/t_r)^2 + b_3(t_a/t_r)^3 + b_4(t_a/t_r)^4$ | $a_1 = c_0 + c_1(t_a/t_r) + c_2(t_a/t_r)^2 + c_3(t_a/t_r)^3 + c_4(t_a/t_r)^4$ | $a_2 = d_0 + d_1(t_a/t_r) + d_2(t_a/t_r)^2 + d_3(t_a/t_r)^3 + d_4(t_a/t_r)^4$ | $a_3 = e_0 + e_1(t_a/t_r) + e_2(t_a/t_r)^2 + e_3(t_a/t_r)^3 + e_4(t_a/t_r)^4$ |
| $b_0 = 0.8545$ | $b_1 = -4.843$ | $b_2 = 33.8238$ | $b_3 = -72.2531$ | $b_4 = 49.7646$ |
| $c_0 = 0.5229$ | $c_1 = 22.7545$ | $c_2 = -154.6917$ | $c_3 = 327.8772$ | $c_4 = -224.9687$ |
| $d_0 = -0.8426$ | $d_1 = -39.5757$ | $d_2 = 249.2689$ | $d_3 = -512.7692$ | $d_4 = 345.5463$ |
| $e_0 = 0.2763$ | $e_1 = 22.4122$ | $e_2 = -130.006$ | $e_3 = 259.4679$ | $e_4 = -171.6907$ |
| $K_4 = a_0 e^{a_1 m + a_2 m^2}$ | $a_0 = b_0 + b_1(t_a/t_r) + b_2(t_a/t_r)^2 + b_3(t_a/t_r)^3 + b_4(t_a/t_r)^4$ | $a_1 = c_0 + c_1(t_a/t_r) + c_2(t_a/t_r)^2 + c_3(t_a/t_r)^3 + c_4(t_a/t_r)^4$ | $a_2 = d_0 + d_1(t_a/t_r) + d_2(t_a/t_r)^2 + d_3(t_a/t_r)^3 + d_4(t_a/t_r)^4$ | $a_3 = e_0 + e_1(t_a/t_r) + e_2(t_a/t_r)^2 + e_3(t_a/t_r)^3 + e_4(t_a/t_r)^4$ |
| $b_0 = 0.2404$ | $b_1 = -1.1777$ | $b_2 = 8.0276$ | $b_3 = -16.2876$ | $b_4 = 9.8026$ |
| $c_0 = 1.0848$ | $c_1 = 23.9708$ | $c_2 = -126.7464$ | $c_3 = 230.5159$ | $c_4 = -124.7640$ |
| $d_0 = 0.1929$ | $d_1 = -19.1466$ | $d_2 = 90.2282$ | $d_3 = -157.3522$ | $d_4 = 79.5772$ |
| $p_3 = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3$ | $a_0 = b_0 + b_1(t_a/t_r) + b_2(t_a/t_r)^2 + b_3(t_a/t_r)^3 + b_4(t_a/t_r)^4$ | $a_1 = c_0 + c_1(t_a/t_r) + c_2(t_a/t_r)^2 + c_3(t_a/t_r)^3 + c_4(t_a/t_r)^4$ | $a_2 = d_0 + d_1(t_a/t_r) + d_2(t_a/t_r)^2 + d_3(t_a/t_r)^3 + d_4(t_a/t_r)^4$ | $a_3 = e_0 + e_1(t_a/t_r) + e_2(t_a/t_r)^2 + e_3(t_a/t_r)^3 + e_4(t_a/t_r)^4$ |
| $b_0 = 0.5844$ | $b_1 = 0.9107$ | $b_2 = -32.9092$ | $b_3 = 96.5526$ | $b_4 = -80.2872$ |
| $c_0 = -0.9989$ | $c_1 = -18.7643$ | $c_2 = 216.3786$ | $c_3 = -546.4481$ | $c_4 = 422.4272$ |
| $d_0 = 2.7263$ | $d_1 = 53.1813$ | $d_2 = -427.1458$ | $d_3 = 976.2463$ | $d_4 = -713.376$ |
| $e_0 = -1.1199$ | $e_1 = -37.4282$ | $e_2 = 249.4726$ | $e_3 = -535.5305$ | $e_4 = 376.2721$ |
| $p_4 = a_0 + a_1 m + a_2 m^2$ | $a_0 = b_0 + b_1(t_a/t_r) + b_2(t_a/t_r)^2 + b_3(t_a/t_r)^3 + b_4(t_a/t_r)^4$ | $a_1 = c_0 + c_1(t_a/t_r) + c_2(t_a/t_r)^2 + c_3(t_a/t_r)^3 + c_4(t_a/t_r)^4$ | $a_2 = d_0 + d_1(t_a/t_r) + d_2(t_a/t_r)^2 + d_3(t_a/t_r)^3 + d_4(t_a/t_r)^4$ | $a_3 = e_0 + e_1(t_a/t_r) + e_2(t_a/t_r)^2 + e_3(t_a/t_r)^3 + e_4(t_a/t_r)^4$ |
| $b_0 = -0.3999$ | $b_1 = 10.4083$ | $b_2 = -47.3310$ | $b_3 = 71.7788$ | $b_4 = -31.9668$ |
| $c_0 = 1.3325$ | $c_1 = -34.6802$ | $c_2 = 151.6250$ | $c_3 = -223.8849$ | $c_4 = 95.8506$ |
| $d_0 = -0.7202$ | $d_1 = 24.5035$ | $d_2 = -98.6764$ | $d_3 = 138.5036$ | $d_4 = -52.1388$ |

表-3 河道追跡モデルパラメータ近似式($T_a/T_r = 0.5$ のとき)

| |
|---|
| $K_3 = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3$ |
| $a_0 = 0.96760, \quad a_1 = 0.15133, \quad a_2 = -0.81273, \quad a_3 = 0.68372$ |
| $K_4 = a_0 \exp(a_1 m + a_2 m^2)$ |
| $a_0 = 0.23516, \quad a_1 = 2.40034, \quad a_2 = -1.51880$ |
| $p_3 = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3$ |
| $a_0 = -0.13643, \quad a_1 = 1.80928, \quad a_2 = -0.02472, \quad a_3 = -0.89016$ |
| $p_4 = a_0 + a_1 m + a_2 m^2$ |
| $a_0 = -0.05408, \quad a_1 = -0.09630, \quad a_2 = 0.91673$ |

表-4 近似式の最大相対誤差

| 定 数 | T_a/T_r | m | 最適値 | 近似値 | 相対誤差 (%) |
|-------|-----------|------|--------|--------|----------|
| K_3 | 3/4 | 0.90 | 0.9897 | 0.9836 | 0.61 |
| K_4 | 3/4 | 0.90 | 0.3428 | 0.3733 | -8.89 |
| p_3 | 3/4 | 0.90 | 0.6412 | 0.6597 | -2.88 |
| p_4 | 0.5/4 | 0.50 | 0.0298 | 0.0351 | -17.69 |

3. 実領域における貯留関数法

無次元領域での貯留関数法は式(13.37)と式(13.38)で表現された。したがって、実領域での貯留関数モデルは次式で表されることになる。

$$\frac{ds_s}{dt} = q_o - q_s \quad (13.39)$$

$$s_s = k_3 q_s^{p_3} + k_4 \frac{d}{dt}(q_s^{p_4}) \quad (13.40)$$

$$a_s = \alpha q_s^m \quad (13.41)$$

ここに、 s_s ：河道貯留量(m^3)、 q_o ：河道上流端境界条件(m^3/s)、 q_s ：河道流出量(m^3/s)、 a_s ：河道断面積(m^2)、 t ：時間(s)、 k_3, k_4, p_3, p_4 ：モデル定数、 α, m ：河道定数(秒とメートル単位)

$s_s = s_* S_s$, $q_s = q_* Q_s$ 及び $t = t_* T$ の関係式を式(13.37)に代入すると、次式が得られる。

$$s_s = K_3 \frac{s_*}{q_*^{p_3}} q^{p_3} + K_4 \frac{s_* t_*}{q_*^{p_4}} \frac{d}{dt} (q^{p_4}) \quad (13.42)$$

すなわち、式(13.40)の貯留係数は次式で算定される。

$$k_3 = K_3 \frac{s_*}{q_*^{p_3}} \quad (13.43)$$

$$k_4 = K_4 \frac{s_* t_*}{q_*^{p_4}} \quad (13.44)$$

式(13.31)で与えられる規準化演算子を上式に代入すれば、次式が得られる。

$$k_3 = K_3 \alpha L (\bar{q}_o)^{m-p_3} \quad (13.45)$$

$$k_4 = K_4 \alpha^2 L^2 (\bar{q}_o)^{2m-p_4-1} \quad (13.46)$$

ここに、 K_3, K_4 : 無次元貯留係数 [(t_a/t_r) と m の関数で計算される], \bar{q}_o : 上流端平均流入量(m^3/s), L : 河道長(m)

4. 河道における貯留関数法の単位変換

一般に、複合流域における洪水追跡問題においては、分割流域の流出計算では、[mm]と[h]の単位を用い、河道区間での洪水追跡には[m^3]と[sec]の単位が用いられることが多い。流出計算と河道追跡での計算において単位が異なることは、とくに洪水予測計算で行うときに不便である。そこで、河道追跡のための貯留関数法における変数単位を [mm]と[h]に変換することを試みる。

式(13.40)に示す変数の単位を以下のように変換する。

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_s (\text{m}^3) \rightarrow s_h (\text{mm}) & s_s = (A_r \times 10^3) s_h \\ q_s (\text{m}^3/\text{s}) \rightarrow q_h (\text{mm/h}) & q_s = (A_r / 3.6) q_h \\ t (\text{s}) \rightarrow t_h (\text{h}) & t = (3.6 \times 10^3) t_h \end{array} \right. \quad (13.47)$$

ここに、 A_r : 河道上流端(ないし下流端)での全流域面積(km^2)

式(13.47)の関係式を式(13.40)に代入すると、

$$(A_r \times 10^3) s_h = k_3 \left(\frac{A_r}{3.6} q_h \right)^{p_3} + k_4 \frac{1}{3.6 \times 10^3} \frac{d}{dt_h} \left(\frac{A_r}{3.6} q_h \right)^{p_4} \quad (13.48)$$

すなわち、

$$s_h = \frac{1}{A_r \times 10^3} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^{p_3} k_3 q_h^{p_3} + \frac{1}{3.6 A_r \times 10^6} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^{p_4} k_4 \frac{d}{dt_h} (q_h^{p_4}) \quad (13.49)$$

式(13.49)より、貯留高 s_h (mm)と流出高 q_h (mm/h)を用いたときの貯留係数 k_{h3} と k_{h4} は、次式で与えられる。

$$k_{h3} = \frac{1}{A_r \times 10^3} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^{p_3} k_3 \quad (13.50)$$

$$k_{h4} = \frac{1}{3.6 A_r \times 10^6} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^{p_4} k_4 \quad (13.51)$$

\bar{q}_o (m³/s)を \bar{q}_{ho} (mm/h)に、 L (m)を L_h (km)に変換すると、 $\bar{q}_o = \frac{A_r}{3.6} \bar{q}_{ho}$ および $L = 10^3 L_h$ となる。また、

式(13.45)と式(13.46)を式(13.50)と式(13.51)に代入すれば、 k_{h3} と k_{h4} は次式で表現される。

$$\begin{aligned} k_{h3} &= \frac{K_3 \alpha L}{A_r \times 10^3} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^m (\bar{q}_{ho})^{m-p_3} = \frac{K_3 \alpha 10^3 L_h}{A_r \times 10^3} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^m (\bar{q}_{ho})^{m-p_3} \\ &= \frac{K_3 \alpha L_h}{A_r} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^m (\bar{q}_{ho})^{m-p_3} \end{aligned} \quad (13.52)$$

$$\begin{aligned} k_{h4} &= \frac{K_4 \alpha^2 L^2}{3.6 A_r \times 10^6} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^{2m-1} (\bar{q}_{ho})^{2m-p_4-1} = \frac{K_4 \alpha^2 10^6 L_h^2}{3.6 A_r \times 10^6} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^{2m-1} (\bar{q}_{ho})^{2m-p_4-1} \\ &= \frac{K_4 \alpha^2 L_h^2}{3.6 A_r} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^{2m-1} (\bar{q}_{ho})^{2m-p_4-1} \\ &= \frac{K_4}{3.6} \frac{\alpha^2 L_h^2}{A_r} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^{2m} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^{-1} (\bar{q}_{ho})^{2m-p_4-1} \end{aligned} \quad (13.53)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{K_4}{K_3^2} \frac{k_{h3}^2}{(\bar{q}_{ho})^{2(m-p_3)}} (\bar{q}_{ho})^{2m-p_4-1} \\ &= \frac{K_4}{K_3^2} k_{h3}^2 (\bar{q}_{ho})^{2p_3-p_4-1} \end{aligned} \quad (13.54)$$

式(13.52)と式(13.54)が貯留高 s_h を[mm]、流出高 q_h を[mm/h]で表したときの河道追跡用の貯留関数モデル定数である。注意すべき点は A_r : 河道下流端流域面積(km²)、 L_h : 河道長(km)、 \bar{q}_{ho} : 河道上流端平均流入高(mm/h)となることである。

文責 東海林 勉

参考文献

- 1) 木村俊晃：貯留関数法による洪水流出追跡法，建設省土木研究所，290p.，1961.
- 2) Li, R.M., Simons, D.B. and Stevens, M.A. : Nonlinear Kinematic Wave Approximation for Water Routing, Water Resources Research, 11(2), pp.245-252, 1975.
- 3) 星 清・山岡 真：雨水流法と貯留関数法との相互関係，第26回水理講演会論文集，pp. 273-278，土木学会，1982.
- 4) Devarajan, S.T. : Storage Function Model for Kinematic Channel Routing without Lateral Inflow, Master Thesis, 49p., Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand, 1983.
- 5) 宮原雅幸・星 清：河道系におけるKinematic Wave Model の貯留関数法への集中化，開発土木研究所月報，No. 552, pp. 10-21, 1999.
- 6) 宮原雅幸・星 清・橋本識秀：河道追跡のための貯留関数法，土木学会北海道支部論文報告集，第55号(B)，pp. 18-23, 1999.
- 7) 星 清・宮原雅幸：Kinematic Wave 法の貯留関数法への変換，研究所紀要(X)，(財)北海道河川防災研究センター研究所，pp. 87-104, 1999.
- 8) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行：一般化貯留関数法による流域流出解析・河道洪水追跡実用計算法，152p.，2001.

第14回 流出解析ゼミ

— 複合流域における貯留関数法の最適化 —

流域は斜面(単位流域)と河道から構成されている。山腹斜面は雨量を流量に変換する場であり、河道は斜面からの流出量を合成、運搬する場である。急峻な地形をもつ山地河川流域では、斜面流出の到達時間が河道流出のそれを卓越していることがよく知られている。したがって、河道効果が無視できると考えられる比較的面積が小さいダム流域では、單一流域とみなして洪水流出解析が行われる場合が多い。一方、集水面積が大きくなると、河道での洪水伝播が重要な要素となって、河道効果を無視できなくなる。また、近年、気象レーダ情報やGIS情報の有効活用を目指した分布型流出モデル開発も盛んに行われている。このとき、分割流域数(単位流域数)と分割河道数の増加に伴って、モデル定数の数が飛躍的に増加し、その同定が大きな課題となってくる。

「第8回ゼミ」においては「流域におけるKinematic wave法と一般化貯留関数法の関係」について記述した。この一般化貯留関数法を拡張することによって、新しい2種類の非線形貯留関数法が開発された。一般的には、分割流域での流出計算に必要なモデル定数は単位流域毎に異なるので、同定すべき定数の数も単位流域数に比例して飛躍的に増加し、最適化計算も煩雑となる。この難点をさけるために、モデル定数の算定式に含まれる未知定数は単位流域毎に一定値をとるものと仮定する。その結果、ここで提案される最適化手法は、同定すべき未知定数の数は分割流域数と分割河道数に依存しないという特徴を持っている。しかも、未知定数は河道追跡を通して、流量観測基準点毎に最適同定される。

本報告では、分割流域における流出モデルとして、以下に掲げる3種類の貯留関数法の定数最適化に関して議論を進める。なお、各モデルにおける同定すべき未知定数の数も併せて示す。

- (1) 有効雨量を用いた貯留関数法（一般化貯留関数モデル）（未知定数；1個）
- (2) 損失項を含む貯留関数法（1段タンク型貯留関数モデル）（未知定数；3個）
- (3) 地下水流出を含む貯留関数法（2段タンク型貯留関数モデル）（未知定数；3個）

河道における洪水追跡に関しても、「第13回ゼミ」の「河道におけるKinematic wave法と貯留関数法の関係」において詳述した。河道追跡モデルの貯留関数法は6個のモデル定数を有するが、これらの定数は上流端での流入ハイドログラフの形状、河道長および対象河道区間での流下断面積と流量の関係式が与えられると、一義的に求められる。したがって、河道追跡モデルには未知定数がないことを念頭に置くとよい。

1. 複合流域モデルにおける最適化手法の概要

図-1に示すように、1分割流域と1河道からなる最も単純化した複合流域における流域流出解析・河道追跡を解析例として問題提起を行い、流域モデルの定数をどのようなプロセスで最適化するかの概要を述べる。流域流出モデルにおける同定すべき未知定数の数は最大で3個である。一般性を失わないという観点から、以後の理論展開では、モデル定数が3個の場合の最適化問題を扱うこととする。流域モデルについては、單一流域の計算と同様に流域平均雨量を入力として流域流出量を算出する。一方、河道モデルについては、流域流出量合計値(あるいは上流河道流出量と流域流出量の合計値など)を上流端境界条件として、河道区間 L で洪水追跡を行う。最終的には、河道末端での観測流量と計算

流量の誤差 2 乗和平均 MSE (mean squares error) が最小となるように、流域モデルの定数を数学的最適化手法(一階ニュートン法)により同定する。この時、一次微係数(感度係数ベクトル)を必要とするが、感度係数ベクトルは数値微分に依らずに解析的に算定可能であり、しかも河道モデルにおいて、上流から下流に逐次伝達・更新されるので、計算容量も少なくてすむ。また、未知定数は全分割流域で同一値をとることから、最適化計算を迅速に行うことができる。

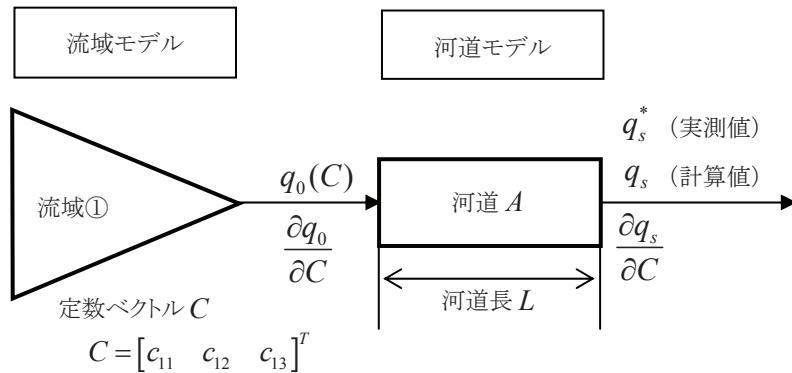


図-1 基本流域・河道モデル

図-1 に示すように、河道 A の末端 L での実測流量 q_s^* と河道追跡流量 q_s の誤差の 2 乗和が最小となるように、流出モデル定数(c_{11} , c_{12} , c_{13})を数学的最適化手法(一階ニュートン法)を用いて同定する。すなわち、今まで何度も述べてきてているように、次の目的関数を採用する。

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (q_{si}^* - q_{si})^2$$

ここに、 q_{si}^* : 観測流出高(mm/h), q_{si} : 計算流出高(mm/h), N : データ数

なお、流域①からの流出量 $q_0(C)$ の感度係数ベクトル $\partial q_0 / \partial C$ ($\partial q_0 / \partial c_{11}, \partial q_0 / \partial c_{12}, \partial q_0 / \partial c_{13}$) は既知とする。上に掲げた 3 種類の貯留関数法のそれぞれのモデルにおける感度係数ベクトルの算定法に関しては、これまでの流出解析ゼミにおいて既述しているので、主要結果のみを再記する。

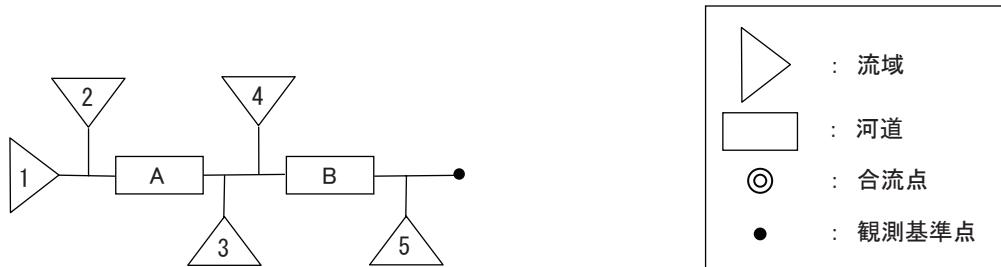
一階ニュートン法によるモデル定数の最適化問題では、定数(c_{11} , c_{12} , c_{13})に関する河道末端流量 q_s の感度係数ベクトル $\partial q_s / \partial C$ ($\partial q_s / \partial c_{11}, \partial q_s / \partial c_{12}, \partial q_s / \partial c_{13}$) が算出できれば、問題はほぼ解決されたと考えてよい。

2. 流域・河道網図の作成例

河川流域はさまざまな形状の流域・河道網から成り立っている。複合流域モデルを用いた計算プログラムについては後述する。複合流域モデルでは、まず流域・河道に計算順序を指定する識別番号を与える必要性が生ずる。しかしながら、以下に示す規則パターンを理解しておけば、流域・河道網図の作成は容易となる。識別番号を設定するにあたっての基本は、本川での流域は 0、河道は 1、合流点は 2 とし、一次支川においては、流域は 10、河道は 11 と設定する。二次支川がある場合は、流域に 20、河道に 21 と識別番号を設定し、支川が増える毎に、順次 2 衍目の数値を増やしていくべき。

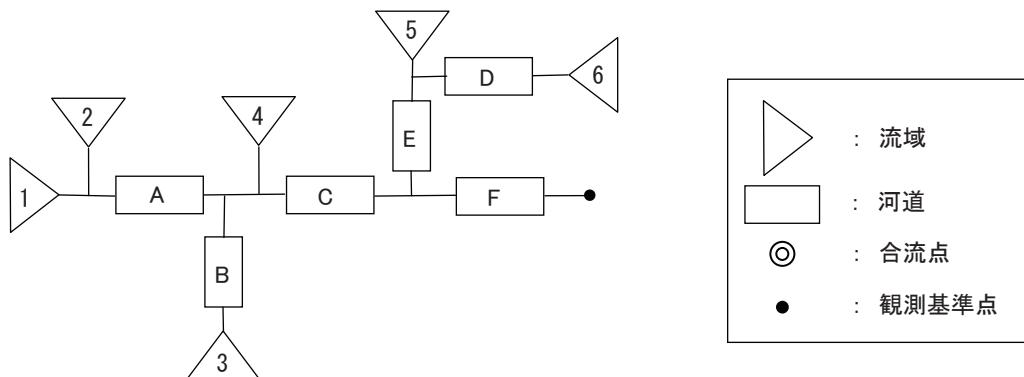
2.1 本川河道に分割流域が合流する場合

下図に示す流域・河道ネットワークは基本となるパターンである。データファイルには、
 0(流域1), 0(流域2), 1(河道A), 0(流域3), 0(流域4), 1(河道B), 0(流域5)
 のように識別番号が設定される。



2.2 支川河道に分割流域・河道を含む場合

下図に示すネットワークは1次支川、2次支川が合流するパターンである。識別番号は、
 0, 0, 1, 10(1次支川・流域3), 11(1次支川・河道B), 0, 1, 10(1次支川・流域5),
 20(2次支川・流域6), 21(2次支川・河道D), 11(1次支川・河道E), 1
 とデータファイルにセットされる。

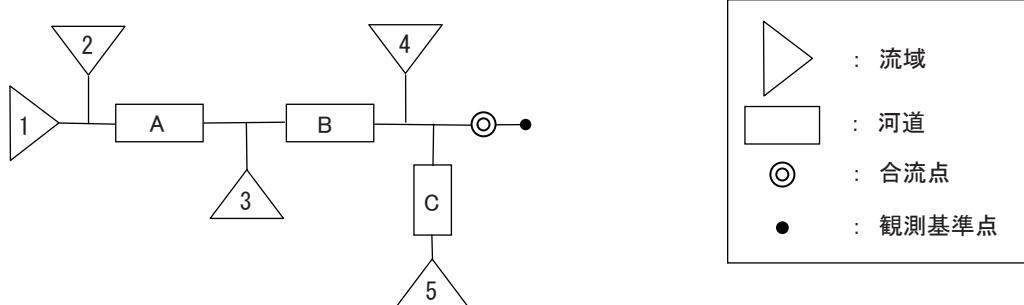


2.3 ネットワークの最後が支川流入で終わる場合

下図に示す流域・河道ネットワークは流量観測基準点直前にて支川が流入する場合である。この場合はネットワークの最後に合流点を設けなければならない。識別番号は、

0, 0, 1, 0, 1, 0, 10, 11, 2(合流点)

とデータファイルにセットされる。

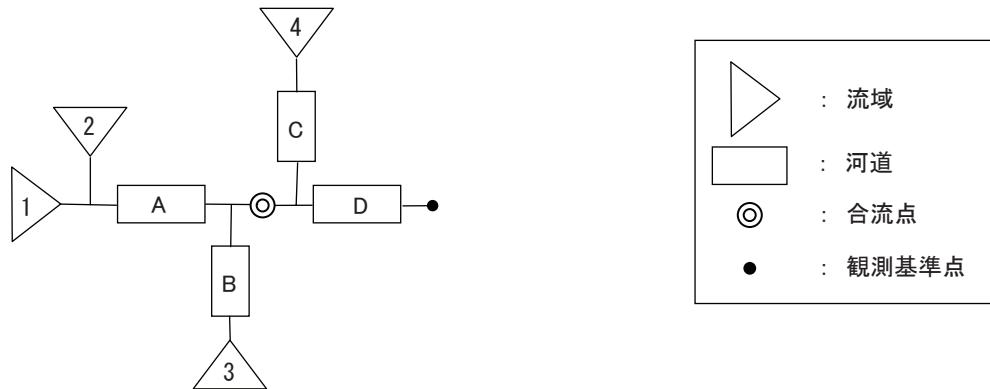


2.4 支川が連続して流入する場合

下図に示すネットワークにおいては、支川が連続して本川に流入する例を示す。この場合、ネットワークの支川合流後に合流点を設けなければならない。データファイルには、

0, 0, 1, 10, 11, 2(合流点), 10, 11, 1

のように識別番号が設定されることになる。



3. 分割流域モデル

上述した3種類の貯留関数法を単位流域(分割流域)での流出計算に適用する。基本的には、單一流域での洪水流出解析法を踏襲して、一次感度係数ベクトルを解析的に算出して、モデル定数の最適化計算を行うことになる。複合流域モデルにおける流域流出解析・河道追跡に関しては、図-1に示したように、流域モデルからの感度係数ベクトルを河道モデルに入力・伝達させる作業が残されている。そこで、これまでの流出解析ゼミにおいて述べてきた3種類の貯留型流出モデルとその感度係数ベクトルの算出結果を要約して以下に示す。

3.1 有効雨量を用いた貯留関数法(一般化貯留関数モデル)

このモデルに関しては、「第7回ゼミ」の「二価の線形・非線形貯留関数法の最適化」を参照されたい。一般化貯留関数モデルは2価の非線形貯留関数式で表され、有降雨量と直接流出量を用いる。まず、事前のデータ処理が必要となる。すなわち、観測流量を直接流出量と基底流出量を分離した後、全直接流出量と総降雨量の比から流出率を算定し、有効雨量を求める。未知パラメータは流域平均粗度(フリクション・ファクター) f_c の1個のみであることから、最適化計算も容易に行うことができる。また、有効雨量が「木村の貯留関数法」に代表される飽和雨量と一次流出率を用いて算定されれば、一般化貯留関数モデルは基本高水の再検討にも適用可能となる。以下に、この流出モデルの基本式を再記する。

$$s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad , \quad \frac{ds}{dt} = r_e - q \quad (14.1)$$

$$\begin{cases} k_{11} = \alpha_1 f_c \\ k_{12} = \alpha_1^2 \alpha_2 f_c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2.8235 A^{0.24} \\ \alpha_2 = 0.2835 (\bar{r}_e)^{-0.2648} \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ f_c = (n / \sqrt{i})^{0.6} \end{cases} \quad (14.2)$$

ここに、 s ：貯留高(mm)、 r_e ：有効雨量(mm/h)、 q ：直接流出高(mm/h)、 k_{11}, k_{12} ：貯留係数、 p_1, p_2 ：貯留指数、 A ：流域面積(km^2)、 \bar{r}_e ：平均有効雨量強度(mm/h)、 n ：等価粗度、 i ：斜面勾配、 f_c ：流域平均粗度(フリクション・ファクター)

この流域モデルにおける未知定数 f_c に関する感度係数の算出方法に関しては、「第7回ゼミ」の「5.2.1 一次微係数の算定」に詳述されている。その結果のみを以下に示す。

$$\frac{\partial q}{\partial f_c} = \frac{1}{p_2} x_1^{1/p_2-1} \frac{\partial x_1}{\partial f_c} \quad , \quad x_1 = q^{p_2} \quad (14.3)$$

3.2 損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)

このモデルの詳細については、「第9回ゼミ」の「損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)」を参照されたい。1段タンク型貯留関数モデルの特長は、直接流出量と基底流出量の分離や流出率算出などのデータ事前処理を必要としない点にある。すなわち、降雨流出過程に含まれる不確定なすべての損失を損失項でパラメタライズしているため、観測雨量と観測流量を洪水流出解析に直接用いることができる。したがって、一般化貯留関数モデルにおける主観的な要素が強い入力データの事前処理が必要なく、実用性が高い流出モデルと言える。未知パラメータ数は3個である。以下に、このモデルの一般式を示す。

$$\begin{cases} s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ \frac{ds}{dt} = r - q - b + q_0 \\ b = (c_{13} - 1)q \\ q_0 = q_B \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad (14.4)$$

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2 \bar{r}^{-0.2648} \\ p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \end{cases} \quad (14.5)$$

ここに、 s ：貯留高(mm)、 r ：観測雨量(mm/h)、 q ：観測流出高(mm/h)、 b ：損失高(mm/h)、 q_0 ：基底流出高(mm/h)、 q_B ：初期流出高(mm/h)、 k_{11}, k_{12} ：貯留係数、 p_1, p_2 ：貯留指数、 λ ：減衰係数、 A ：流域面積(km^2)、 \bar{r} ：平均雨量強度(mm/h)、 c_{11}, c_{12}, c_{13} ：未知定数

この流域モデルにおける未知定数 c_{11}, c_{12} 及び c_{13} に関する感度係数の算出方法に関しては、「第9回ゼミ」の「4.1 一次感度方程式の解法」に詳述されている。その結果のみを以下に示す。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial c_{11}} = \frac{\partial q}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = (A^{0.24}) \frac{\partial q}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial q}{\partial c_{12}} = \frac{\partial q}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = (k_{11}^2 \bar{r}^{-0.2648}) \frac{\partial q}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial q}{\partial c_{13}} = \frac{\partial q}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (14.6)$$

3.3 地下水流出を含む貯留関数法(2段タンク型貯留関数モデル)

このモデルに関しては、「第11回ゼミ」における「全流出量の感度係数を用いた2段タンク型貯留関数モデルの最適化」に詳しく述べられているので、参照されたい。2段タンク型貯留関数モデルの特長は、上段タンクで降雨流出過程の表面・中間流出成分を、下段タンクで地下水流出成分を表現した点にある。このモデルを実際の洪水例に適用した結果、1段タンク型貯留関数モデルに比較して、ピーク流量とハイドログラフ低減部の再現精度が向上した解析例が多くなっている。未知パラメータ数は3個である。以下に、この流出モデルの構成式を示す。

1段目タンク

$$\begin{cases} s_1 = k_{11}q_1^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ \frac{ds_1}{dt} = r - q_1 - b \\ b = (c_{13} - 1)q_1 \end{cases} \quad (14.7)$$

$$\begin{cases} p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648} \end{cases} \quad (14.8)$$

2段目タンク

$$\begin{cases} s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} = b - q_2 \end{cases} \quad (14.9)$$

$$\begin{cases} k_{21} = c_1 k_{22} \\ k_{22} = (c_{13} - 1)/c_0 \\ c_0 = (\delta/T_c)^2 \\ c_1 = \delta^2/T_c \end{cases} \quad (14.11)$$

$$q = q_1 + q_2 \quad (14.12)$$

ここに、 s_1 : 1段目タンク貯留高(mm)、 r : 観測雨量(mm/h)、 q_1 : 表面・中間流出高(mm/h)、 b : 1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量(mm/h)、 k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22} : 貯留係数、 p_1 , p_2 : 貯留指数、 s_2 : 2段目タンク貯留高(mm)、 q_2 : 地下水流出高(mm/h)、 q : 全流出高(mm/h)、 A : 流域面積(km²)、 \bar{r} : 平均雨量強度(mm/h)、 c_0 , c_1 : フィルター成分分離法の定数、 T_c : 地下水流出成分の分離時定数、 δ : 減衰係数(ここでは $\delta=2.1$ とした)、 c_{11} , c_{12} , c_{13} : 未知定数

この流域モデルにおける未知定数 c_{11} , c_{12} 及び c_{13} に関する感度係数の算出方法に関しては、「第11回ゼミ」の「1.3 一次微係数の算定」に詳述されている。その結果のみを以下に示す。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial c_{11}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{11}} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = A^{0.24} \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{11}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{11}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_{12}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{12}} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \left(\frac{\partial q_1}{\partial k_{12}} + \frac{\partial q_2}{\partial k_{12}} \right) \\ \frac{\partial q}{\partial c_{13}} = \frac{\partial q_1}{\partial c_{13}} + \frac{\partial q_2}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (14.13)$$

4. 河道追跡モデル

4.1 河道追跡数値計算手法

解析対象区間(L)における洪水河道追跡には次の貯留関数法を採用する。

$$\begin{cases} \frac{ds_s}{dt} = q_0 - q_s \\ s_s = k_3 q_s^{p_3} + k_4 \frac{d}{dt}(q_s^{p_4}) \end{cases} \quad (14.14)$$

$$a_s = \alpha q_s^m \quad (14.15)$$

ここに、 t ：時間(s)、 s_s ：河道貯留量(m^3)、 q_0 ：河道流入量(m^3/s)、 q_s ：河道流出量(m^3/s)、 a_s ：河道断面積(m^2)、 k_3, k_4, p_3, p_4 ：モデル定数、 α, m ：河道定数

流域モデルでの流出計算においては[mm]と[h]の単位を用い、河道モデルでの洪水追跡計算では[m^3]と[s]の単位が用いられている。計算単位時間を秒で行うと、洪水河道追跡と最適化過程での繰り返し計算時間が急激に増加する他に、モデル定数の最適値が得られない懸念が生ずる。これらの問題点を解決するためには、河道モデルでの流出量計算と感度係数算出を無次元領域で行うのが得策である。その結果、計算時間の短縮化と数値計算の精度向上を図ることが可能となる。無次元領域での計算手法と実領域への変換過程に関しては、「第13回ゼミ」の「河道における Kinematic wave 法と貯留関数法の関係」において詳述されている(演習問題を参照されたい)。

式(14.14)を無次元化した式を、式(14.16)に示す。

$$\begin{cases} \frac{dS_s}{dT} = Q_0 - Q_s \\ S_s = K_3 Q_s^{p_3} + K_4 \frac{d}{dT}(Q_s^{p_4}) \end{cases} \quad (14.16)$$

ここに、 T ：無次元時間、 K_3, K_4 ：無次元貯留係数、 Q_0 ：無次元領域での上流端流入量ハイドログラフ

河道追跡にあたっては、6個のモデル定数($K_3, K_4, p_3, p_4, \alpha, m$)の設定が必要となるが、「第13回ゼミ」にて詳述したように、これらの定数はすべて既知となる。したがって、河道モデルでは未知定数はない。実領域における河道末端流出量 q_s は、次式で計算される。

$$q_s = (\bar{q}_0) Q_s \quad (14.17)$$

ここに、 \bar{q}_0 ：上流端流入量ハイドログラフの平均値

式(14.16)の貯留方程式は流域モデルの流出解析で用いられたものと同一形式である。したがって、河道モデルの解法は流出モデルのそれに準拠すればよい。

4.2 感度係数の算出

本報告では、分割流域での流出計算に3種類の貯留関数型流出モデルが採用されている。未知パラ

メータ数もモデル毎に異なる。しかしながら、複合流域モデルでの分割流域における同定すべき未知定数の数は**最大で3個**である。そこで、以後の理論展開をできるだけ容易に理解する意味で、モデル定数が3個の場合の最適化問題を取り上げる。すなわち、河道末端での感度係数ベクトル(一次微係数)を算出し、それを順次下流に伝達させる方法について述べることとする。

いま、流出モデルでの定数ベクトルを次式で定義する。

$$C = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}] \quad (14.18)$$

式(14.16)の解法は流域モデルのそれと同一であり、次の変数変換を行う。

$$z_1 = Q_s^{p_4} \quad , \quad z_2 = \frac{d}{dT}(Q_s^{p_4}) \quad (14.19)$$

上記の変数変換により、式(14.16)は次の連立微分方程式で表される。

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dT} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dT} = -c_4 z_1^{p_5} z_2 - c_5 z_1^{p_6} + c_5 Q_0(C) \end{cases} \quad (14.20)$$

ここに、

$$c_4 = \frac{K_3}{K_4} \frac{p_3}{p_4} \quad , \quad c_5 = \frac{1}{K_4} \quad , \quad p_5 = \frac{p_3}{p_4} - 1 \quad , \quad p_6 = \frac{1}{p_4} \quad (14.21)$$

上式に示される $Q_0(C)$ は、流域モデルでの定数ベクトル $C = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]$ が与えられたとき、上流端流入量 Q_0 は既知となることを意味する。また、河道追跡定数(c_4, c_5, p_5, p_6)もすべて既知量となる。

式(14.20)を線形化近似によって解く方法は、流出モデルの解法と同じである。しかしながら、後述するように感度係数の算定が必要となるので、式(14.20)の線形化近似の結果のみを次式に示す。

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dT} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dT} = a_1 z_1 + a_2 z_2 + c_5 Q_0(C) + a_0 \end{cases} \quad (14.22)$$

ここに、 a_1, a_2 及び a_0 は定数であり、現時刻より1ステップ前の既知量 z_1 と z_2 を用いて算定される。

$$\begin{cases} a_1 = -c_4 p_5 (z_1^*)^{p_5-1} (z_2^*) - c_5 p_6 (z_1^*)^{p_6-1} \\ a_2 = -c_4 (z_1^*)^{p_5} \\ a_0 = c_4 p_5 (z_1^*)^{p_5} (z_2^*) + c_5 (p_6 - 1) (z_1^*)^{p_6} \end{cases} \quad (14.23)$$

流出モデルの定数ベクトル $C = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]$ が変化すれば、河道流入量 $Q_0(C)$ のみならず、変量 z_1 と

z_2 も変化することになるので、 z_1 と z_2 は定数ベクトル C の関数となる。すなわち、 $z_1 = z_1(C)$ 、 $z_2 = z_2(C)$ と表現される。当然のことながら、定数ベクトル $C = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]$ は時間的に変化しない。以上のことを念頭に置いて、式(14.22)を定数 (c_{11}, c_{12}, c_{13}) で微分すれば、次に示す一次感度係数方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial z_1}{\partial c_{11}} \right) = \frac{\partial z_2}{\partial c_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial z_1}{\partial c_{12}} \right) = \frac{\partial z_2}{\partial c_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial z_1}{\partial c_{13}} \right) = \frac{\partial z_2}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (14.24)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial z_2}{\partial c_{11}} \right) = a_1 \frac{\partial z_1}{\partial c_{11}} + a_2 \frac{\partial z_2}{\partial c_{11}} + c_5 \frac{\partial Q_0(C)}{\partial c_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial z_2}{\partial c_{12}} \right) = a_1 \frac{\partial z_1}{\partial c_{12}} + a_2 \frac{\partial z_2}{\partial c_{12}} + c_5 \frac{\partial Q_0(C)}{\partial c_{12}} \\ \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial z_2}{\partial c_{13}} \right) = a_1 \frac{\partial z_1}{\partial c_{13}} + a_2 \frac{\partial z_2}{\partial c_{13}} + c_5 \frac{\partial Q_0(C)}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (14.25)$$

式(14.25)に含まれる $\partial Q_0(C)/\partial c_{1i}$ ($i=1,2,3$) は流域からの流出量(河道流入量)のモデル定数 c_{1i} ($i=1,2,3$) に関する感度係数で既知である。

式(14.24)と(14.25)を行列表示すると、その内容がより理解しやすい。すなわち、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial T} \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial c_{11}} \\ \frac{\partial z_1}{\partial c_{12}} \\ \frac{\partial z_1}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial c_{11}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial c_{12}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial c_{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial c_{11}} \\ \frac{\partial z_1}{\partial c_{12}} \\ \frac{\partial z_1}{\partial c_{13}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial c_{11}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial c_{12}} \\ \frac{\partial z_2}{\partial c_{13}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_5 \frac{\partial Q_0(C)}{\partial c_{11}} \\ c_5 \frac{\partial Q_0(C)}{\partial c_{12}} \\ c_5 \frac{\partial Q_0(C)}{\partial c_{13}} \end{bmatrix} \quad (14.26)$$

式(14.26)の線形感度方程式は離散化方程式に変換され、その解も容易に求められる。

式(14.26)を解くことにより、流出モデル定数 (c_{11}, c_{12}, c_{13}) に関する変量 z_1 の感度係数が求められる。式(14.17)と式(14.19)の関係式を用いれば、実領域における河道末端での流出量 q_s の感度係数は次式で算定される。

$$\begin{cases} \frac{\partial q_s}{\partial c_{11}} = \bar{q}_0 \frac{\partial Q_s}{\partial c_{11}} = (\bar{q}_0) \left(\frac{1}{p_4} z_1^{1/p_4-1} \right) \frac{\partial z_1}{\partial c_{11}} \\ \frac{\partial q_s}{\partial c_{12}} = \bar{q}_0 \frac{\partial Q_s}{\partial c_{12}} = (\bar{q}_0) \left(\frac{1}{p_4} z_1^{1/p_4-1} \right) \frac{\partial z_1}{\partial c_{12}} \\ \frac{\partial q_s}{\partial c_{13}} = \bar{q}_0 \frac{\partial Q_s}{\partial c_{13}} = (\bar{q}_0) \left(\frac{1}{p_4} z_1^{1/p_4-1} \right) \frac{\partial z_1}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (14.27)$$

式(14.27)が一階ニュートン法による最適化に必要な一次微係数(感度係数)であり、流出モデル定数の最適化手法における計算手順は單一流域におけるそれと同一である。

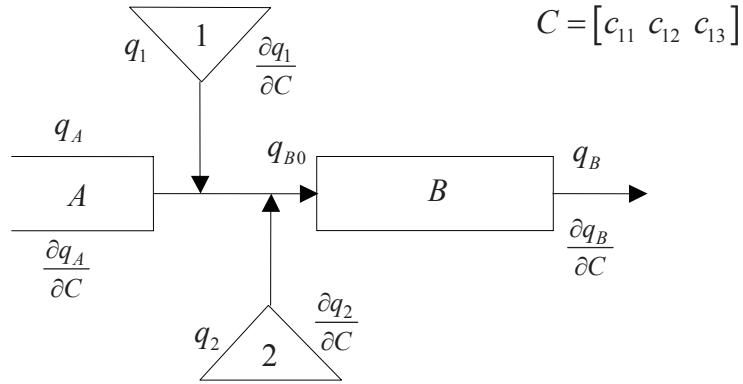


図-2 一般的な流域・河道モデル

図-2に典型的な流域モデルと河道モデルを組み合わせた例を示す。河道Bは上流河道A、流域①及び流域②からの流出量を入力とし、その河道からの出力 q_B を下流河道に伝達させる。 q_A は河道Aからの出力、 q_1 と q_2 はそれぞれ、流域①と②からの出力であるので、連続式(14.14)の河道Bへの入力 q_{B0} を次式で置き換えるとよい。

$$q_{B0} = q_A + q_1 + q_2 \quad (14.28)$$

一方、 $\partial q_A / \partial C$ は河道Aからの出力に関する感度係数ベクトルであり、 $\partial q_1 / \partial C$ と $\partial q_2 / \partial C$ はそれぞれ、流域①と②からの出力に関する感度係数ベクトルである。なお、Cは流出モデル定数(c_{11}, c_{12}, c_{13})を要素とするベクトルである。これらの感度係数ベクトルは前述した方法により計算可能であり、既知量となる。

式(14.26)の解法に必要な感度係数は、次式の無次元量で置き換えるとよい。

$$\begin{cases} \frac{\partial q_{B0}(C)}{\partial c_{11}} = \frac{\partial}{\partial c_{11}} \{ q_A(C) + q_1(C) + q_2(C) \} \\ \frac{\partial q_{B0}(C)}{\partial c_{12}} = \frac{\partial}{\partial c_{12}} \{ q_A(C) + q_1(C) + q_2(C) \} \\ \frac{\partial q_{B0}(C)}{\partial c_{13}} = \frac{\partial}{\partial c_{13}} \{ q_A(C) + q_1(C) + q_2(C) \} \end{cases} \quad (14.29)$$

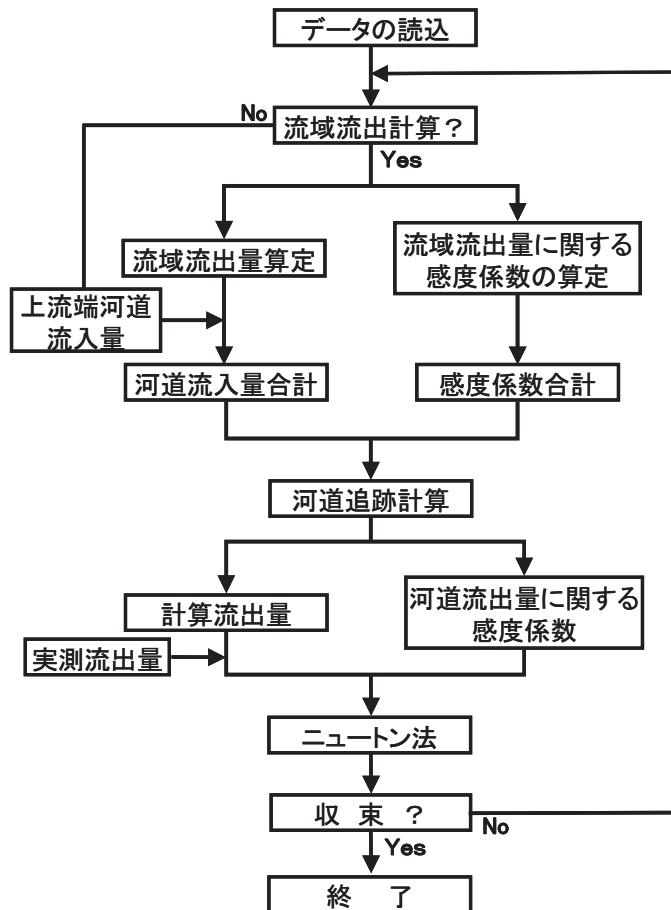


図-3 複合流域モデルにおける最適化計算フローチャート

以上、複合流域モデルにおける分割流域からの流出量及びその一次感度係数ベクトルを河道追跡して、逐次下流へ伝達させ、最下流端(流量観測基準点)における河道流出量及びその感度係数ベクトルを解析的に算出する方法について述べてきた。一階ニュートン法を用いたモデル定数同定過程を図-3にフローチャートで示す。また、複合流域モデルにおいて必要なデータや分割流域(単位流域)での流出計算に用いられる3種類の貯留関数法の関係を要約して、図-4に示す。

5. 実流域における流域・河道ネットワーク作成例

実流域における河道追跡の計算手順を示す例として、北海道東部のオホーツク海に注ぐ一級河川・湧別川の開盛地点(流域面積： $A = 1334.8 \text{ km}^2$)における平成10年9月12日洪水を選定する。

図-5には湧別川水系における流域・河道網が示されている。「2. 流域・河道網図の作成例」においてすでに述べたように、表-1には解析対象流域における流域・河道に計算順序を指定するための識別番号が設定されている。開盛地点を例にとると、本川での流域は0、河道は1とし、一次支川である武利川と生田原川では、それぞれ、流域は10、河道は11と識別番号が設定されている。

河道追跡計算手順は、本川に沿う流域と河道からの流出量及び2支川(武利川、生田原川)からの本川への流入量を考慮して、上流から下流へ流出量と感度係数ベクトルが順次伝達される。たとえば、湧別川・丸瀬布地点(流域面積： $A = 802.0 \text{ km}^2$)における複合流域モデルの計算順序が図-6に示され

ている。すなわち、流域1と2からの流出量及び感度係数を合算して、それを河道Aにインプットする。河道Aからの流出量に流域3および武利川からの流出量及び感度係数を加算する。最後に上流からの諸量に丸瀬布川からの流出量及び感度係数を合算すればよいことになる。

記述が複雑となるが、以上の計算を繰り返して行けば、開盛地点での計算流出量と最適化計算に必要なモデル定数に関する一次感度係数ベクトルが算出される。開盛地点までの流出量及び感度係数の伝達過程が表-3に示されている。

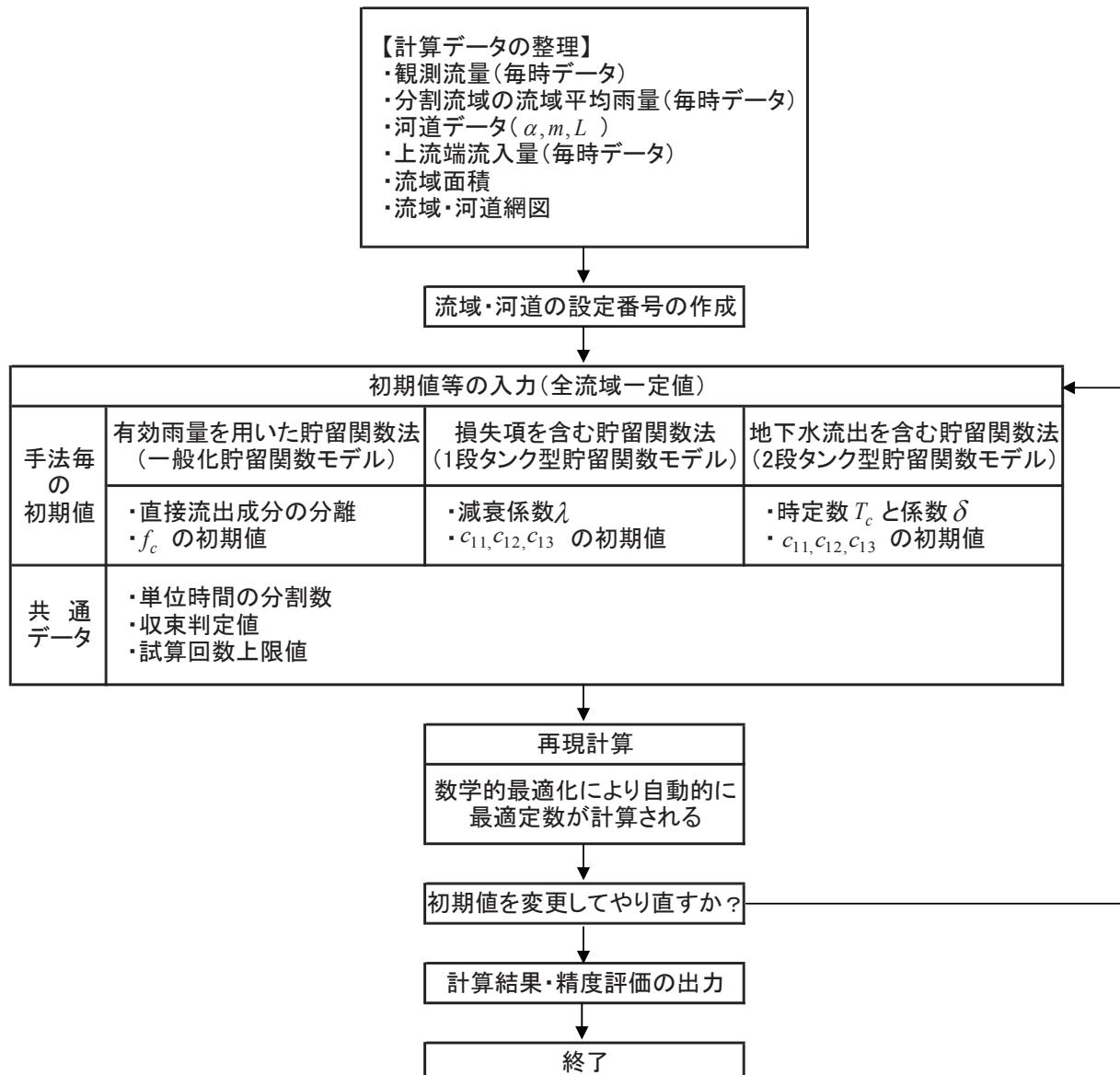


図-4 複合流域における単位流域・流出モデルの計算過程

表-1 湧別川における流域・河道ネットワーク識別番号

| | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|----|-------|----|------|----|-----|---|----|----|---|----|-----|
| 湧別川本川 | 1 | 2 | A | 3 | 支川 I | 6 | 丸瀬布 | C | 7 | 8 | D | 9 | 遠軽 |
| 設定番号 | 0 | 0 | 1 | 0 | 10 | 11 | 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| | | | 武利川 | | 4 | B | 5 | | | | | | |
| 湧別川本川 | E | 10 | 支川 II | G | 13 | 14 | 開盛 | H | 15 | 16 | I | 17 | 中湧別 |
| 設定番号 | 1 | 0 | 10 | 11 | 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 河口 |
| | | | 生田原川 | 11 | F | 12 | | | | | | | |

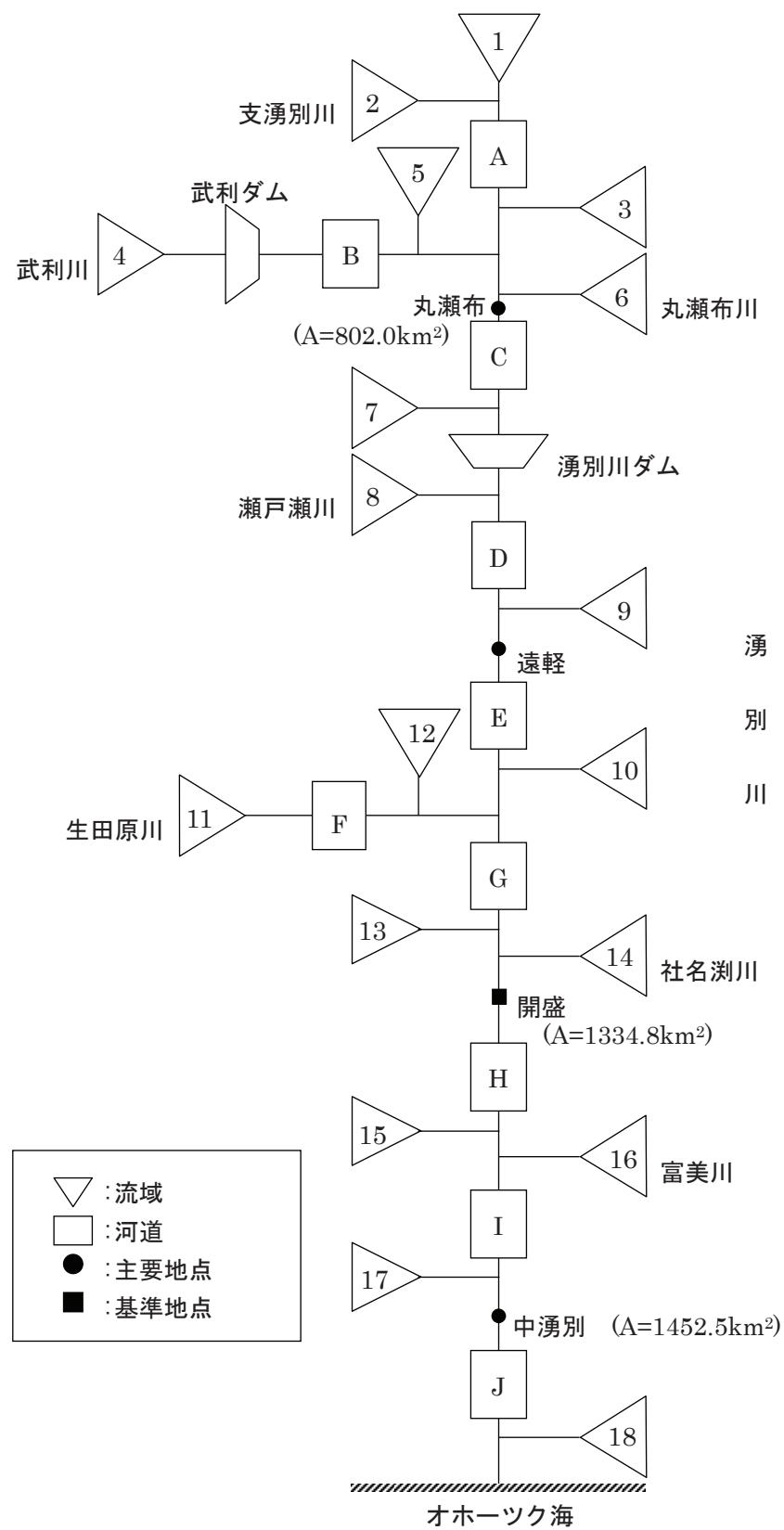


図-5 湧別川水系における流域・河道網

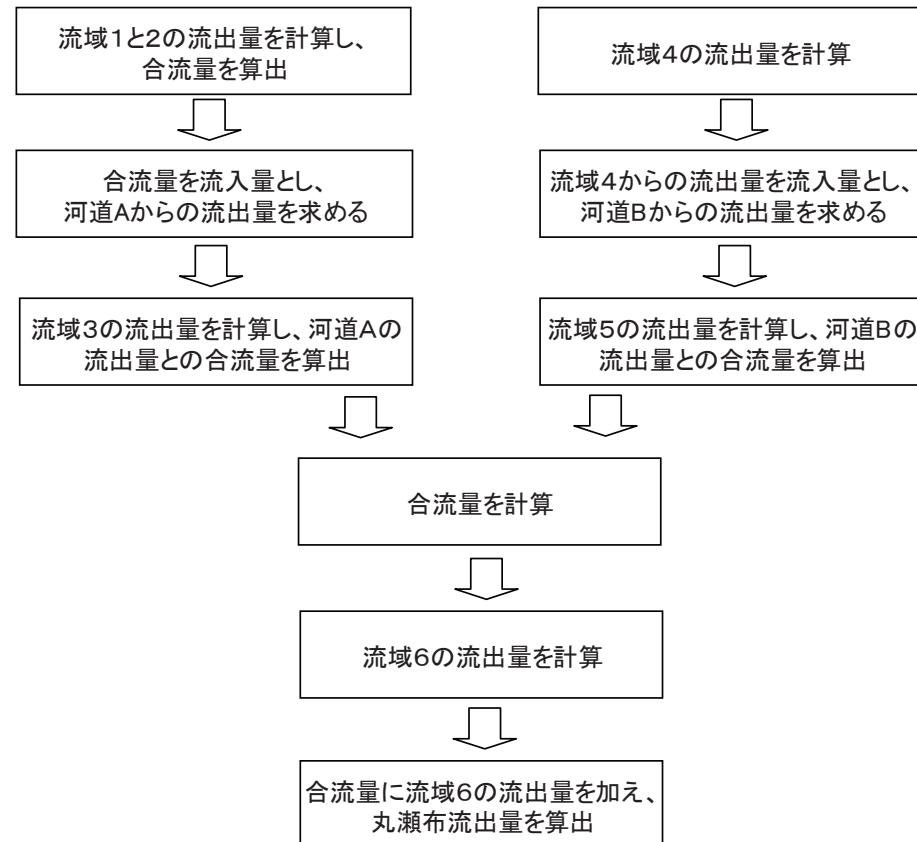


図-6 丸瀬布地点における流域・河道計算フローチャート

表-3 河道追跡における物理量の入力・出力関係（開盛地点）

| 河道流出量 | 河道流入量 | 感度係数ベクトル |
|-----------|---------|--|
| A | ① ② | $\frac{\partial q_A}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C}(q_1 + q_2)$ |
| C | ③ I ⑥ A | $\frac{\partial q_c}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C}(q_3 + q_I + q_6 + q_A)$ |
| D | ⑦ ⑧ C | $\frac{\partial q_D}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C}(q_7 + q_8 + q_C)$ |
| E | ⑨ D | $\frac{\partial q_E}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C}(q_9 + q_D)$ |
| G | ⑩ II E | $\frac{\partial q_G}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C}(q_{10} + q_{II} + q_E)$ |
| q_{kai} | ⑬ ⑭ G | $\frac{\partial q_{kai}}{\partial C} = \frac{\partial}{\partial C}(q_{13} + q_{14} + q_G)$ |

①：分割流域 1、A：分割河道 A、I：支川、 q_1 ：流域 1 からの流出量、 q_A ：河道 A からの流出量、 q_I ：支川 I からの流出量、 q_{kai} ：開盛地点の流出量、C：流出モデル定数ベクトル

表-4 解析対象区間の河道定数

| 河道 | 河道長(km) | $a_s = \alpha q_s^m$ | |
|----|---------|----------------------|--------|
| | | α | m |
| A | 20.5 | 1.3834 | 0.6765 |
| B | 7.3 | 1.5532 | 0.6642 |
| C | 10.4 | 1.6246 | 0.7030 |
| D | 10.0 | 1.7880 | 0.7457 |
| E | 2.7 | 2.5811 | 0.7057 |
| F | 18.2 | 0.6202 | 0.8894 |
| G | 3.8 | 1.5965 | 0.8486 |

表-5 河道追跡の貯留関数モデル定数

| 河道 | K_3 | K_4 | p_3 | p_4 |
|----|--------|--------|--------|--------|
| A | 0.9097 | 0.5953 | 0.8006 | 0.3003 |
| B | 0.9099 | 0.5926 | 0.7936 | 0.2864 |
| C | 0.9099 | 0.6001 | 0.8140 | 0.3313 |
| D | 0.9120 | 0.6053 | 0.8299 | 0.3839 |
| E | 0.9099 | 0.6005 | 0.8152 | 0.3345 |
| F | 0.9403 | 0.5981 | 0.8269 | 0.5854 |
| G | 0.9219 | 0.6063 | 0.8398 | 0.4814 |

図-5 の流域・河道網のうち、解析対象河道での河道区間長及び式(14.15)の河道定数が表-4 に示されている。河道モデルでは、式(14.16)に示される無次元領域での貯留関数法を用いる。このとき、モデル定数(K_3, K_4, p_3, p_4)の値を決定する必要がある。河道流入ハイドログラフを二等辺三角形と仮定して、モデル定数(K_3, K_4, p_3, p_4)を算定しても、河道末端での流出ハイドログラフは実用上十分な精度で再現されることを確認している(「第13回ゼミ」の「演習問題」を参照されたい)。河道洪水追跡に用いられる貯留関数法のモデル定数が表-5 に示されている。これらの値は、 $t_a/t_r = 0.5$ と表-4 中の河道定数 m の値を用いて計算されたものである(「第13回ゼミ」の表-3 に示されている近似式を参照されたい)。

文責 秋田 大輔
星 清

参考文献

- 石原藤次郎・高棹琢馬：単位図法とその適用に関する基礎的研究，土木学会論文集，第60号，別冊3-3，34p.，1959.
- Hoshi, K. (Ed.) : Pioneering Studies on Kinematic Wave Models, Translation from Transactions of JSCE. The paper entitled “Fundamental Researches on the Unit Hydrograph Method and Its Application” by T. Ishihara and T. Takasao, 68p., 1996.
- 藤田睦博：斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究，土木学会論文報告集，第314号，pp. 75-86, 1981.

- 4) 高棹琢馬・池淵周一・椎葉充晴：河道網構造を考慮した河川流域の出水解析法に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第20号, B-2, pp. 185-199, 1977.
- 5) 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 錠：複合流域における洪水流出の確率予測手法, 京都大学防災研究所年報, 第26号B-2, pp. 181-196, 1983.
- 6) 高棹琢馬・宝 錠・楠橋康弘：洪水流出モデルの確率過程的評価に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第28号B-2, pp. 221-235, 1985.
- 7) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行：一般化貯留関数法による流域流出解析・河道洪水追跡実用計算法, 152p., 2001.
- 8) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行：対話式洪水流出計算マニュアル(第1版), 89p., 2004.
- 9) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行：対話式洪水流出計算マニュアル(第2版), 119p., 2005.
- 10) 松木賢治・星 清・橋本識秀：2段タンク型貯留関数法を用いた流域流出・河道追跡計算の改良, 土木学会北海道支部論文報告集第60号, II-2, pp. 276-279, 2004.
- 11) Hoshi, K., Miyahara, M. and Hashimoto, N. : Parameter Optimization of Flood Routing Model in the Basin-Channel System, Proc. of International Workshop on River Environments Considering Hydraulic and Hydrologic Phenomena in Snowy and Cold Regions, pp.57-63, Quebec, Canada, 2000.
- 12) 星 清・馬場仁志・橋本識秀：流域・河道系洪水追跡のための貯留関数法の開発, 河川技術に関する論文集, 第6巻, 土木学会, pp. 297-302, 2000.
- 13) 中津川誠・星 清・橋本識秀：成分分離に基づく流域・河道追跡のための貯留関数モデルの同定, 水工学論文集, 第46巻, 土木学会, pp. 151-156, 2002.
- 14) 松木賢治・星 清・橋本識秀：2段タンク型貯留関数法を用いた流域・河道追跡計算の改良, 土木学会北海道支部論文報告集, 第60号, II-2, pp. 276-279, 2004.
- 15) 松木賢治・星 清・橋本識秀：2段タンク型貯留関数法による流出解析と河道追跡計算, 土木学会第59回年次学術講演会, CD-ROM 概要集, II-35, pp. 69-70, 2004.
- 16) 星 清・馬場仁志・橋本識秀：流域・河道系洪水追跡のための貯留関数法の開発, 河川技術に関する論文集, 第6巻, 土木学会, pp. 297-302, 2000.
- 17) 星 清：流域・河道系洪水追跡のための貯留関数法の開発, 研究所紀要(XII), (財)北海道河川防災研究センター研究所, pp. 181-190, 2001.
- 18) 星 清・中津川誠：地下水流出成分を含む流域・河道系における貯留関数法の同定, 研究所紀要(XIII), (財)北海道河川防災研究センター研究所, pp. 255-272, 2002.
- 19) 星 清・松木賢治・片山直樹：2003年台風10号による沙流川二風谷ダムにおける流出解析と実時間流入量予測, 研究所紀要(XV), (財)北海道河川防災研究センター研究所, pp. 369-404, 2004.
- 20) 星 清・松木賢治：2段タンク型貯留関数法を用いた流域流出・河道追跡モデルの計算手法, 研究所紀要(XV), (財)北海道河川防災研究センター研究所, pp. 407-459, 2004.

第 15 回 流出解析ゼミ

— 目的関数の差異による洪水流量推定精度に及ぼす影響 —

1. はじめに

前回までのゼミにおいては、流域・河道システムでの洪水流出過程に焦点を当て、物理的意味が明確な Kinematic wave 法を集中化した貯留関数型流出モデルを基礎式として、モデル定数の最適化問題をとりあげ、実用的洪水流出解析法の一層の精度向上を目指してきた。とくに、「第 14 回ゼミ」においては、その集大成として、単位流域と河道から成る複合流域に以下に示す 3 個の貯留関数法を適用する際の分割流域での流出モデル定数の最適化手法について詳述してきた。

- (1) 有効雨量を用いた貯留関数法(一般化貯留関数モデル)
- (2) 損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)
- (3) 地下水流出を含む貯留関数法(2段タンク型貯留関数モデル)

いずれの洪水流出モデルを採用するにしても、何らかの客観的評価基準(目的関数とも呼ばれる)を設定して、実測・計算ハイドログラフが最良に適合するように、モデルに含まれる数個の定数を同定する必要がある。当然のことながら、モデル定数の最適値は目的関数に依存して大きく変化することが知られている。

「第5回ゼミ」の「9. モデル定数最適化の目的関数と精度評価指標」で既述したように、もっとも理解しやすい目的関数は、観測流量と計算流量の誤差二乗和平均(MSE)を最小にする基準である。 MSE の評価基準以外の目的的関数として、以下に再記するカイ²乗基準($KAI2$)もしばしば用いられる。したがって、本ゼミの目的は、2つの目的関数の差異がハイドログラフの形状特性、すなわち、ピーク相対誤差とハイドログラフ相対誤差の評価指標に及ぼす影響を検討することにある。

本章で採用した数学的最適化手法は、一階ニュートン法である。このとき、一次導関数(感度係数)をいかに効率よく算定するかが数学的最適化手法の成否を左右する。前回までのゼミにおいて何度も述べてきたように、一次導関数(感度係数)は感度方程式から解析的に求められる。

2. 目的関数

種々の流出計算法によるモデル定数を同定するためには、評価基準としての目的関数を設定しなければならない。最も理解しやすい目的関数は、観測流量と計算流量の誤差二乗和平均を最小にする基準である。すなわち、次式で表される MSE (mean squares error)ができるだけ小さくなるように、ニュートン法を用いてモデル定数の最適値を探索している。

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (q_{oi} - q_{ci})^2 \quad (15.1)$$

ここに、 q_{oi} : 観測流出高[mm/h], q_{ci} : 計算流出高[mm/h], N : データ数

モデル定数の最適化にあたっては、式(15.1)以外にもカイ²乗基準として知られている次式の目的関数がしばしば用いられる。

$$KAI2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ (q_{oi} - q_{ci}) / \sqrt{q_{oi}} \right\}^2 \quad (15.2)$$

式(15.2)は統計学における適合度検定でよく用いられているカイ²乗基準に相当している。式(15.1)

と式(15.2)のどちらがよいかは一概に言えないが、式(15.1)は高水部(ピーク近傍)の適合度を重視した指標であり、式(15.2)はハイドログラフ全体の適合度に重きを置いた基準である。

3. ハイドログラフ形状特性の精度評価指標

「第5回ゼミ」の「9. モデル定数最適化の目的関数と精度評価指標」で既述したように、目的関数の差異によるハイドログラフの形状特性値に及ぼす影響を比較するために用いる指標は、ピーク流量を評価する式(15.3)の J_{pe} とハイドログラフ全体を評価する式(15.4)の J_{re} である。 J_{pe} 及び J_{re} は小さくなれば、洪水ハイドログラフの再現精度が高くなるという単純な指標である。

J_{pe} と J_{re} の精度評価指標は、それぞれ次式で定義される。

$$J_{pe} = (q_{op} - q_{cp}) / q_{op} \quad (15.3)$$

$$J_{re} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |q_{oi} - q_{ci}| / q_{oi} \quad (15.4)$$

ここに、 q_{op} : 観測ピーク流出高[mm/h], q_{cp} : 計算ピーク流出高[mm/h]

4. 単一流域と複合流域

流域面積が小さい時は斜面系流出が卓越して、河道系での遅れ時間を無視できると考えられるため、流域全体を**单一流域モデル**として洪水流出解析を行う場合が多い。しかも、比較的小さいダム流域などの山地河川流域の流出解析に貯留関数法が広範に用いられてきた。しかしながら、流域面積が大きくなると、河道における降雨の遅れなどの河道効果が無視できなくなる。そのため、流出モデルに河道モデルを組込む必要がある。「第14回ゼミ」においては、流域における流出解析と河道における洪水追跡を同時に行うことができるいわゆる**複合流域モデル**を提案した。新しく開発された貯留関数法は Kinematic wave 解を集中化したものであり、両モデルの定数間の関係が定量化されている。その結果、流域・河道系における流出計算を迅速に行うことができるようになった。図-1に複合流域モデルの概念を示す。

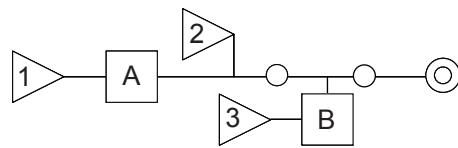


図-1 複合流域モデルの概念図（流域・河道ネットワーク例）

図-1の△は分割流域を表し、分割流域では降雨量を入力値として流域流出計算を行い、流域流出量が出力される。□は河道を表し、流域からの出力や河道の出力等の合計した値が入力値となり、河道での洪水追跡計算を行えば、河道流出量が算出される。○は合流点を表し、流域および河道からの流出量の合計値が入力値となると同時に出力値ともなる。概念的には、入力地点と出力地点は同じ地点とする。◎は観測基準点を表している。

3種類の貯留関数法を用いて、複合流域における洪水流出計算を行う場合、次の方法に準拠した。

- ① モデル定数、流出率、減衰係数及び分離時定数等は、全分割流域において同一の値をとるものとする。
- ② 分割流域の基底流量は、検証地点での面積比率を乗じて設定する。すなわち、検証地点まで表面流出だけを計算・追跡して最後に基底流量を加算して全流量とするのではなく、最初に各流域に基底流量を面積比で配分しておき、各分割流域の流量を全流量で計算して河道追跡を行う方法を採用している。
- ③ モデル定数最適化の評価関数として、誤差二乗和平均(*MSE*)とカイ2乗基準(*KAI2*)の2種類の目的関数を採用して、再現ハイドログラフの精度比較を行う。

5. 解析対象流域

ここでは、流出特性が異なると考えられる4河川を解析例として取り上げることにする。すなわち、留萌川・幌糠地点での昭和63年8月26日洪水、雨竜川・多度志地点の昭和63年8月25日洪水、渚滑川・上渚滑地点の平成10年9月16日洪水、湧別川・開盛地点での平成10年9月16日洪水例を解析対象に洪水再現計算を行う。各河川の観測地点における洪水特性及び複合流域モデルの計算に必要となる分割流域数と河道数等を表-1に要約して示す。また、解析対象河川流域の流域・河道ネットワーク図を図-2～図-5に示す。

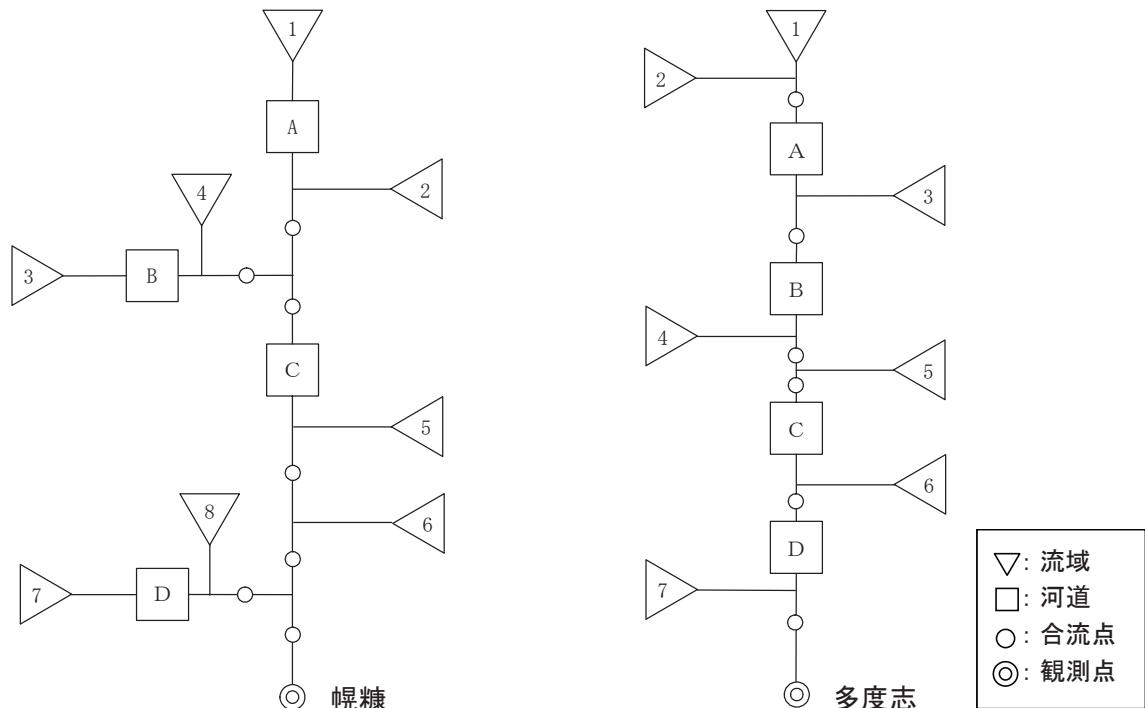


図-2 留萌川ネットワーク図（幌糠）

図-3 雨竜川ネットワーク図（多度志）

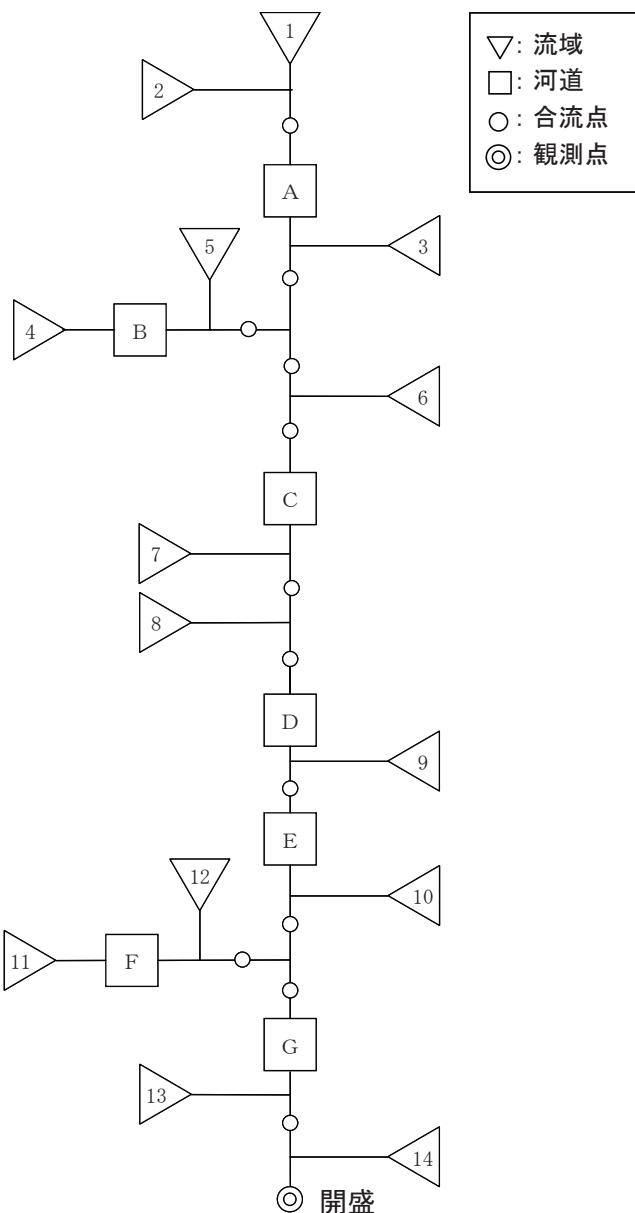
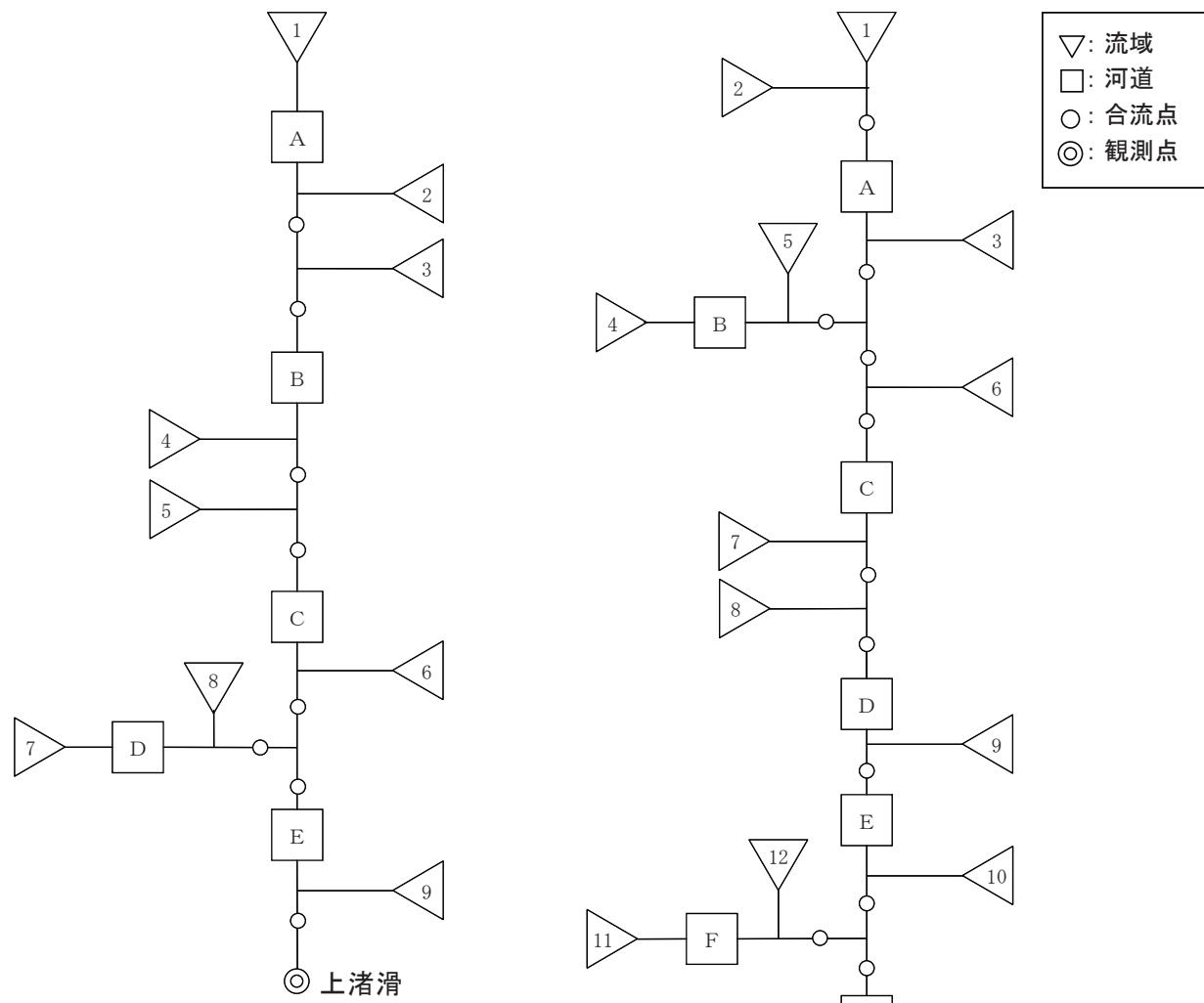


表-1 解析例における流域特性及び洪水特性

| | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 |
|--------------------------|----------|----------|----------|----------|
| 観測所名 | 幌糠 | 多度志 | 上渚滑 | 開盛 |
| 対象洪水 | S63.8.26 | S63.8.25 | H10.9.16 | H10.9.16 |
| 流域数 | 8 | 7 | 9 | 14 |
| 河道数 | 4 | 4 | 5 | 7 |
| 合流点数 | 7 | 6 | 8 | 12 |
| 全地点数 | 27 | 24 | 31 | 48 |
| 流域面積(km ²) | 168.5 | 998.8 | 1050.6 | 1334.8 |
| ピーク流量(m ³ /s) | 613.78 | 1432.75 | 1501.01 | 1291.38 |
| 比流量 | 3.64 | 1.43 | 1.43 | 0.97 |
| 平均雨量強度(mm/h) | 6.26 | 3.69 | 2.79 | 2.55 |
| 流出率 | 0.733 | 0.574 | 0.834 | 0.752 |
| 分離時定数 T _c | 76.4 | 130.8 | 67.5 | 68.0 |

表-1に記述した解析対象流域の特性を以下に要約して示す。

- (a) 留萌川・幌糠地点は流域数8、河道数4、合流点数7から成り、流域面積は168.5km²である。比較的標高の低い山地が連なり、留萌川はその山地の間を縫うように蛇行しながら流れしており、平地面積が少ないのが特徴である。幌糠地点は河口より18.6km地点に位置する。
- (b) 雨竜川・多度志地点は、石狩川合流点より上流32.5kmの地点に位置する。流域面積は998.8km²であり、流域面積が大きく河道の遅れ効果が期待できる。また、河床勾配が1/600と比較的急流な河川である。流域ネットワークは流域数7、河道数4、合流点数6から成る。
- (c) 渚滑川・上渚滑地点は流域数9、河道数5、合流点数8から成り、流域面積1050.01km²と流域面積が比較的大きい。上渚滑地点は河口より上流19.4kmに位置する。
- (d) 湧別川・開盛地点は流域面積が1334.8km²と、今回の解析対象河川流域のなかで流域面積が最も大きい。開盛地点は河口より18.8kmに位置する。流域ネットワークは流域数14、河道数7及び合流点数12から成る。

6. 河道追跡モデルの概要

「第13回ゼミ」において既述した河道追跡モデルとして、横流入量がない場合のKinematic wave解を貯留関数解に集中化した基礎式を再記すれば、

以下に示されるシステム方程式で表される(図-6を参照)。

$$\begin{cases} \frac{ds_s}{dt} = q_0 - q_s \\ s_s = k_3 q_s^{p_3} + k_4 \frac{d}{dt}(q_s^{p_4}) \end{cases} \quad (15.5)$$

$$a_s = \alpha q_s^m \quad (15.6)$$

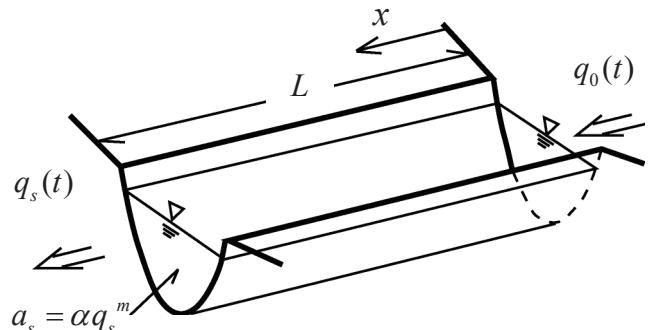


図-6 河道流モデル

ここに、 t : 時間(s), s_s : 河道貯留量(m³), q_0 : 河道流入量(m³/s), q_s : 河道流出量(m³/s), a_s : 河道断面積(m²), k_3, k_4, p_3, p_4 : モデル定数, α, m : 河道定数

式(15.5)の貯留関数モデルは分割流域での流出解析で用いられた基本式と同一形式である。したがって、河道モデルの解法は流出モデルのそれに準拠すればよい。しかしながら、河道モデルでのシステム方程式に含まれる時間は秒であり、安定した数値解を得るためにには、計算時間間隔を小さく設定する必要がある。このときの難点として、洪水追跡計算時間と最適化過程での繰り返し計算時間が飛躍的に増加することがあげられる。そこで、「第13回ゼミ」において既述したように、計算時間の短縮化と数値計算の精度向上を図る目的で、河道モデルでの流出量算出と感度係数算出を無次元領域で行うことが得策と考える。

式(15.5)と式(15.6)の無次元領域での貯留関数法は、次式に変換される。

$$\begin{aligned} \frac{dS_s}{dT} &= Q_0 - Q_s \\ S_s &= K_3 Q_s^{p_3} + K_4 \frac{d}{dT}(Q_s^{p_4}) \end{aligned} \quad (15.7)$$

ここに、 K_3, K_4 ：無次元貯留係数、 Q_0 ：無次元領域での上流端流入量ハイドログラフ
実領域における河道末端流出量 q_s は、次式で計算される。

$$q_s = (\bar{q}_0) Q_s \quad (15.8)$$

ここに、 \bar{q}_0 ：上流端流入量ハイドログラフの平均値

「第13回ゼミ」においてすでに述べたように、式(15.7)に示される貯留関数法を用いて、洪水河道追跡計算を行う場合、6個のモデル定数($K_3, K_4, p_3, p_4, \alpha, m$)は既知である。以下に式(15.7)に含まれるモデル定数の設定方法を簡単に述べる。

- (a) 対象河道区間(L)で河道断面積(a_s)と流量(q_s)の関係式を、あらかじめ不等流計算等により、式(15.6)で近似しておくことが可能である。したがって、河道定数(α, m)は既知となる。
- (b) 無次元領域での貯留関数モデル定数(K_3, K_4, p_3, p_4)は、河道定数(m)及び(t_a/t_r)の関数として、近似式を用いて算定される。ここで、 t_r と t_a はそれぞれ、河道上流端ハイドログラフの洪水継続時間とピーク流量生起時刻である。「第13回ゼミ」の[問題]において検討してきたように、 $t_a/t_r = 0.5$ (二等辺三角形の流入量ハイドログラフを仮定)と河道定数(m)を用いて、貯留関数モデル定数を算定しても、実用上十分な精度で河道流出ハイドログラフが再現されることを確認している。なお、貯留関数モデル定数(K_3, K_4, p_3, p_4)を求める近似式は「第13回ゼミ」の表-3に示されている。

7. 洪水流出モデルの概要

7.1 有効雨量を用いた貯留関数法(一般化貯留関数モデル)

本手法は、Kinematic wave法を集中化した貯留関数法であり、式(15.9)で表される。この流出モデルの特徴を以下に示す。

- ①全流出を直接流出成分と基底流出成分に分離し、直接流出成分についてのみ解析する。
- ②解析期間において、直接流出成分の総量と雨量の総量が等しくなるように流出率を求め、観測降雨水量に流出率を乗じて有効雨量とする。4解析洪水の流出率は表-1に示されている。

$$s = k_{11} q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}), \quad \frac{ds}{dt} = r_e - q \quad (15.9)$$

ここに、 s ：貯留高[mm]、 r_e ：有効雨量[mm/h]、 q ：直接流出高[mm/h]、 k_{11}, k_{12} ：貯留係数、

p_1, p_2 ：貯留指數

モデル定数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} k_{11} &= \alpha f_c, \quad k_{12} = \beta k_{11}^2 \\ p_1 &= 0.6, \quad p_2 = 0.4648 \\ f_c &= (n/\sqrt{i})^{0.6} \\ \alpha &= 2.8235A^{0.24}, \quad \beta = 0.2835(\bar{r}_e)^{-0.2648} \end{aligned} \quad (15.10)$$

ここに、 A ：流域面積[km^2]、 n ：等価粗度、 i ：斜面勾配、 f_c ：流域平均粗度、 \bar{r}_e ：平均有効雨量強

度[mm/h]

上式は複雑に見えるが、ファクター f_c の値が決まれば、すべての定数が一義的に求まり、流出計算が可能となる。ファクター f_c の一次元探索法に関しては、「第7回ゼミ」の「5.3 二価の非線形貯留関数法におけるモデル定数 f_c の最適化計算」に既述してある。式(15.9)及び式(15.10)を用いた流量の再現計算方法についての詳細は参考文献4)と5)を参照されたい。なお、本手法を複合流域系の流出計算に適用する場合、ファクター f_c は全分割流域で同一値をとるものとする。

以下に、「有効雨量を用いた貯留関数法」による解析結果を示す。表-2には目的関数の違いによる最適流域平均粗度(ファクター f_c)の値と計算ピーク流量が示されている。なお、4解析洪水例の実測ピーク流量は表-1中に示されている。單一流域・複合流域においても、目的関数の違いによる最適流域平均粗度(ファクター f_c)の値に大差は見られない。しかしながら、モデル複合流域モデルにおいては、河道での遅れ効果の影響を受けるために、流域平均粗度 f_c は、單一流域のそれに比べて大きくなる。例外的に、雨竜川では、顕著な差異は見られない。

表-2 一般化貯留関数モデルによる定数最適値と計算ピーク流量の比較

| | 目的関数 | 最適化結果 | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 |
|------|------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | | S.63.8.26 | S.63.8.25 | H.10.9.16 | H.10.9.16 |
| | | | 幌 糸 | 多度志 | 上渚滑 | 開 盛 |
| 單一流域 | KAI2 | f_c | 2.74 | 0.99 | 1.49 | 1.48 |
| | | ピーク流量 | 699.90 | 1482.56 | 1451.91 | 1220.21 |
| | MSE | f_c | 2.76 | 1.10 | 1.55 | 1.47 |
| | | ピーク流量 | 695.58 | 1357.36 | 1388.59 | 1228.22 |
| 複合流域 | KAI2 | f_c | 4.10 | 1.09 | 2.39 | 2.47 |
| | | ピーク流量 | 678.10 | 1349.82 | 1391.69 | 1315.53 |
| | MSE | f_c | 4.07 | 1.17 | 2.36 | 2.45 |
| | | ピーク流量 | 680.50 | 1302.10 | 1408.71 | 1315.82 |

表-3 一般化貯留関数モデルにおける目的関数の差異による精度評価指標比較

| | 目的関数 | Jre | | | | Jpe | | | |
|------|------|-------|-------|-------|-------|--------|--------------|-------|--------|
| | | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 |
| 單一流域 | KAI2 | 0.304 | 0.135 | 0.136 | 0.099 | -0.141 | 0.015 | 0.050 | 0.068 |
| | MSE | 0.305 | 0.128 | 0.124 | 0.099 | -0.135 | 0.118 | 0.081 | 0.064 |
| 複合流域 | KAI2 | 0.268 | 0.231 | 0.130 | 0.152 | -0.101 | 0.076 | 0.092 | 0.007 |
| | MSE | 0.270 | 0.262 | 0.128 | 0.153 | -0.109 | 0.105 | 0.071 | -0.003 |

第15回 目的関数の差異による洪水流量推定精度に及ぼす影響

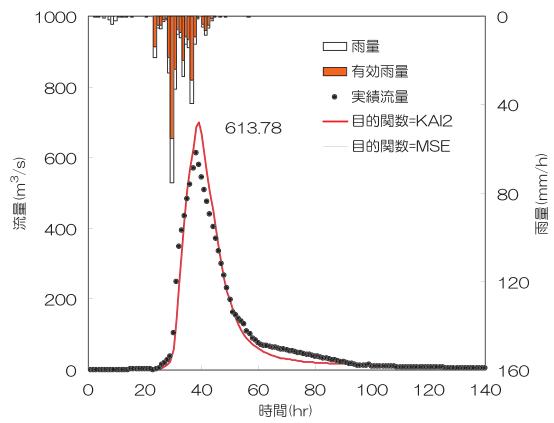


図-7-1 留萌川・幌糠(单一流域)

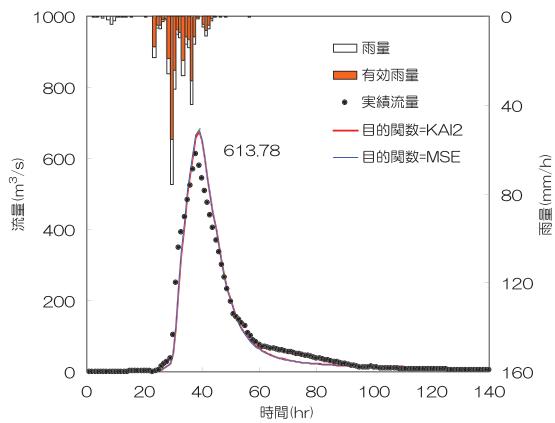


図-7-2 留萌川・幌糠(複合流域)

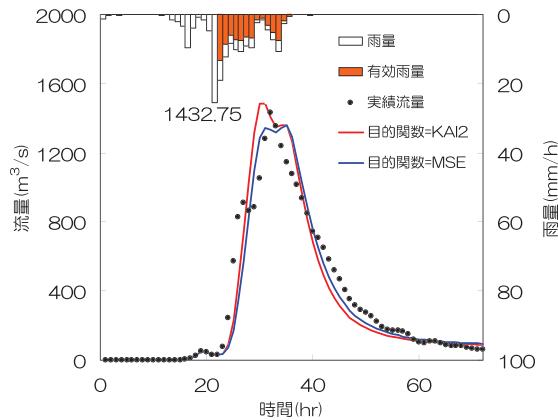


図-7-3 雨竜川・多度志(单一流域)

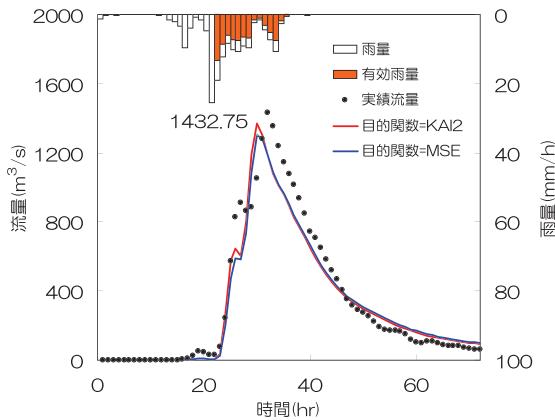


図-7-4 雨竜川・多度志(複合流域)

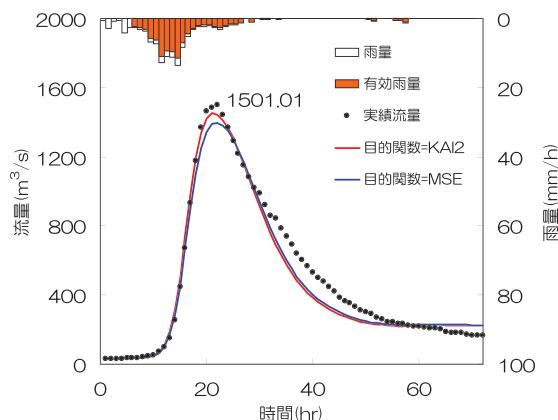


図-7-5 濁滑川・上渚滑(单一流域)

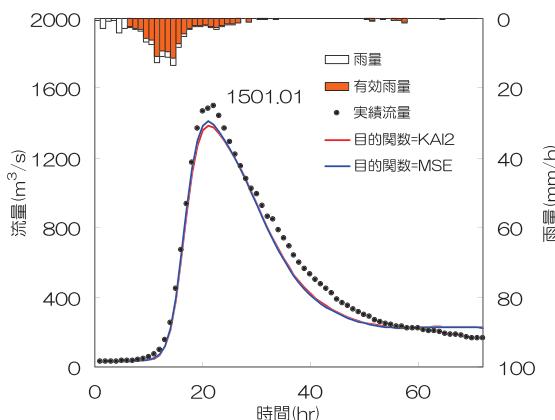


図-7-6 濁滑川・上渚滑(複合流域)

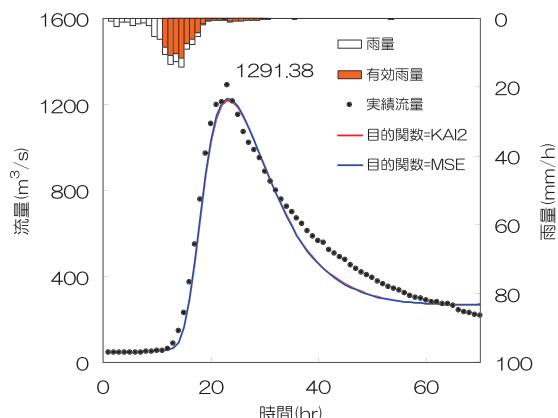


図-7-7 湧別川・開盛(单一流域)

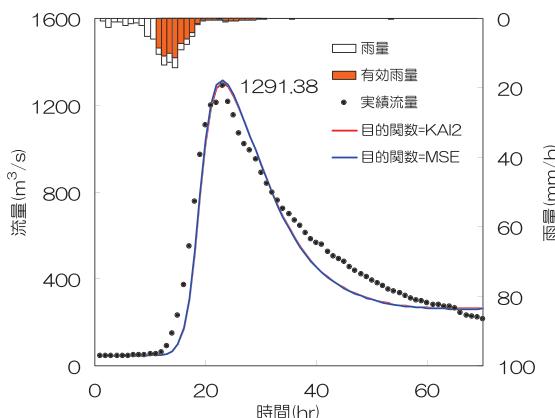


図-7-8 湧別川・開盛(複合流域)

目的関数の違いによるハイドログラフの相対誤差(J_{re})とピーク相対誤差(J_{pe})を单一・複合流域系で比較して、表-3に示す。単一流域・複合流域モデルにおいては、目的関数の差異によるハイドログラフの相対誤差(J_{re})に顕著な差は見られない。再現計算結果に幾分差が見られる雨竜川・多度志地点でのピーク相対誤差(J_{pe})に関して考察を加える。単一流域系のKAI2では J_{pe} が0.015、MSEでは J_{pe} が0.118となり、複合流域系のKAI2では J_{pe} が0.076、MSEでは0.105となった。両流域系ともにKAI2を用いた方がピーク値の精度が高い結果となっている。目的関数の違いによる精度評価指標に大きな差異が現れた箇所を太文字で示す。

「有効雨量を用いた貯留関数法」を4洪水例に適用した際の実測・計算ハイドログラフを比較して、以下に示す。まず、留萌川・幌糠地点での再現結果をそれぞれ、図-7-1と図-7-2に示す。単一流域モデルと複合流域モデルを比較すると、目的関数KAI2及びMSEのどちらを用いても結果には大きな差異がみられない。雨竜川・多度志地点での結果を図-7-3と図-7-4に示す。本解析地点での単一流域モデルにおいて、目的関数の違いによるピーク流量近傍での再現結果に差異が見られる。複合流域モデルについては、計算ハイドログラフの形状に大きな差異は見られない。

渚滑川・上渚滑の結果を比較して、図-7-5と図-7-6に示す。図-7-6に示されるように、単一流域モデルにおいては目的関数による差異が見られるが、複合流域モデルでは差異が見られない。最後に、湧別川・開盛地点での結果を図-7-7と図-7-8に示す。単一流域モデルと複合流域モデルにおいて、目的関数の違いによる差異は見られない。しかしながら、本解析地点に関しては、単一流域モデルに比べて、複合流域モデルによる計算ピーク流量が実測値を良好に再現していると考えられる。

7.2 損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)

本手法に関しては、「第9回ゼミ」の「損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)」において詳述してきた。直接流出・基底流出成分の分離や有効雨量の算定といった主観に左右される要素を極力排除するために、貯留関数法に損失機構を取り入れ、観測雨量と観測流量を直接流出計算に用いるのがこのモデルの特徴である。また、洪水前の流域湿潤状態を考慮するために、地下水流出成分を導入して、初期流出高と減衰係数を用いてあらかじめ設定する。

以下に、この貯留関数法の基本式を示す(図-8を参照)。

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= r - q - b + q_0 \\ s &= k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ b &= (c_{13} - 1)q \\ q_0 &= q_B \exp(-\lambda t) \end{aligned} \quad (15.11)$$

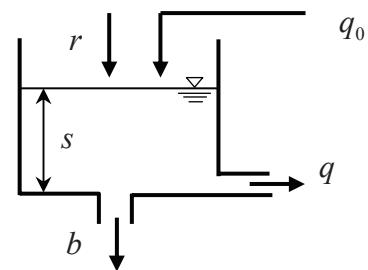


図-8 損失項を含む貯留関数法

ここに、 s : 貯留高[mm], r : 観測雨量[mm/h], q : 観測流出高[mm/h], b : 損失高[mm/h], q_B : 地下水流出高[mm/h], q_0 : 初期流出高[mm/h], k_{11}, k_{12} : 貯留係数, p_1, p_2 : 貯留指数, λ : 減衰係数

モデル定数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} k_{11} &= c_{11} A^{0.24}, \quad k_{12} = c_{12} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648}, \quad \lambda = 0.019 \\ p_1 &= 0.6, \quad p_2 = 0.4648 \end{aligned} \quad (15.12)$$

ここに、 A ：流域面積[km²]、 \bar{r} ：平均雨量強度[mm/h]、 c_{11}, c_{12}, c_{13} ：未知定数

減衰係数 λ はハイドログラフ低減部の標準減衰曲線から得られる流域固有の値である。北海道における多数の洪水解析結果、平均値として、 $\lambda = 0.019$ の値が得られている。したがって、本ゼミでの4洪水解析例においても、 $\lambda = 0.019$ の固定値を用いる。

式(15.11)及び式(15.12)を用いた流出量の計算手法に関しては、参考文献1)と4)を参照されたい。なお、本手法を複合流域系の洪水追跡に適用する場合、未知定数 c_{11}, c_{12}, c_{13} は全分割流域で同一値をとるものとする。

以下に、「損失項を含む貯留関数法」による解析結果を示す。表-4には目的関数の違いによる3個のモデル定数 c_{11}, c_{12}, c_{13} の最適値と計算ピーク流量が示されている。なお、4解析洪水例の実測ピーク流量は表-1中に示されている。單一流域・複合流域においても、目的関数の違いによるモデル定数の最適値に大差はない。しかしながら、複合流域モデルにおいては、河道での遅れ効果の影響で、 c_{11} の値は單一流域のそれに比べて幾分大きい。 c_{12} の値は複合流域モデルにおいて幾分小さくなる。 c_{13} の定数は單一流域・複合流域モデルで同程度である。なお、 c_{13} の値は物理的にも最小値が1となることに注意する必要がある(渚滑川・上渚滑の例)。目的関数にMSEを用いた方がKAI2に比べて、計算ピークが大きくなっている。この傾向は單一流域・複合流域モデルに関しても言える。

表-4 1段タンク型貯留関数モデルにおける定数最適値と計算ピーク流量の比較

| 目的関数 | 最適化結果 | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 |
|------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | S.63.8.26 | S.63.8.25 | H.10.9.16 | H.10.9.16 |
| | | 幌糠 | 多度志 | 上渚滑 | 開盛 |
| 單一流域 | KAI2 | c_{11} | 12.942 | 7.964 | 6.956 |
| | | c_{12} | 0.097 | 0.177 | 0.210 |
| | | c_{13} | 1.318 | 1.822 | 1.000 |
| | | ピーク流量 | 584.85 | 1166.12 | 1263.16 |
| | MSE | c_{11} | 12.498 | 7.601 | 6.482 |
| | | c_{12} | 0.090 | 0.166 | 0.196 |
| | | c_{13} | 1.291 | 1.771 | 1.000 |
| | | ピーク流量 | 606.07 | 1220.51 | 1348.87 |
| 複合流域 | KAI2 | c_{11} | 18.955 | 6.867 | 10.615 |
| | | c_{12} | 0.083 | 0.536 | 0.196 |
| | | c_{13} | 1.320 | 2.014 | 1.000 |
| | | ピーク流量 | 578.10 | 1343.96 | 1311.08 |
| | MSE | c_{11} | 18.241 | 7.334 | 10.117 |
| | | c_{12} | 0.075 | 0.376 | 0.187 |
| | | c_{13} | 1.289 | 1.851 | 1.000 |
| | | ピーク流量 | 597.35 | 1364.62 | 1381.10 |

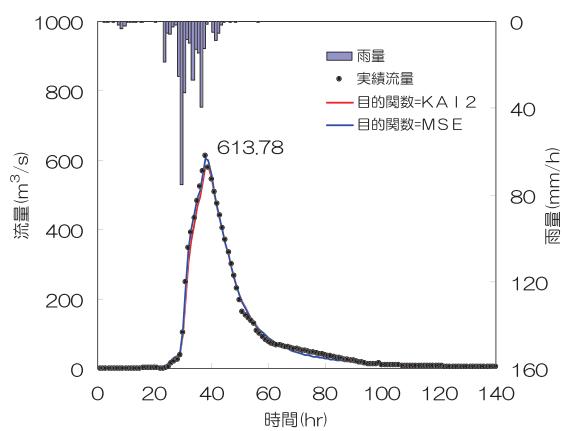


図-9-1 留萌川・幌糠(单一流域)

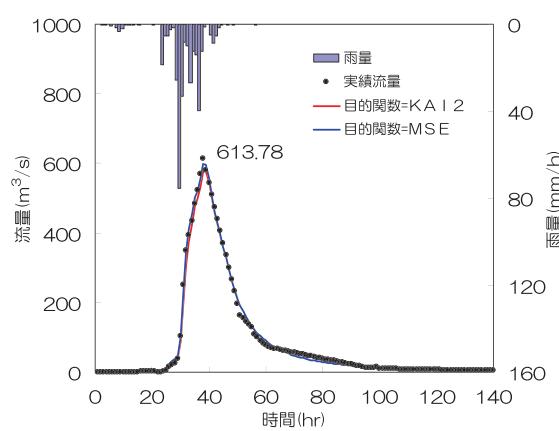


図-9-2 留萌川・幌糠(複合流域)

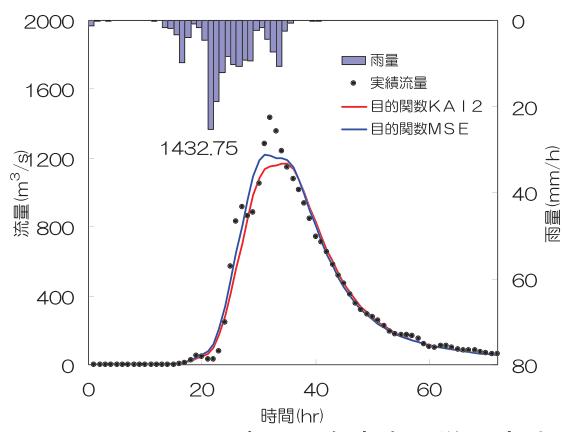


図-9-3 雨竜川・多度志(单一流域)

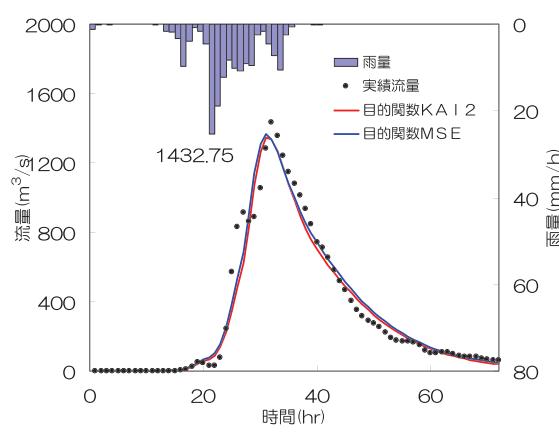


図-9-4 雨竜川・多度志(複合流域)

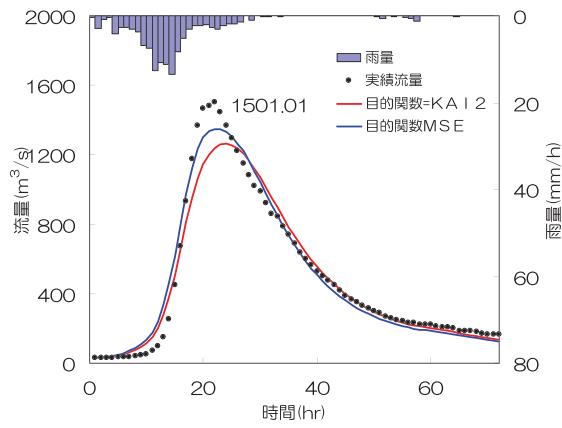


図-9-5 濁滑川・上渚滑(单一流域)

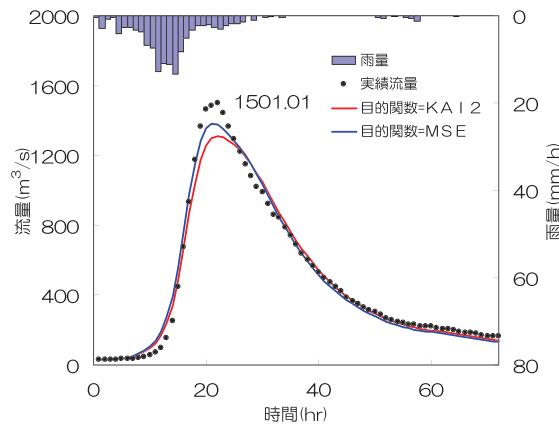


図-9-6 濁滑川・上渚滑(複合流域)

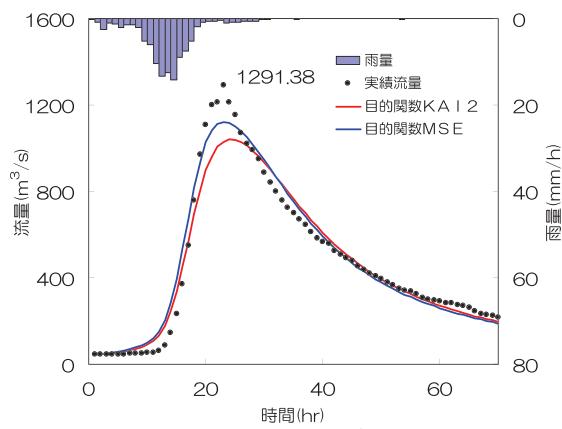


図-9-7 湧別川・開盛(单一流域)

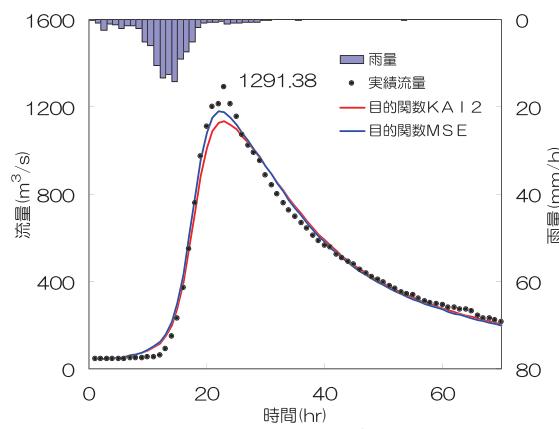


図-9-8 湧別川・開盛(複合流域)

表-5 1段タンク型貯留関数モデルにおける目的関数の差異による精度評価指標比較

| 目的関数 | | <i>Jre</i> | | | | <i>Jpe</i> | | | |
|------|-------------|--------------|-------|--------------|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 |
| 単一流域 | <i>KAI2</i> | 0.427 | 0.432 | 0.179 | 0.160 | 0.047 | 0.186 | 0.158 | 0.195 |
| | <i>MSE</i> | 0.464 | 0.484 | 0.240 | 0.191 | 0.013 | 0.148 | 0.101 | 0.131 |
| 複合流域 | <i>KAI2</i> | 0.417 | 0.244 | 0.121 | 0.102 | 0.058 | 0.062 | 0.127 | 0.123 |
| | <i>MSE</i> | 0.456 | 0.266 | 0.156 | 0.118 | 0.027 | 0.048 | 0.080 | 0.087 |

目的関数の違いによるハイドログラフの相対誤差(J_{re})とピーク相対誤差(J_{pe})を単一・複合流域モデルで比較して、表-5に示す。単一流域・複合流域モデル双方で、目的関数の差異によるハイドログラフの相対誤差(J_{re})に顕著な差は見られないが、*KAI2*の方が小さい値をとる傾向にある。

ピーク相対誤差(J_{pe})は、単一流域・複合流域共に目的関数に*MSE*を用いた方が*KAI2*に比べて、小さい値を取っている。顕著な差異が観測された渚滑川・上渚滑での解析結果によれば、単一流域モデルでは*KAI2*の J_{pe} が0.158、*MSE*の J_{pe} が0.101となり、複合流域モデルでは*KAI2*の J_{pe} が0.127、*MSE*の J_{pe} が0.080となった。単一流域・複合流域モデルとも目的関数に*MSE*を用いた方がピーク流出高の精度が高い結果を得ている。目的関数の違いによる精度評価指標に大きな差異が現れた箇所を太文字で示す。

「損失項を含む貯留関数法」を4洪水例に適用した際の実測・計算ハイドログラフを比較して、以下に示す。まず、留萌川・幌糠での再現結果は図-9-1と図-9-2に示される。単一流域モデル、複合流域モデルともに目的関数の違いによる差異は見られない。雨竜川・多度志の結果を図-9-3と図-9-4に示す。単一流域モデルで目的関数の違いによる差異が見られるが、複合流域モデルでは見られない。渚滑川・上渚滑での結果を図-9-5と図-9-6に示す。単一流域モデルと複合流域モデルの両方で、目的関数の違いによってハイドログラフの形状に大きな変化が見られる。とくに、単一流域モデルで、目的関数の違いによる差異が大きくなっている。最後に、湧別川・開盛での結果を図-9-7と図-9-8に示す。本解析地点に関しても、渚滑川・上渚滑での結果に類似して、単一流域・複合流域モデルの双方で目的関数の違いによるピーク流量近傍での差異が大きい。

7.3 地下水流出を含む貯留関数法(2段タンク型貯留関数モデル)

降雨流出過程における降雨遮断・凹地貯留・土壤水分浸透・蒸発散などの短期流出に含まれない降雨成分を「損失項」として扱い、主観的な事前作業である有効雨量の算出を必要としないモデルとして「損失項を含む貯留関数法」が考案された。しかしながら、この流出モデルを多数の洪水解析を行った結果、洪水ハイドログラフの再現性が不十分である事例がいくつか見られた。その特徴としては、①ピーク流量が低く再現される。②減水部の再現形状が観測値と合わないなどが挙げられる。再現性が不十分(観測値との適合度が低い)となる条件を精査すると、①火山灰土壤が広範に分布して地下浸透性が高い流域。②長期にわたって断続的な降雨が続き、流域の保水能力が小さくなっているなどの理由が判明した。

上記の問題点を解決するためには、損失項及び遅延流出成分を的確に表現できるモデルが必要となってくる。そこで、星・園山は、日野・長谷部によって提案された「フィルター成分分離法」を用い、流出成分を客観的に「表面・中間流出成分」と「地下水流出成分」に分離する「地下水流出を含む貯留関数

法」を提案した。その後、秋田・星は、モデル定数の最適化手法に改良を加えて、ハイドログラフ低減部での再現性を向上させた。星・松木は、「地下水流出を含む貯留関数法」を拡張して、複合流域にも適用可能なモデル構築を行っている。本手法は「第11回ゼミ」で述べた「全流出量の感度係数を用いた2段タンク型貯留関数モデルの最適化」を基礎理論としている。以下にこの流出モデルの概要を述べる(図-10を参照)。

1段目タンクの非線形モデルは次式で表現する。

$$\begin{aligned}\frac{ds_1}{dt} &= r - q_1 - b \\ s_1 &= k_{11}q_1^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) \\ b &= k_{13}q_1 = (c_{13} - 1)q_1\end{aligned}\quad (15.13)$$

ここに、 s_1 : 1段目タンク貯留高[mm], r : 観測雨量[mm/h], q_1 : 表面・中間流出高[mm/h], b : 1段目タンクから2段目タンクへの浸透供給量[mm/h], k_{11}, k_{12} : 貯留係数, p_1, p_2 : 貯留指数, k_{13} : 浸透係数

1段目の損失量 b は浸透供給量として、すべて2段目タンクへの入力とする。また、 p_1 と p_2 については表面流にマニング則を用い、以下の値に固定した。

$$\begin{aligned}k_{11} &= c_{11}A^{0.24}, \quad k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648}, \quad k_{13} = c_{13} - 1 \\ p_1 &= 0.6, \quad p_2 = 0.4648\end{aligned}\quad (15.14)$$

ここに、 A : 流域面積[km^2], \bar{r} : 平均雨量強度[mm/h], c_{11}, c_{12}, c_{13} : 未知定数

次に、2段目タンクの地下水流出成分を次式の線形モデルで表現した。

$$s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{d}{dt}(q_2), \quad \frac{ds_2}{dt} = b - q_2 \quad (15.15)$$

$$k_{21} = c_1k_{22}, \quad k_{22} = k_{13}/c_0, \quad c_0 = (\delta/T_c)^2, \quad c_1 = \delta^2/T_c \quad (15.16)$$

ここに、 s_2 : 2段目タンク貯留高[mm], k_{21}, k_{22} : 貯留係数, q_2 : 地下水流出高[mm/h], δ : 減衰係数, T_c : 分離時定数

式(15.16)に含まれる c_0 と c_1 は日野・長谷部によって提案された「フィルター成分分離法」による地下水流出成分を算定するための定数で確定値になる。本章で用いた4洪水例における分離時定数 T_c の値は表-1中の最下段に示されている。また、地下水流出成分の計算値が振動しないための条件として、減衰係数 δ は2~3の範囲にあると言われているが、本解析では $\delta=2.1$ の固定値を用いた。

1段目(表面・中間流出成分)の流出高 q_1 と2段目(地下水流出成分)の流出高 q_2 を合算して、次式に示す全流出高 q とする。

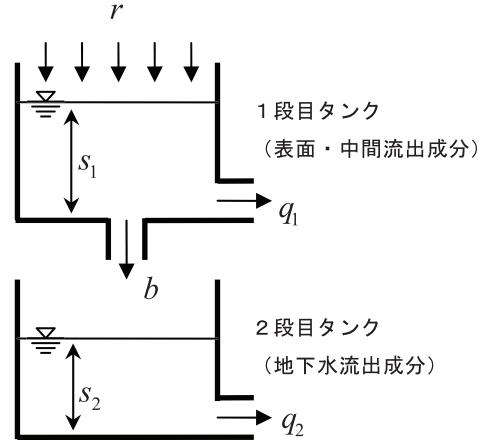


図-10 地下水流出を含む貯留関数法

$$q = q_1 + q_2 \quad (15.17)$$

式(15.13)～式(15.17)を用いた流出計算法については既に詳しく説明されているので、参考文献1)と4)を参照されたい。なお、本流出モデルを複合流域に適用する場合、未知定数 c_{11}, c_{12}, c_{13} は全分割流域で同一値をとるものとする。

以下に、「地下水流出を含む貯留関数法」による解析結果を示す。表-6には目的関数の違いによる3個のモデル定数 c_{11}, c_{12}, c_{13} の最適値と計算ピーク流量が示されている。なお、4解析洪水例の実測ピーク流量は表-1中の値を参照されたい。单一・複合流域のどちらのモデルにおいても、目的関数の違いによるモデル定数の最適値 c_{11}, c_{12}, c_{13} には顕著な差異は見られない。しかしながら、複合流域モデルにおいては、河道貯留効果の影響で、 c_{11} の値は單一流域のそれに比べて、1.5倍以上大きくなっている。 c_{12} の値は複合流域モデルの方が幾分小さいが、その差は大きくはない。 c_{13} の定数は單一流域と複合流域で大きな差異はない。留萌川・幌糠地点を除いた他の3地点では、目的関数にMSEを用いた方がKAI2に比べて、計算ピーク流量が大きくなる傾向にある。この特長は單一流域・複合流域モデルの双方に関しても言えることである。

单一・複合流域モデルにおける目的関数の違いによるハイドログラフの相対誤差(J_{re})とピーク相対誤差(J_{pe})を比較して、表-7に示す。留萌川・幌糠と雨竜川・多度志において、單一流域・複合流域モデル双方で、目的関数の差異によるハイドログラフの相対誤差(J_{re})に顕著な差が見られる。

表-6 2段タンク型貯留関数モデルにおける定数最適値と計算ピーク流量の比較

| | 目的関数 | 最適化結果 | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 |
|------|------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | | S.63.8.26 | S.63.8.25 | H.10.9.16 | H.10.9.16 |
| | | | 幌糠 | 多度志 | 上渚滑 | 開盛 |
| 單一流域 | KAI2 | c_{11} | 10.635 | 6.897 | 5.388 | 6.954 |
| | | c_{12} | 0.130 | 0.291 | 0.403 | 0.277 |
| | | c_{13} | 1.113 | 2.190 | 1.361 | 1.614 |
| | | ピーク流量 | 760.83 | 1230.00 | 1393.35 | 1131.44 |
| | MSE | c_{11} | 11.114 | 6.994 | 5.578 | 7.023 |
| | | c_{12} | 0.146 | 0.228 | 0.299 | 0.227 |
| | | c_{13} | 1.483 | 2.024 | 1.265 | 1.524 |
| | | ピーク流量 | 637.73 | 1248.24 | 1411.40 | 1176.20 |
| 複合流域 | KAI2 | c_{11} | 15.737 | 7.850 | 8.013 | 11.923 |
| | | c_{12} | 0.110 | 0.220 | 0.390 | 0.208 |
| | | c_{13} | 1.103 | 1.818 | 1.341 | 1.528 |
| | | ピーク流量 | 743.97 | 1295.42 | 1440.90 | 1227.47 |
| | MSE | c_{11} | 15.964 | 6.527 | 8.357 | 12.327 |
| | | c_{12} | 0.144 | 0.505 | 0.329 | 0.169 |
| | | c_{13} | 1.488 | 2.040 | 1.280 | 1.465 |
| | | ピーク流量 | 627.21 | 1363.76 | 1438.69 | 1229.86 |

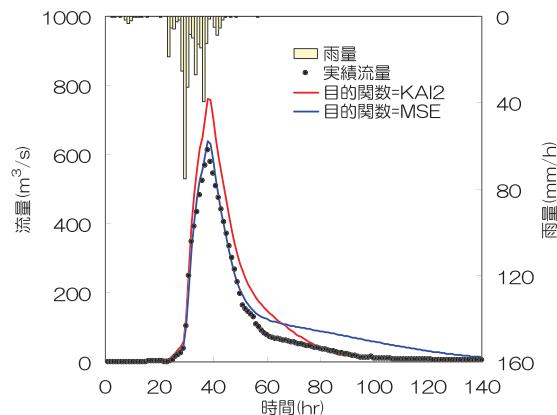


図-11-1 留萌川・幌糠（單一流域）

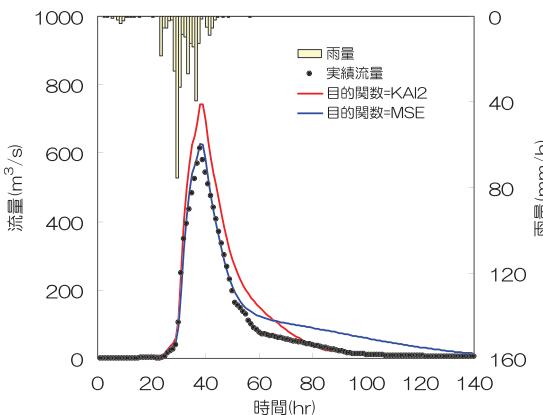


図-11-2 留萌川・幌糠（複合流域）

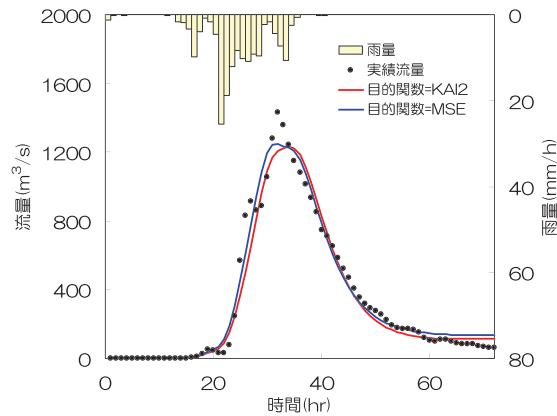


図-11-3 雨竜川・多度志（單一流域）

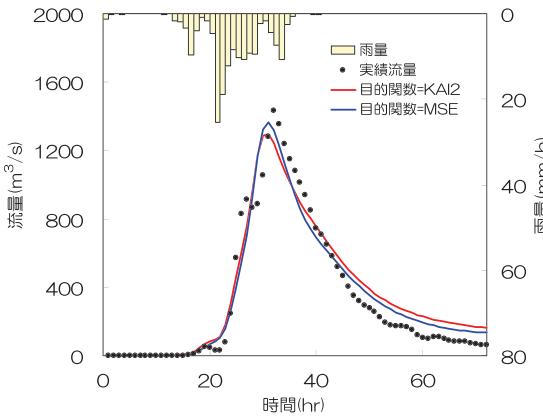


図-11-4 雨竜川・多度志（複合流域）

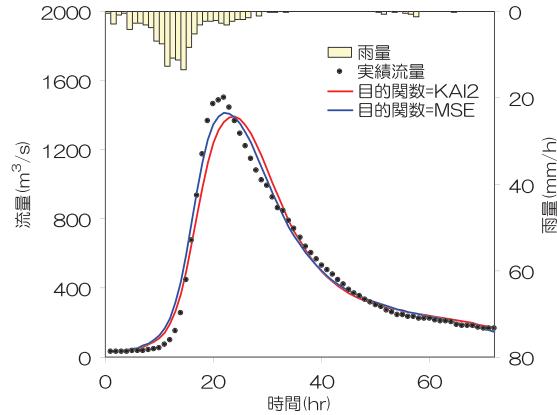


図-11-5 渚滑川・上渚滑（單一流域）

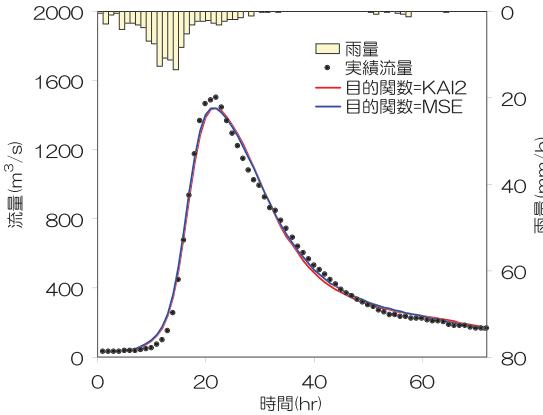


図-11-6 渚滑川・上渚滑（複合流域）

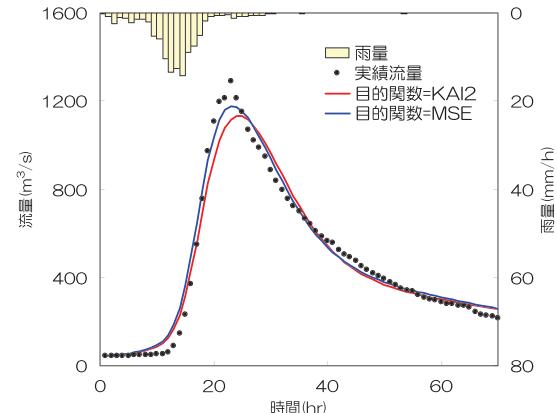


図-11-7 湧別川・開盛（單一流域）

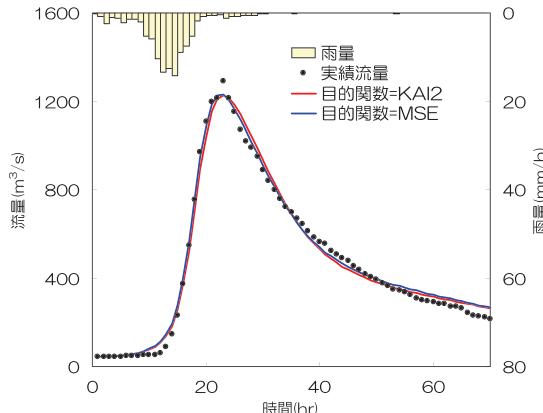


図-11-8 湧別川・開盛（複合流域）

表-7 2段タンク型貯留関数モデルにおける目的関数の差異による精度評価指標比較

| 目的関数 | | <i>Jre</i> | | | | <i>Jpe</i> | | | |
|------|-------------|--------------|--------------|-------|-------|---------------|--------------|-------|--------------|
| | | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 | 留萌川 | 雨竜川 | 渚滑川 | 湧別川 |
| 単一流域 | <i>KAI2</i> | 0.660 | 0.468 | 0.168 | 0.142 | -0.240 | -0.142 | 0.072 | 0.124 |
| | <i>MSE</i> | 1.877 | 0.556 | 0.188 | 0.161 | -0.039 | 0.129 | 0.060 | 0.089 |
| 複合流域 | <i>KAI2</i> | 0.661 | 0.360 | 0.105 | 0.104 | -0.212 | 0.110 | 0.045 | 0.049 |
| | <i>MSE</i> | 1.889 | 0.425 | 0.118 | 0.112 | -0.022 | 0.049 | 0.041 | 0.048 |

ピーク相対誤差(J_{pe})は、単一流域・複合流域共に目的関数に*MSE*を用いた方が*KAI2*に比べて、小さい値を取っている。顕著な差異が観測された留萌川・幌糠での解析結果によれば、単一流域モデルでは*KAI2*の J_{pe} が-0.240、*MSE*の J_{pe} が-0.039となり、複合流域モデルでは*KAI2*の J_{pe} が-0.212、*MSE*の J_{pe} が-0.022となった。単一流域・複合流域モデル共に目的関数に*MSE*を用いた方がピーク流出量の再現性が高い結果となっている。表-7において、目的関数の違いによる精度評価指標に大きな差異が現れた箇所を太文字で示す。

「地下水流出を含む貯留関数法」を4洪水例に適用した際の実測・計算ハイドログラフを比較して、以下に示す。まず、留萌川幌糠での再現結果を図-11-1と図-11-2に示す。単一・複合流域モデルともに目的関数の違いによるハイドログラフの再現性に明確な差異が現れている。とくに、単一流域・複合流域モデルの双方で目的関数の違いによるピーク流量近傍での誤差が大きい。

雨竜川・多度志の結果を図-11-3と図-11-4に示す。本解析地点でも、単一・複合流域モデルともに目的関数の違いによる再現ハイドログラフに顕著な差異が見られる。また、単一流域モデルと複合流域モデルを比較すると、単一流域モデルでは、再現ピーク流量の生起時刻が遅れている。一方、複合流域モデルのそれは早まっている。

渚滑川・上渚滑での結果を図-11-5と図-11-6に示す。とくに、単一流域モデルでは目的関数の違いによって、ハイドログラフの形状に大きな変化が見られる。複合流域モデルでは大きな差異が見られない。最後に、湧別川・開盛での結果を図-11-7と図-11-8に示す。本解析地点に関しても、渚滑川・上渚滑での結果に類似して、単一流域モデルでは目的関数による差異が見られるが、複合流域モデルのそれでは顕著な差異は見られない。

以上、貯留関数型流出モデル定数の最適値探索にあたっての目的関数として、*MSE*(誤差二乗平均)と*KAI2*(カイ2乗基準)を取り上げ、目的関数の差異がハイドログラフ相対誤差(J_{re})とピーク相対誤差(J_{pe})の評価指標にいかなる影響を及ぼすかを考察してきた。北海道内の一級河川4水系において、近年発生した比較的大きな4出水例に3種類の貯留関数法を適用した。また、河道効果を無視した単一流域及び河道貯留効果を考慮した複合流域の2つの流域モデルに関して、洪水再現計算の精度比較を試みた。

4解析対象河川毎に、ハイドログラフ相対誤差(J_{re})とピーク相対誤差(J_{pe})との評価指標に基づいて、最もハイドログラフの再現性が良好であった目的関数、流出解析手法及び流域モデルを選択して、以下にその特徴を整理して記述する。

(1) 留萌川(幌糠)では、「有効雨量を用いた貯留関数法」において、 J_{re} が最も小さい。しかも、単一流域・複合流域モデルとともに、目的関数*KAI2*と*MSE*の違いによる J_{re} の値はほぼ同程度である。とくに、複合流域モデルでの J_{re} の値は、約27%で比較的大きい。「地下水流出成分を含む貯留関数法」

を用いた單一流域・複合流域モデルとともに、目的関数にMSEを採用した方がピーク相対誤差(J_{pe})の値は小さく、4%以下である。

- (2) 雨竜川(多度志)では、「有効雨量を用いた貯留関数法」による單一流域モデルにおいて、目的関数KAI2とMSEの双方で、 J_{re} の値が同程度で最も小さく、約13%である。「損失項を含む貯留関数法」と「地下水流出成分を含む貯留関数法」を用いた複合流域モデルで、目的関数にMSEを採用した方がピーク相対誤差(J_{pe})は約5%となり、ピーク値の再現精度が高いことが分かる。
- (3) 渚滑川(上渚滑)においては、「地下水流出成分を含む貯留関数法」を用いた複合流域モデルで、目的関数KAI2とMSEの双方で、 J_{re} の値が同程度で最も小さく、約11%である。「地下水流出成分を含む貯留関数法」を用いた複合流域モデルで、目的関数にKAI2・MSEのどちらを用いても、ピーク相対誤差(J_{pe})は約4.5%で、ピーク流量の再現性が良好である。
- (4) 最後に、湧別川(開盛)での解析結果によれば、「有効雨量を用いた貯留関数法」による單一流域モデルにおいて、目的関数KAI2とMSEの違いによる J_{re} の値は、同程度で約10%であり、もっとも小さいことが分かる。「有効雨量を用いた貯留関数法」による複合流域モデルにおいて、KAI2・MSEのどちらの目的関数を選択しても、ピーク相対誤差(J_{pe})は1%以下で、ピーク流量の再現性が最も高い。
- (5) 本章で検討してきたように、洪水ハイドログラフの再現精度は、目的関数、採用流出モデル及び流域モデルに強く依存することが確認された。当然のことながら、洪水流出モデルに含まれる定数の数が多くなれば、再現精度は向上することは期待できる。しかしながら、モデル定数が多くなると数学的最適化手法が複雑になってくるというジレンマにも悩まされる。ここでの洪水解析例は4ケースと必ずしも多くはない。検証した3種類の貯留関数法のなかで、もっともパラメータが少ない流出モデルは「有効雨量を用いた貯留関数法」であり、同定すべき未知定数は流域平均粗度(ファクター f_c)の1個のみである。4洪水の解析結果の特徴は前述した通りであるが、「有効雨量を用いた貯留関数法」による結果は、他の2つの貯留関数法に比べても遜色はない。**表-3**に示されるように、4河川流域において、目的関数KAI2とMSEの違いに関係なく、單一・複合流域モデルとともに J_{re} の値はほぼ同程度であり、目的関数の差異による J_{re} の差は小さいことがわかる。同様に、雨竜川(多度志)の解析例を除くと、目的関数と流域モデルの違いによるピーク相対誤差(J_{pe})の差異は非常に小さい。

8. まとめ

ここでは、目的関数の差異によって、洪水ハイドログラフの形状特性値、すなわち、ピーク流量の相対誤差及びハイドログラフの相対誤差がどのように変化するかを検討してきた。解析対象例として、留萌川(幌糠)、雨竜川(多度志)、渚滑川(上渚滑)及び湧別川(開盛)を取り上げ、3種類の貯留関数法を4洪水例に適用した際の單一流域及び複合流域モデルでの洪水再現計算の精度比較を行った。以下に結論を要約して述べる。

- (1) 単一流域・複合流域モデルとともに「損失項を含む貯留関数法」と「地下水流出成分を含む貯留関数法」で、目的関数にMSEを用いた方が計算ピーク流量の再現精度が高くなっている。
- (2) 「有効雨量を用いた貯留関数法」の適用では、今回の4洪水例では單一流域・複合流域モデルともに、目的関数にMSEとKAI2のどちらを用いても、精度評価指標に大きな差異は見られない。
- (3) 单一流域モデルと複合流域モデルの精度を比較すると、「損失項を含む貯留関数法」と「地下水流出成分を含む貯留関数法」の間には、单一流域モデルで約10%程度の差があるが、複合流域モデルでは、单一流域モデルとほとんど差がない。

出成分を含む貯留関数法」とともに、複合流域モデルを用いた方が、再現ピーク流量の精度が高くなることが確認された。

- (4) どの貯留型洪水流出モデルを用いても、單一流域・複合流域モデルとともに、目的関数KAI2で J_{re} が小さく、MSEでは J_{pe} が小さくなる傾向が確認された。
- (5) 基本高水の推定では、ピーク流量の適合度がより重要視される場合が多い。よって、目的関数にMSEを用いた方がピーク流量の再現性が高いと考えられる。

文責 星 清
伊賀 久晃
宮武 真由子

参考文献

- 1) 星 清・山岡 獻:雨水流法と貯留関数法との相互関係, 第26回水理講演会論文集, pp. 273-278, 土木学会, 1982.
- 2) 日野幹雄・長谷部正彦:水文流出解析, 森北出版, 254p., 1985.
- 3) 星 清:やさしい数学的最適化手法, 北海道開発局土木試験所月報, No. 398, pp. 26-35, 1986.
- 4) 北海道開発局土木試験所河川研究室:実用的な洪水流出計算法, 185p., 1987.
- 5) 星 清・馬場仁志・橋本識秀:流域・河道系洪水追跡のための貯留関数法の開発, 河川技術に関する論文集, 第6巻, 土木学会, pp. 297-302, 2000.
- 6) (財)北海道河川防災研究センター・編集・発行:一般化貯留関数法による流域流出解析・河道洪水追跡実用計算法, 152p., 2001.
- 7) 中津川誠・星 清・橋本識秀:成分分離に基づく流域・河道追跡のための貯留関数モデルの同定, 水工学論文集, 第46巻, 土木学会, pp. 151-156, 2002.
- 8) 星 清・園山裕士:成分分離に基づく貯留関数モデルの同定手法の改良, (財)北海道河川防災研究センター, 研究所紀要(XIII), pp. 241-252, 2002.
- 9) 秋田大輔・星 清:2段タンク型貯留関数法の最適化比較, (財)北海道河川防災研究センター, 研究所紀要(XIV), pp. 249-282, 2003.
- 10) 星 清・松木賢治:2段タンク型貯留関数法を用いた流域流出・河道追跡モデルの計算手法, (財)北海道河川防災研究センター, 研究所紀要(XV), pp. 407-459, 2004.
- 11) 伊賀久晃・星 清・貞本 均・橋本識秀:目的関数の差異による貯留関数法の精度比較, 土木学会北海道支部論文報告集, 第61号, CD-ROM 概要集, II-10, 2005.
- 12) 伊賀久晃・星 清・貞本 均・橋本識秀:目的関数の差異による洪水流量推定誤差に及ぼす影響, 土木学会第60回年次学術講演会, CD-ROM 概要集, II-54, pp. 107-108, 2005.
- 13) 星 清・伊賀久晃:目的関数の差異による洪水流量推定誤差に及ぼす影響, 研究所紀要(XVI), (財)北海道河川防災研究センター研究所, pp. 359-375, 2005.
- 14) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行:対話式洪水流出計算マニュアル(第1版), 89p., 2004.
- 15) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行:対話式洪水流出計算マニュアル(第2版), 119p., 2005.

第16回 流出解析ゼミ

— 短時間予測雨量の誤差分散算定法 —

1. はじめに

近年、平成16年7月の新潟・福井豪雨災害などの例に引くまでもなく、集中豪雨による水害が全国各地で多発している。このため、国土交通省は豪雨災害緊急アクションプランの施策の一つとして「中小河川における洪水予測等の高度化」を策定し、平成17年度以降5年間で一級河川の主要な中小河川約900河川について洪水予測システム整備を行う計画である。

洪水時に運用される洪水逐次予測システムでは、オンラインで降雨予測のデータを取り込み、河川水位や流量を実時間で計算する必要がある。この洪水予測システムでは、予測雨量、流出モデル、モデル定数の総合化が必須条件となり、流出モデルや定数の総合化に関しては既に種々の研究成果が報告されている。とくに、洪水予測システムにカルマン・フィルターの理論が用いられる場合、流量その他の変数は確率変数として取り扱われ、その最良推定値と誤差分散が伝達方程式を介して逐次計算される。このため、出力となる流量や水位についても、その予測値だけでなく予測の精度(推定誤差分散)を定量的に算出することができる。すなわち、出力となる流量や水位の予測精度を適切に算出するためには、入力となる降雨予測情報の精度を正確に把握することが必要である。しかしながら、降雨予測情報が持つ不確定性については、あまり定量的な認識が持たれずに利用されている場合が多い。

本ゼミでは、降雨予測の推定誤差を定量的に算定するための方法論について、江藤らのレーダ雨量の誤差評価法に準拠して検討を行う。すなわち、雨量予測値のまわりに実際に生起する雨量の分布がガンマ分布で表わされるものとし、北海道における近年の洪水時に配信された(財)日本気象協会による降雨予測情報ならびに実測雨量の過去3時間移動平均値を予測雨量とした場合(旧建設省方式)を対象とし、降雨予測の誤差の分布特性を考察して、雨量予測値とその誤差分散の関係を求める。

2. 予測雨量の推定誤差

降雨予測値とその誤差分散の定量化は、降雨予測シミュレータの開発が緒となっている。

今、現時刻 k から ℓ 時間後の降雨実現値を r_ℓ 、その予測値を \hat{r}_ℓ とする。予測誤差の平均値を0、その予測誤差分散が S_ℓ^2 となるように、予測値 \hat{r}_ℓ を求めようとするとき、次式が成立する。

$$E[\hat{r}_\ell - r_\ell] = 0 \quad (16.1)$$

$$E[(\hat{r}_\ell - r_\ell)^2] = S_\ell^2 \quad (16.2)$$

ここに、 $E(\cdot)$ ：期待値演算子、 r_ℓ ：実現値、 \hat{r}_ℓ ：予測値、 S_ℓ^2 ：予測値と実現値の平均二乗誤差
一方、予測値 \hat{r}_ℓ の平均値 $\hat{\mu}_\ell$ と分散 $\hat{\sigma}_\ell^2$ は式(16.3)と式(16.4)で与えられるものとする。

$$\hat{\mu}_\ell = E[\hat{r}_\ell] \quad (16.3)$$

$$\hat{\sigma}_\ell^2 = E[(\hat{r}_\ell - \hat{\mu}_\ell)^2] \quad (16.4)$$

ここに、 $E(\cdot)$ ：期待値、 $\hat{\mu}_\ell$ ：平均値、 $\hat{\sigma}_\ell^2$ ：誤差分散

式(16.1)と式(16.3)より、次式が得られる。

$$E[\hat{r}_\ell] = \hat{\mu}_\ell = r_\ell \quad (16.5)$$

式(16.5)は予測値の期待値が実現値に等しいことを意味している。式(16.4)を展開して、式(16.5)の関係式を用いると式(16.6)が得られる。

$$E[\hat{r}_\ell^2] = \hat{\sigma}_\ell^2 + \hat{\mu}_\ell^2 \quad (16.6)$$

式(16.2)に式(16.6)を代入して整理すると、 S_ℓ^2 は次式で与えられる。

$$S_\ell^2 = \hat{\sigma}_\ell^2 \quad (16.7)$$

すなわち、平均二乗誤差 S_ℓ^2 は予測値 \hat{r}_ℓ の分散 $\hat{\sigma}_\ell^2$ に等しいことがわかる。

本ゼミでは、上記理論に基づき実用性を考慮して、予測雨量と実測雨量の平均二乗誤差の平方根(*RMSE* : Root Mean Squares Error) S_ℓ を用いて検討を行う。

予測雨量と実測雨量の平均二乗誤差 S_ℓ^2 は、次式で表わされる。

$$S_\ell^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{r}_{\ell,i} - r_{\ell,i})^2 \quad (16.8)$$

ここに、 $r_{\ell,i}$: 実現値、 $\hat{r}_{\ell,i}$: 予測値、 S_ℓ^2 : 予測値と実現値の平均二乗誤差

この平均二乗誤差の平方根の値 S_ℓ は、「*RMSE* (Root Mean Squares Error)」として気象予報や水文予測の誤差の評価に多く用いられている指標でもあり、直接的に予測の精度を表わす数値であり、感覚的に理解しやすい。予測値と実測値の誤差*RMSE*を予測雨量の各階級毎に求め、それに基づいて雨量の実現値の分布形状を表わすことを試みる。

また、江藤らは、負値の発生を防ぐために2母数ガンマ分布を確率モデルとして用いて、予測雨量値のまわりに生起する実測雨量値の分布を近似して、適合性が高いことを示している。2母数ガンマ分布は予測雨量の値が小さい場合、実際に生起する雨量は0mmとなる場合も多く、逆J字型の分布形状を呈する。逆に、予測雨量の値が大きい場合は、実際に生起する雨量も大きく、単峰の分布形状を示す。江藤らの解析においては、ガンマ分布を用いることにより、それらの実際の形状を非常に良好に近似できている。江藤らは2母数のガンマ分布を実測雨量の標準偏差で求めているが、本ゼミでは予測値と実測値の*RMSE*を用いて検討を行う。この2母数のガンマ分布の確率密度関数 $f(x)$ および理論積率と母数の関係式は、次式で表される。

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} \quad (16.9)$$

$$\alpha = \mu^2 / S_\ell^2, \quad \beta = \mu / S_\ell^2 \quad (16.10)$$

ここに、 α : 形状母数、 β : 尺度母数、 μ : 理論平均値、 S_ℓ : *RMSE*、 $\Gamma(\alpha)$: ガンマ関数

3. 北海道における予測降雨の推定誤差

本ゼミで用いる予測雨量は、

- (a) 2001年および2003年の台風接近時に北海道において配信された(財)日本気象協会による降雨予測情報(以下、気象協会予測雨量法と記す)
- (b) 北海道内における近年の主要洪水時において観測された実測雨量の過去3時間移動平均値を将来予測雨量とした場合(以下、移動平均予測雨量法と記す)

を対象とする。表-1には観測地点数と使用標本数が示されている。

気象協会予測雨量は、表-1に示すとおり、現状ではデータの蓄積が少なく、水系毎の高い解析精度は期待できない。このため、北海道全域に分布するデータに関して解析を行う。

移動平均予測雨量は、既往の多数の洪水例を用いることができるため、北海道の一級河川と指定河川の14水系154地点における932洪水例を選定した。それらの水系を地域別にI～IV地域に分割したものと、それら地域を1つにまとめた北海道全域についても解析を行う。なお、このI～IV地域の分類は、流域・流出特性から各地域の流出モデル定数の総合化を行った。

3.1 気象協会予測雨量法における予測雨量の誤差評価(リードタイム1～3hrs)

現在、北海道開発局では、洪水時に(財)日本気象協会から3時間おきに24時間分の予測雨量データの配信を受け、その予測雨量を入力として洪水予測を行っている。

現在の気象予測はコンピュータによる数値予測が主力である。日本気象協会から配信される予測雨量は、気象庁の数値予測の結果(GPV)を気象協会独自の地域予報モデルに再入力して精度の向上を図るとともに、天気図や気象協会数値予報(アネモス)、気象衛星資料、レーダ資料、雨量資料等をもとに、気象予報士による総合解析を行って算定されている。その予測雨量解析フローを図-1に示す。しかしながら、この予測降雨がどの程度の推定誤差を有しているかについては、定量評価はなされていない。

日本気象協会から配信された予測雨量情報を、地上の雨量計による実測値と対比して表-2に示す。予測雨量情報として、毎回24時間分のデータを受信しているが、本ゼミではこのうち、リードタイム1～3時間、すなわち、1時間先予測、2時間先予測、3時間先の予測雨量を対象とする。

リードタイム毎に、その実測値と予測値と同じ階級幅で分類し、その範囲のデータ数(標本数)に基づき、標本統計量を計算した結果を表-3に示す。

なお、予測雨量がゼロだったが実測雨量はゼロでなかったという場合も多く発生しているが、表-3では下記のことを考慮し、予測雨量がゼロであった時刻は除外して集計した。

- ・ 今回の分析では、長期的な雨量データでなく、洪水時の豪雨を主要な解析対象としていること。
- ・ 予測雨量がゼロのデータを含めた場合、対象洪水期間の設定の差異により、結果が大きく変化すること。

本ゼミでは、「2. 予測雨量の推定誤差」に示したとおり、予測雨量と実測雨量の平均二乗誤差の平方根(RMSE: Root Mean Squares Error) S_ℓ を用いて検討を行う。平均値 \bar{r}_ℓ 及び平均二乗誤差の平方根 S_ℓ は式(16.11)と式(16.12)で算定される。

$$\bar{r}_\ell = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_{\ell,i} \quad (16.11)$$

$$S_\ell^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{r}_{\ell,i} - r_{\ell,i})^2 \quad (16.12)$$

ここに、 r_ℓ : 実現値、 \bar{r}_ℓ : 平均値、 N : データ数、 $\hat{r}_{\ell,i}$: 予測値、 S_ℓ^2 : 予測値と実現値の平均二乗誤差
実測雨量の平均値と平均二乗誤差の関係を、予測雨量の階級毎にプロットしたものを図-2に示す。
また、式(16.13)に誤差分散式を示す。図-3には、プロットより得られた誤差分散式の係数を示す。

$$S_\ell / \sqrt{\ell} = a \bar{r}_\ell^b \quad (16.13)$$

ここに、 S_ℓ : 予測値と実現値の平均二乗誤差の平方根、 ℓ : リードタイム、 \bar{r}_ℓ : 平均値、 a 、 b : 定数

また、「2. 予測雨量の推定誤差」で示したとおり江藤らは、予測雨量値のまわりに生起する実測雨量値の分布に2母数ガンマ分布をあてはめた場合、適合性が高いことを示している。その2母数のガンマ分布を実測雨量の標準偏差で求めているが、本ゼミでは予測値と実測値のRMSEを用いて検討を行う。

この2母数のガンマ分布の確率密度関数 $f(x)$ および理論積率と母数の関係式は、式(16.9)、式(16.10)で表される。表-3に示す実測雨量の平均 \bar{r}_ℓ と RMSE S_ℓ を用い、式(16.10)により $\mu = \bar{r}_\ell$ として形状母数 α 、尺度母数 β を決定したガンマ分布と解析対象データのヒストグラムを比較して、図-4に示す。図中には母数推定値も示されている。

その結果、小降雨の場合は指数分布で近似でき、また、大きな降雨の場合は非対称单峰分布ないし指数分布で表現されている。ガンマ分布のヒストグラムへの適合度が良好であり、江藤らの手法が北海道における洪水時における降雨データに対しても有効であることが分かる。

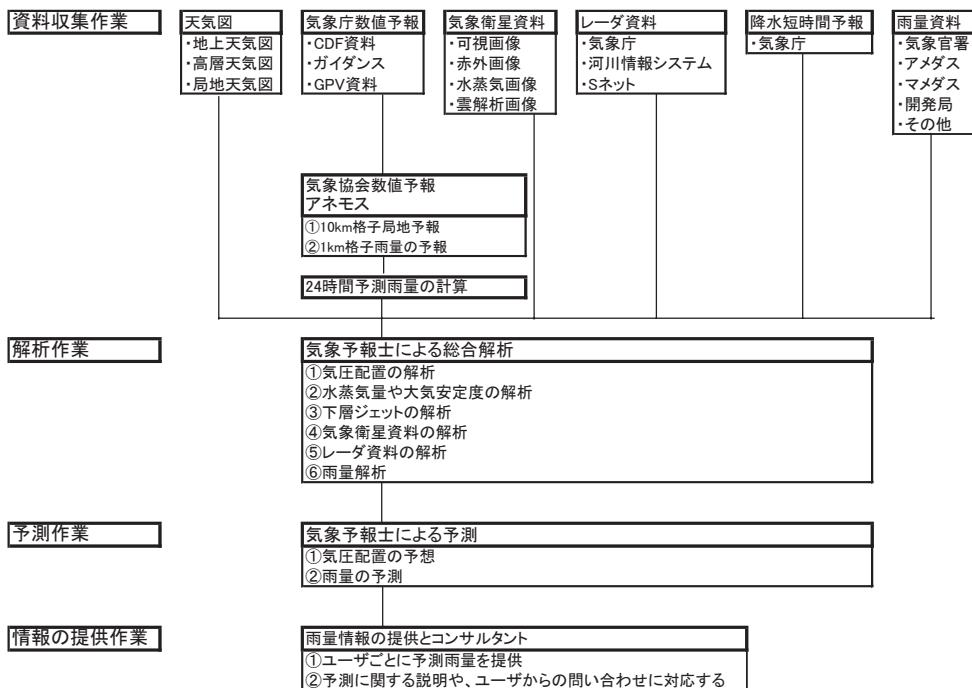


図-1 気象協会による予測雨量算定法概要フロー

表-1 解析対象洪水数

| 区分地域 | 水系 | 地点数 | 洪水 |
|-------------------|--|---|--|
| ①気象協会予測雨量法 | | | |
| 北海道全域 | (1)石狩川水系 (2)釧路川水系 (3)十勝川水系 (4)網走川水系 (5)常呂川水系 (6)湧別川水系 (7)渚滑川水系 (8)留萌川水系 (9)尻別川水系 (10)天塩川水系 (11)鵡川水系 (12)沙流川水系 | 20 2 6 2 2 2 2 1 1 3 1 1 | 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 |
| | 合計 | 43 | 14 |
| ②移動平均予測雨量法 | | | |
| I 地域 | (1)石狩川水系 (2)留萌川水系 (3)尻別川水系 (4)後志利別川水系 | 47 6 11 6 | 294 40 67 65 |
| II 地域 | (1)天塩川水系 (2)渚滑川水系 (3)湧別川水系 (4)常呂川水系 | 9 5 5 8 | 54 55 39 45 |
| III 地域 | (1)網走川水系 (2)標津川水系 (3)釧路川水系 | 7 1 8 | 33 4 44 |
| IV 地域 | (1)鵡川水系 (2)沙流川水系 (3)十勝川水系 | 5 6 30 | 38 62 92 |
| 北海道全域 | I~IV地域の合計 | 154 | 932 |

表-2 実測雨量と予測雨量の関係（一例）

| 日 時 | 実 測 | 予 測 | | | |
|------|------|-------|-------|-------|--------|
| | | 9月10日 | | 9月10日 | |
| | | 12時発表 | 15時発表 | 12時発表 | 15時発表 |
| 9/10 | 時間雨量 | 時間雨量 | | 時間雨量 | |
| | 13時 | 1 | 0 | 1時間先 | |
| | 14時 | 1 | 2 | 2時間先 | |
| | 15時 | 0 | 6 | 3時間先 | |
| | 16時 | 0 | 8 | 4時間先 | 2 1時間先 |
| | 17時 | 2 | 8 | 5時間先 | 2 2時間先 |
| | 18時 | 8 | 8 | 6時間先 | 3 3時間先 |
| | 19時 | 4 | 7 | 7時間先 | 5 4時間先 |

表-3 予測雨量と実測雨量の階級別統計量（気象協会予測雨量法）

1時間後予測 ($\ell = 1$)

| 実測 ↓ | 予測 → | 0 ~ | 2 ~ | 4 ~ | 6 ~ | 8 ~ | 10 ~ | 15 ~ |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| | | 2 mm | 4 mm | 6 mm | 8 mm | 10 mm | 15 mm | 20 mm |
| 0 ~ 2 mm | 94 | 72 | 26 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 2 ~ 4 mm | 12 | 37 | 32 | 14 | 5 | 2 | 0 | 0 |
| 4 ~ 6 mm | 2 | 16 | 37 | 26 | 9 | 3 | 1 | 1 |
| 6 ~ 8 mm | 0 | 2 | 13 | 16 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| 8 ~ 10 mm | 0 | 4 | 8 | 5 | 7 | 3 | 0 | 0 |
| 10 ~ 15 mm | 0 | 1 | 4 | 3 | 1 | 4 | 1 | 1 |
| 15 ~ 20 mm | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 20 ~ 30 mm | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 30 ~ 50 mm | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 50 ~ 100 mm | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 標本数 | 108 | 132 | 120 | 67 | 37 | 15 | 4 | |
| 平均 \bar{r}_ℓ | 0.571 | 1.895 | 4.032 | 5.020 | 6.297 | 9.018 | 13.174 | |
| RMSE S_ℓ | 1.049 | 2.049 | 2.705 | 2.612 | 4.111 | 6.458 | 7.173 | |

2時間後予測 ($\ell = 2$)

| 実測 ↓ | 予測 → | 0 ~ | 2 ~ | 4 ~ | 6 ~ | 8 ~ | 10 ~ | 15 ~ |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| | | 2 mm | 4 mm | 6 mm | 8 mm | 10 mm | 15 mm | 20 mm |
| 0 ~ 2 mm | 103 | 68 | 21 | 6 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 ~ 4 mm | 9 | 33 | 38 | 17 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 4 ~ 6 mm | 1 | 21 | 33 | 27 | 9 | 1 | 0 | 0 |
| 6 ~ 8 mm | 1 | 7 | 7 | 16 | 13 | 3 | 0 | 0 |
| 8 ~ 10 mm | 1 | 7 | 3 | 8 | 8 | 4 | 0 | 0 |
| 10 ~ 15 mm | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 3 | 0 | 0 |
| 15 ~ 20 mm | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 20 ~ 30 mm | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 30 ~ 50 mm | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 50 ~ 100 mm | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 標本数 | 115 | 137 | 105 | 76 | 37 | 14 | 1 | |
| 平均 \bar{r}_ℓ | 0.490 | 2.439 | 3.484 | 5.004 | 7.257 | 9.293 | 20.706 | |
| RMSE S_ℓ | 1.352 | 2.348 | 2.495 | 2.926 | 5.143 | 4.507 | 5.706 | |

3時間後予測 ($\ell = 3$)

| 実測 ↓ | 予測 → | 0 ~ | 2 ~ | 4 ~ | 6 ~ | 8 ~ | 10 ~ | 15 ~ |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| | | 2 mm | 4 mm | 6 mm | 8 mm | 10 mm | 15 mm | 20 mm |
| 0 ~ 2 mm | 96 | 79 | 18 | 15 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 2 ~ 4 mm | 6 | 37 | 35 | 18 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| 4 ~ 6 mm | 2 | 28 | 30 | 24 | 10 | 4 | 0 | 0 |
| 6 ~ 8 mm | 0 | 6 | 11 | 15 | 13 | 1 | 0 | 0 |
| 8 ~ 10 mm | 0 | 2 | 5 | 8 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 10 ~ 15 mm | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | 2 |
| 15 ~ 20 mm | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 20 ~ 30 mm | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 30 ~ 50 mm | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 50 ~ 100 mm | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 標本数 | 104 | 154 | 103 | 83 | 40 | 7 | 4 | |
| 平均 \bar{r}_ℓ | 0.434 | 2.167 | 4.358 | 4.600 | 6.252 | 5.910 | 19.442 | |
| RMSE S_ℓ | 1.063 | 2.324 | 4.337 | 3.642 | 4.176 | 6.360 | 8.409 | |

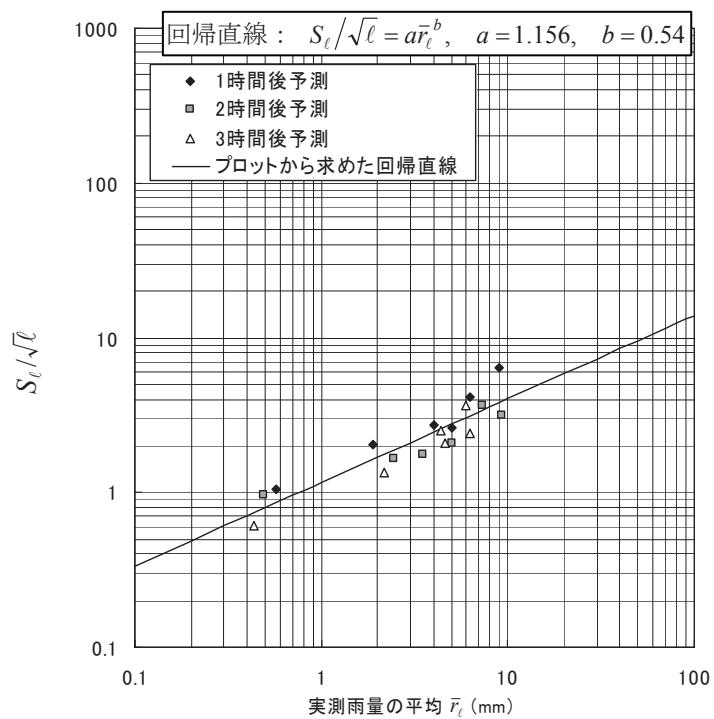


図-2 実績雨量の平均 \bar{r}_ℓ と $S_\ell / \sqrt{\ell}$ の関係
(気象協会予測雨量法 リードタイム $\ell = 1 \sim 3$)

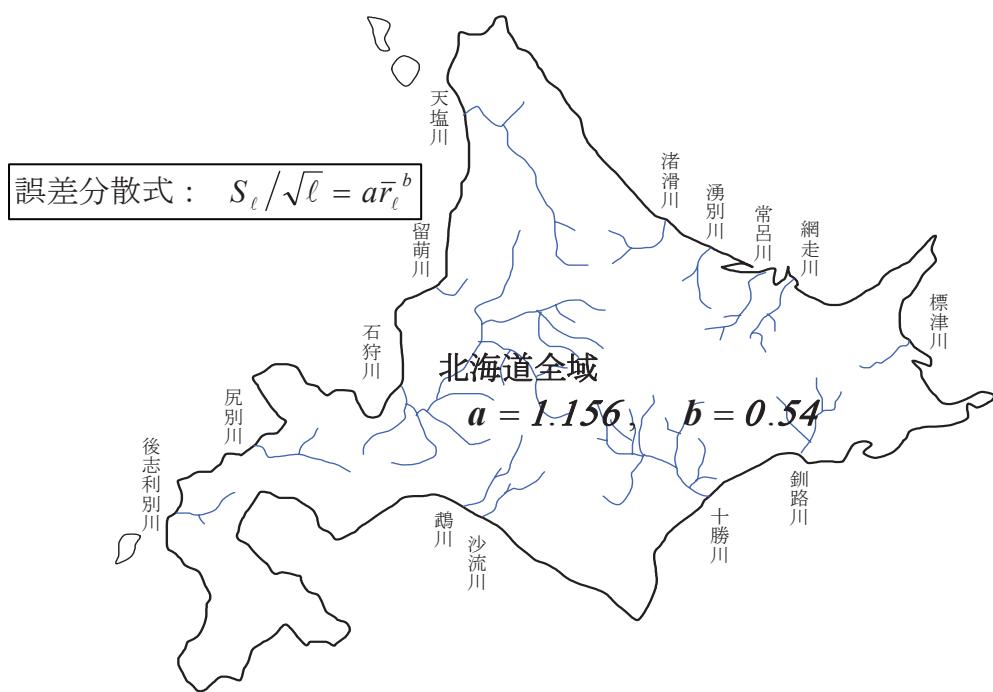


図-3 誤差分散式の係数 (気象協会予測雨量法 リードタイム $\ell = 1 \sim 3$)

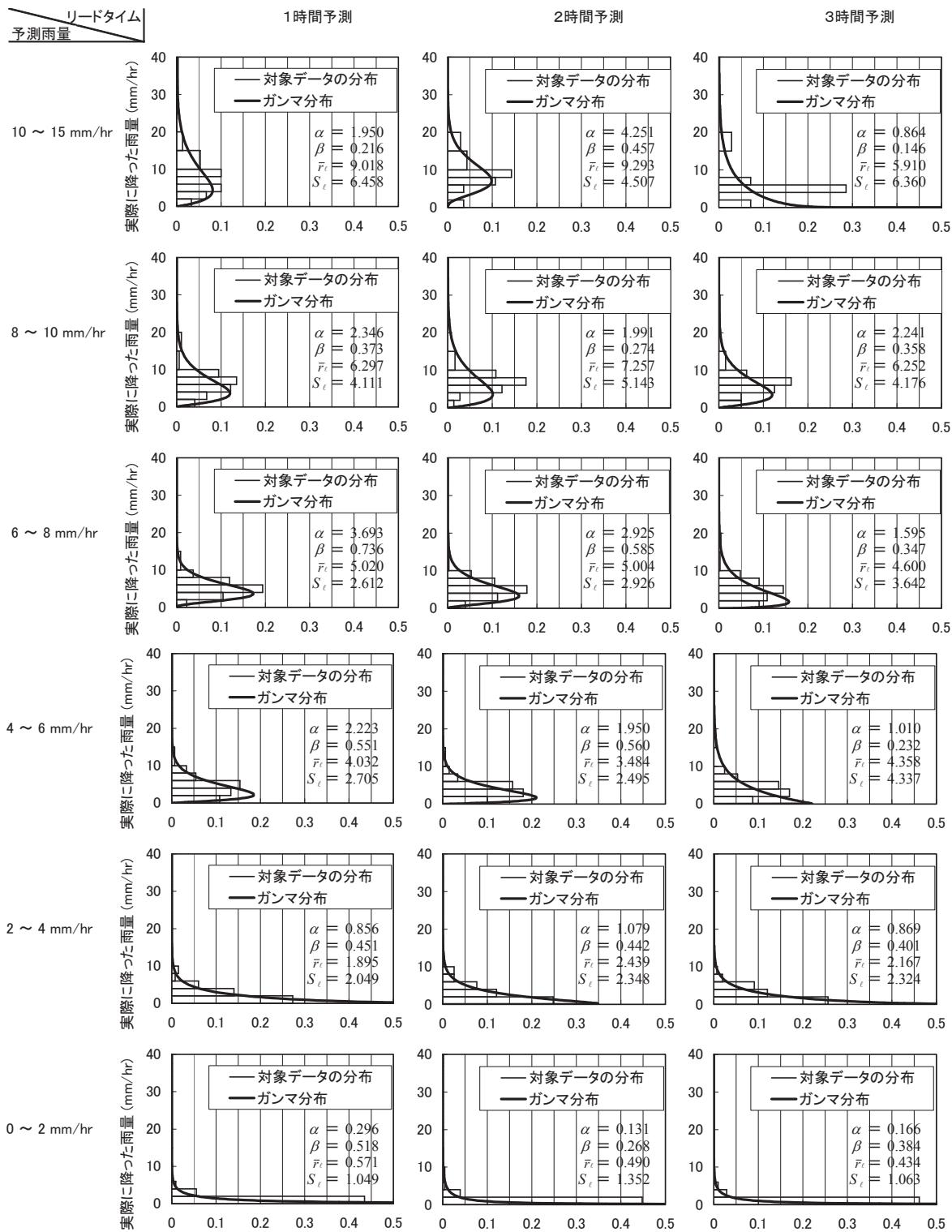


図-4 ガンマ分布のヒストグラムへのあてはめ

(気象協会予測雨量法リードタイム $\ell = 1 \sim 3$)

3.2 移動平均予測雨量法における予測雨量の誤差評価(リードタイム1~3hrs)

前節に示した日本気象協会による予測雨量(気象協会予測雨量法)は、北海道開発局に配信が開始されて以降、現状では豪雨事例の蓄積が少ない。そこで本節では、降雨データの蓄積が多い地上雨量計による実績の雨量データをもとに、旧建設省の洪水予報業務においてよく用いられていた実測雨量の過去3時間移動平均雨量を予測雨量の代用とする方法(移動平均予測雨量法)を採用し、前述の手法の適用性検討を補足する。また、本ゼミは932洪水を対象とし、3時間先までの予測雨量について解析を行う。

将来予測降雨(リードタイム=1~3hrs)の算定方法を表-4に示す。すなわち、21時における1~3時間先の予測雨量は、19時から21時までの3時間平均の値を用いる。テレメータ等による実測雨量は1時間毎に更新されるものとして、新しい雨量情報が入手されるたびに、順次過去3時間の移動平均値を将来3時間先までの予測雨量とする。

階級分けした予測雨量と実測雨量を整理して、リードタイム別に統計量を算定した結果を地域別に表-5に示す。実測雨量の平均値と平均二乗誤差の関係をプロットした一例として北海道全域ものを図-5に示し、また地域別にまとめた誤差分散式の係数を図-6に示す。データ数の多い北海道全域に関して実測雨量の平均とRMSEに基づいて形状母数 α 、尺度母数 β を推定したガンマ分布と対象データのヒストグラムを比較した例をそれぞれ、図-7に示す。

表-4 実測雨量と予測雨量の関係（一例）

| 年月日時 | 地点：納内(石狩川流域) | | | |
|-----------------|--------------|-------------|------|------|
| | 実測値 | 予測値(リードタイム) | | |
| | | 1hr | 2hr | 3hr |
| 1975/8/22 19:00 | 0.02 | | | |
| 1975/8/22 20:00 | 0.88 | | | |
| 1975/8/22 21:00 | 0.61 | | | |
| 1975/8/22 22:00 | 0.64 | 0.50 | | |
| 1975/8/22 23:00 | 1.95 | 0.71 | 0.50 | |
| 1975/8/23 0:00 | 0.55 | 1.07 | 0.71 | 0.50 |
| 1975/8/23 1:00 | 0.56 | 1.05 | 1.07 | 0.71 |
| 1975/8/23 2:00 | 0.84 | 1.02 | 1.05 | 1.07 |

表-5 予測雨量と実測雨量の階級別統計量（移動平均予測雨量法）
北海道全域（リードタイム $\ell = 1 \sim 3$ ）

| 1時間後予測 ($\ell = 1$) | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--|
| 実測 ↓ | 予測 → | 0 ~ 2 mm | 2 ~ 4 mm | 4 ~ 6 mm | 6 ~ 8 mm | 8 ~ 10 mm | 10 ~ 15 mm | 15 ~ 20 mm | 20 ~ 30 mm | 30 ~ 50 mm | |
| 0 ~ 2 mm | 35876 | 3345 | 1030 | 396 | 201 | 185 | 53 | 29 | 1 | | |
| 2 ~ 4 mm | 2855 | 2438 | 1123 | 498 | 197 | 167 | 26 | 10 | 1 | | |
| 4 ~ 6 mm | 738 | 1258 | 1264 | 634 | 267 | 190 | 39 | 11 | 0 | | |
| 6 ~ 8 mm | 263 | 492 | 693 | 514 | 311 | 272 | 29 | 11 | 4 | | |
| 8 ~ 10 mm | 101 | 231 | 304 | 328 | 272 | 247 | 50 | 13 | 6 | | |
| 10 ~ 15 mm | 108 | 213 | 288 | 353 | 371 | 445 | 79 | 24 | 2 | | |
| 15 ~ 20 mm | 43 | 53 | 55 | 67 | 82 | 186 | 74 | 23 | 4 | | |
| 20 ~ 30 mm | 23 | 19 | 19 | 24 | 16 | 69 | 57 | 24 | 1 | | |
| 30 ~ 50 mm | 6 | 3 | 5 | 7 | 3 | 13 | 16 | 17 | 7 | | |
| 50 ~ 100 mm | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | | |
| 標本数 | 40013 | 8052 | 4781 | 2823 | 1722 | 1776 | 423 | 162 | 27 | | |
| 平均 \bar{r}_ℓ | 0.703 | 3.148 | 4.791 | 6.275 | 7.642 | 9.302 | 12.169 | 13.294 | 18.799 | | |
| RMSE S_ℓ | 1.469 | 3.054 | 3.573 | 4.632 | 5.396 | 6.772 | 9.972 | 14.415 | 25.860 | | |

| 2時間後予測 ($\ell = 2$) | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--|
| 実測 ↓ | 予測 → | 0 ~ 2 mm | 2 ~ 4 mm | 4 ~ 6 mm | 6 ~ 8 mm | 8 ~ 10 mm | 10 ~ 15 mm | 15 ~ 20 mm | 20 ~ 30 mm | 30 ~ 50 mm | |
| 0 ~ 2 mm | 34818 | 3719 | 1348 | 624 | 316 | 342 | 92 | 67 | 6 | | |
| 2 ~ 4 mm | 3015 | 1954 | 1067 | 513 | 244 | 231 | 51 | 11 | 0 | | |
| 4 ~ 6 mm | 987 | 1159 | 1023 | 560 | 286 | 223 | 60 | 11 | 0 | | |
| 6 ~ 8 mm | 432 | 534 | 584 | 422 | 265 | 268 | 37 | 10 | 5 | | |
| 8 ~ 10 mm | 202 | 264 | 309 | 261 | 237 | 195 | 41 | 16 | 4 | | |
| 10 ~ 15 mm | 238 | 306 | 324 | 336 | 279 | 304 | 54 | 16 | 1 | | |
| 15 ~ 20 mm | 91 | 64 | 90 | 82 | 70 | 132 | 39 | 11 | 4 | | |
| 20 ~ 30 mm | 41 | 24 | 27 | 19 | 19 | 66 | 35 | 8 | 5 | | |
| 30 ~ 50 mm | 10 | 8 | 7 | 4 | 6 | 13 | 13 | 12 | 1 | | |
| 50 ~ 100 mm | 1 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | |
| 標本数 | 39835 | 8036 | 4780 | 2822 | 1722 | 1774 | 422 | 162 | 27 | | |
| 平均 \bar{r}_ℓ | 0.852 | 3.209 | 4.668 | 5.710 | 6.686 | 7.682 | 8.844 | 8.226 | 14.197 | | |
| RMSE S_ℓ | 1.978 | 3.815 | 4.125 | 4.871 | 5.481 | 7.581 | 11.736 | 17.987 | 27.275 | | |

| 3時間後予測 ($\ell = 3$) | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--|
| 実測 ↓ | 予測 → | 0 ~ 2 mm | 2 ~ 4 mm | 4 ~ 6 mm | 6 ~ 8 mm | 8 ~ 10 mm | 10 ~ 15 mm | 15 ~ 20 mm | 20 ~ 30 mm | 30 ~ 50 mm | |
| 0 ~ 2 mm | 34103 | 3906 | 1621 | 783 | 441 | 483 | 142 | 76 | 8 | | |
| 2 ~ 4 mm | 3041 | 1671 | 991 | 539 | 255 | 263 | 51 | 17 | 0 | | |
| 4 ~ 6 mm | 1150 | 1097 | 887 | 504 | 265 | 251 | 62 | 15 | 1 | | |
| 6 ~ 8 mm | 540 | 556 | 514 | 375 | 264 | 219 | 46 | 9 | 2 | | |
| 8 ~ 10 mm | 272 | 303 | 274 | 234 | 179 | 189 | 33 | 9 | 3 | | |
| 10 ~ 15 mm | 365 | 355 | 352 | 280 | 223 | 209 | 39 | 15 | 5 | | |
| 15 ~ 20 mm | 117 | 96 | 92 | 76 | 73 | 93 | 19 | 8 | 2 | | |
| 20 ~ 30 mm | 56 | 30 | 36 | 25 | 18 | 57 | 12 | 7 | 4 | | |
| 30 ~ 50 mm | 20 | 13 | 5 | 4 | 3 | 10 | 17 | 5 | 1 | | |
| 50 ~ 100 mm | 1 | 0 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | |
| 標本数 | 39665 | 8027 | 4777 | 2821 | 1721 | 1774 | 421 | 161 | 27 | | |
| 平均 \bar{r}_ℓ | 0.965 | 3.245 | 4.530 | 5.223 | 5.937 | 6.402 | 6.702 | 6.053 | 12.695 | | |
| RMSE S_ℓ | 2.330 | 3.840 | 4.799 | 5.038 | 5.821 | 8.267 | 13.111 | 18.922 | 26.674 | | |

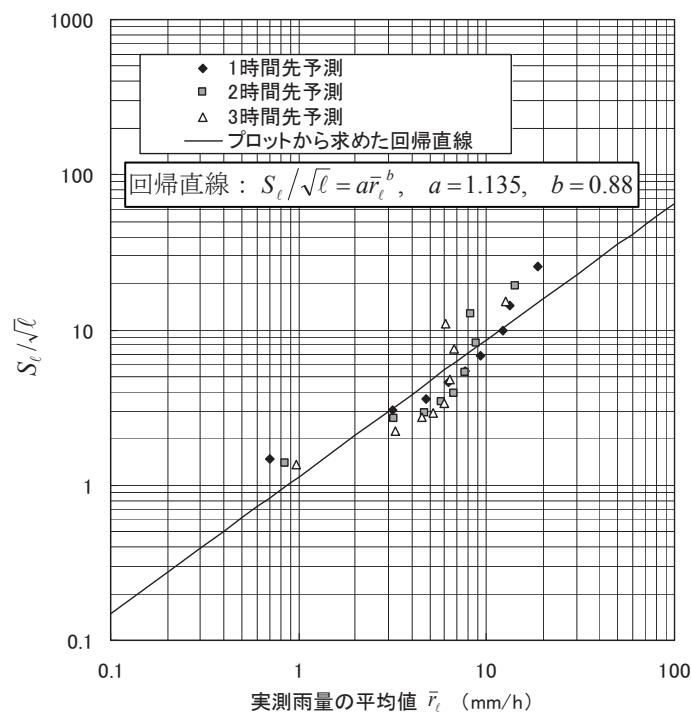


図-5 実績雨量の平均 \bar{r}_ℓ と $S_\ell / \sqrt{\ell}$ の関係 北海道全域
(移動平均予測雨量法 リードタイム $\ell = 1 \sim 3$)

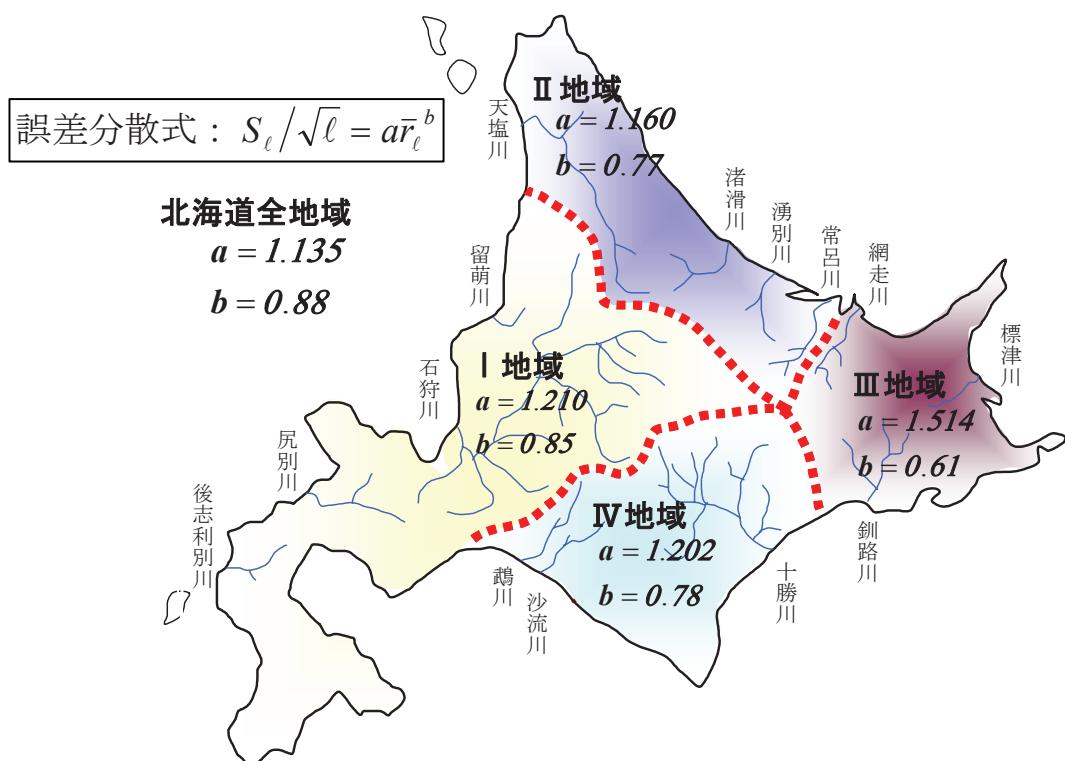


図-6 地域別における誤差分散式の係数
(移動平均予測雨量法 リードタイム $\ell = 1 \sim 3$)

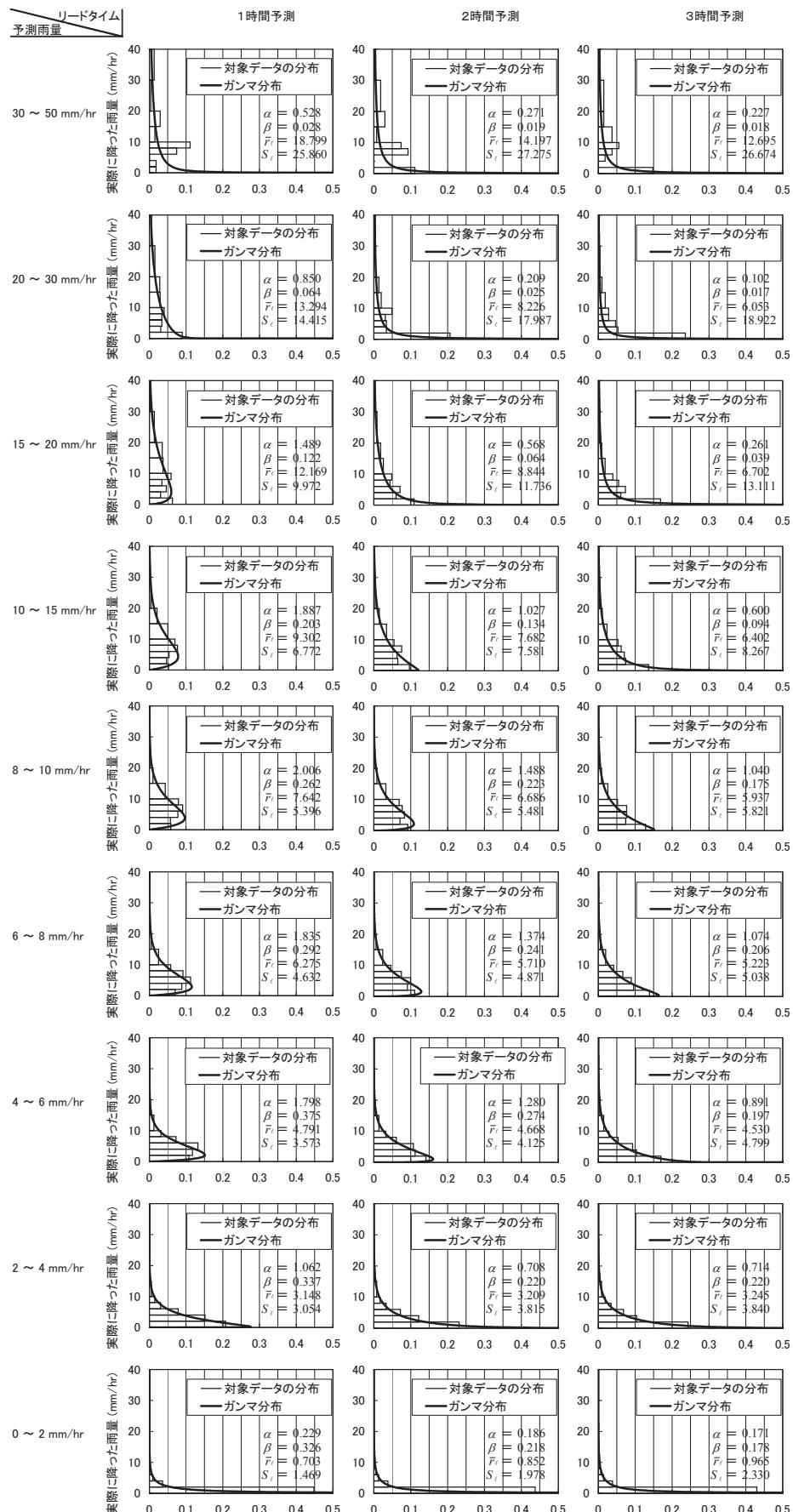


図-7 ガンマ分布のヒストグラムへのあてはめ 北海道全域

(移動平均予測雨量法 リードタイム $\ell = 1 \sim 3$)

3.3 移動平均予測雨量法における予測時間の誤差評価(リードタイム1~6hrs)

洪水時に河川水位や流量を実時間で計算する洪水逐次予測システムでは、オンラインで数時間先の降雨予測のデータを取り込み、洪水流出予測の計算の入力データとして活用している。そのため、リードタイムがより長い予測雨量を用いることができれば、長時間先の洪水予測が可能となる。しかしながら、リードタイムが長いほど、予測雨量が持つ誤差は増大するが、前節において3時間先までの予測雨量の誤差について定量評価が可能となった。そこで、さらに6時間先までの予測雨量について誤差評価を試みる。

解析対象は表-1に示す降雨データの蓄積が最も多い移動平均予測雨量法における北海道全域の932洪水について解析を行う。前節に示した1~3時間先予測雨量の階級分けした予測雨量と実測雨量の統計量(表-5)を用い、さらに4~6時間先の統計量を表-6に示す。実測雨量の平均値 \bar{r}_ℓ と平均二乗誤差 S_ℓ の関係をプロットしたものを図-8に示す。

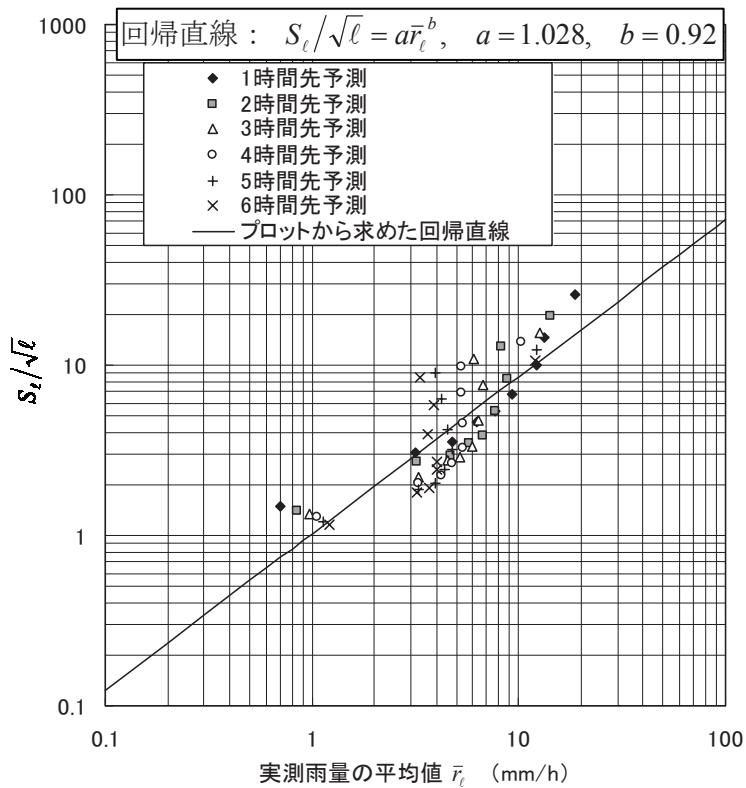


図-8 実績雨量の平均 \bar{r}_ℓ と $S_\ell / \sqrt{\ell}$ の関係 北海道全域
(移動平均予測雨量法 リードタイム $\ell = 1 \sim 6$)

表-6 予測雨量と実測雨量の階級別統計量（移動平均予測雨量法）
北海道全域（リードタイム $\ell = 4 \sim 6$ ）

| 4時間先予測 ($\ell = 4$) | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-------|----------|----------|----------|----------|-----------|------------|------------|------------|------------|--|
| 予測→ | 実測↓ | 0 ~ 2 mm | 2 ~ 4 mm | 4 ~ 6 mm | 6 ~ 8 mm | 8 ~ 10 mm | 10 ~ 15 mm | 15 ~ 20 mm | 20 ~ 30 mm | 30 ~ 50 mm | |
| 0 ~ 2 mm | 33498 | 4080 | 1812 | 988 | 561 | 599 | 176 | 81 | 9 | | |
| 2 ~ 4 mm | 3063 | 1452 | 970 | 496 | 264 | 269 | 60 | 19 | 1 | | |
| 4 ~ 6 mm | 1292 | 1047 | 773 | 466 | 240 | 279 | 50 | 9 | 1 | | |
| 6 ~ 8 mm | 626 | 539 | 497 | 324 | 221 | 229 | 38 | 10 | 0 | | |
| 8 ~ 10 mm | 341 | 337 | 242 | 191 | 164 | 141 | 36 | 14 | 0 | | |
| 10 ~ 15 mm | 449 | 404 | 332 | 240 | 179 | 155 | 33 | 11 | 10 | | |
| 15 ~ 20 mm | 151 | 106 | 96 | 84 | 64 | 54 | 8 | 6 | 1 | | |
| 20 ~ 30 mm | 70 | 40 | 40 | 26 | 19 | 31 | 9 | 5 | 5 | | |
| 30 ~ 50 mm | 23 | 8 | 10 | 3 | 7 | 12 | 10 | 5 | 0 | | |
| 50 ~ 100 mm | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 | | |
| 標本数 | 39514 | 8013 | 4772 | 2819 | 1720 | 1773 | 420 | 160 | 27 | | |
| 平均 \bar{r}_ℓ | 1.056 | 3.262 | 4.247 | 4.752 | 5.414 | 5.380 | 5.256 | 5.325 | 10.258 | | |
| RMSE S_ℓ | 2.546 | 4.010 | 4.515 | 5.249 | 6.512 | 9.186 | 13.729 | 19.551 | 27.436 | | |

| 5時間先予測 ($\ell = 5$) | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-------|----------|----------|----------|----------|-----------|------------|------------|------------|------------|--|
| 予測→ | 実測↓ | 0 ~ 2 mm | 2 ~ 4 mm | 4 ~ 6 mm | 6 ~ 8 mm | 8 ~ 10 mm | 10 ~ 15 mm | 15 ~ 20 mm | 20 ~ 30 mm | 30 ~ 50 mm | |
| 0 ~ 2 mm | 32997 | 4212 | 2028 | 1106 | 681 | 726 | 200 | 89 | 10 | | |
| 2 ~ 4 mm | 3069 | 1325 | 895 | 511 | 246 | 276 | 61 | 18 | 2 | | |
| 4 ~ 6 mm | 1391 | 998 | 720 | 427 | 238 | 241 | 47 | 8 | 1 | | |
| 6 ~ 8 mm | 714 | 535 | 452 | 275 | 200 | 208 | 34 | 10 | 0 | | |
| 8 ~ 10 mm | 398 | 335 | 227 | 173 | 139 | 116 | 31 | 16 | 0 | | |
| 10 ~ 15 mm | 511 | 415 | 306 | 226 | 135 | 131 | 31 | 11 | 8 | | |
| 15 ~ 20 mm | 170 | 128 | 95 | 69 | 53 | 35 | 6 | 2 | 0 | | |
| 20 ~ 30 mm | 90 | 45 | 33 | 22 | 22 | 21 | 3 | 4 | 1 | | |
| 30 ~ 50 mm | 24 | 9 | 10 | 4 | 2 | 15 | 7 | 1 | 5 | | |
| 50 ~ 100 mm | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | | |
| 標本数 | 39365 | 8002 | 4766 | 2814 | 1719 | 1770 | 420 | 159 | 27 | | |
| 平均 \bar{r}_ℓ | 1.132 | 3.247 | 3.965 | 4.357 | 4.782 | 4.559 | 4.230 | 3.951 | 12.143 | | |
| RMSE S_ℓ | 2.718 | 4.172 | 4.547 | 5.406 | 7.093 | 9.338 | 14.082 | 20.244 | 27.242 | | |

| 6時間先予測 ($\ell = 6$) | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|-------|----------|----------|----------|----------|-----------|------------|------------|------------|------------|--|
| 予測→ | 実測↓ | 0 ~ 2 mm | 2 ~ 4 mm | 4 ~ 6 mm | 6 ~ 8 mm | 8 ~ 10 mm | 10 ~ 15 mm | 15 ~ 20 mm | 20 ~ 30 mm | 30 ~ 50 mm | |
| 0 ~ 2 mm | 32498 | 4371 | 2211 | 1249 | 750 | 874 | 236 | 94 | 10 | | |
| 2 ~ 4 mm | 3073 | 1189 | 888 | 441 | 286 | 273 | 46 | 22 | 2 | | |
| 4 ~ 6 mm | 1488 | 941 | 680 | 412 | 218 | 199 | 36 | 10 | 1 | | |
| 6 ~ 8 mm | 808 | 529 | 369 | 291 | 185 | 169 | 23 | 5 | 0 | | |
| 8 ~ 10 mm | 461 | 337 | 196 | 167 | 110 | 99 | 22 | 13 | 0 | | |
| 10 ~ 15 mm | 585 | 405 | 276 | 171 | 122 | 114 | 40 | 7 | 8 | | |
| 15 ~ 20 mm | 184 | 145 | 94 | 50 | 31 | 26 | 6 | 0 | 1 | | |
| 20 ~ 30 mm | 95 | 57 | 38 | 19 | 11 | 8 | 4 | 5 | 0 | | |
| 30 ~ 50 mm | 28 | 13 | 7 | 6 | 4 | 7 | 6 | 1 | 5 | | |
| 50 ~ 100 mm | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 標本数 | 39220 | 7987 | 4759 | 2811 | 1717 | 1769 | 419 | 157 | 27 | | |
| 平均 \bar{r}_ℓ | 1.204 | 3.227 | 3.666 | 4.036 | 4.012 | 3.650 | 3.900 | 3.318 | 11.962 | | |
| RMSE S_ℓ | 2.849 | 4.389 | 4.634 | 6.019 | 6.678 | 9.542 | 14.422 | 20.722 | 26.247 | | |

3.4 予測雨量における誤差分散式

気象協会予測雨量法及び移動平均予測雨量法における地域別の誤差分散式を表-7に示す。リードタイムが3時間における各手法の誤差分散式定数は、地域別にほぼ同程度の値を示している。しかしながら、移動平均予測雨量法におけるⅢ地域(網走川・標津川・釧路川)の定数は、他の地域のそれと差異が見られる。その理由として表-1に示されるように、この地域の資料数が少ないことが挙げられる。移動平均予測雨量法におけるリードタイムが3時間と6時間の誤差分散式には、大きな差異は見られない。

3.5 予測雨量の補正

洪水予測精度は降雨予測の精度に強く依存するため、本手法を実際に適用する場合、予測雨量の情報が得られた時点で、実測雨量の平均値ではなく予測値そのものを用いて、実測雨量の分布を推定できることが望ましい。

表-3や表-5並びに表-6を見ると、小降雨時においては、実測雨量の平均値は予測雨量の階級区分範囲内にほぼ収まっている。すなわち、統計的に、予測雨量の期待値は実測雨量の平均値にほぼ等しいといえる。このため、予測雨量の値をそのまま用いて、実際に生起する雨量分布を表わすガンマ分布の形状を推定できる。

しかしながら、雨量が大きくなるほど、実測雨量の平均値は予測値の階級区分範囲より小さくなる傾向にある。すなわち、予測雨量は実測雨量に比べて過大に算定されることになる。このため、予測値を実測値に近づける方策があれば洪水予測の精度がより向上できると考えられる。そこで、本ゼミで対象とした(a)気象協会予測雨量法、(b)移動平均雨量法について、リードタイム毎の予測値階級中央値 \hat{r}_ℓ と実測平均値 \bar{r}_ℓ の関係を図-9と図-10に示す。その結果、リードタイム毎に予測値を実測値に補正するための回帰式を算定できる。

表-7 誤差分散式係数の一覧表

| 地 域 | リードタイム | 誤差分散式 | |
|--------------------------|--------|--|------|
| | | $S_\ell/\sqrt{\ell} = a\bar{r}_\ell^b$ | |
| | | a | b |
| ①気象協会予測雨量表 | | | |
| 北海道全域 (7水系) | 3時間 | 1.156 | 0.54 |
| ②移動平均予測雨量法 | | | |
| I 地域 (留萌川・石狩川・尻別川・後志利別川) | 3時間 | 1.210 | 0.85 |
| II 地域 (天塩川・渚滑川・湧別川・常呂川) | | 1.160 | 0.77 |
| III 地域 (網走川・標津川・釧路川) | | 1.514 | 0.61 |
| IV 地域 (鶴川・沙流川・十勝川) | | 1.202 | 0.78 |
| 北海道全域 (14水系) | | 1.135 | 0.88 |
| 北海道全域 (14水系) | 6時間 | 1.028 | 0.92 |

その回帰式(補正式)は式(16.14)で表され、その係数を表-8に示す。また、気象協会から配信された予測雨量をその補正式を用いて、補正した補正予測雨量の算定法の一例を表-9に示す。

$$\bar{r}_\ell = a_m \hat{r}_\ell^{b_m} \quad (16.14)$$

ここに、 \bar{r}_ℓ ：実測値、 \hat{r}_ℓ ：予測値、 a_m, b_m ：補正係数

(a) 日本気象協会による予測雨量(気象協会予測雨量法)を実測値により近づける補正式(図-9)は、豪雨時のデータ数が充分とは言えないが、リードタイム毎に顕著な差が見られない。

一方、豪雨時のデータを含む(b)過去3時間移動平均雨量を予測雨量の代用とした場合(移動平均予測雨量法)のリードタイム別補正式(図-10)では、リードタイムが短いほど相関が高いと言えるが、リードタイムが長くなるほど実測値が予測値より小さくなる傾向を示す傾向にある。

以上より、気象協会予測雨量法及び移動平均予測雨量法における予測値を補正式で補正することで、予測雨量精度をより向上させることが可能となる。

表-8 補正式係数の一覧表

| 地 域 | リード タイム ℓ (h) | 補正式 | | R^2 |
|-----|--------------------------|---|------|-------|
| | | $\bar{r}_\ell = a_m \hat{r}_\ell^{b_m}$ | 決定係数 | |

①気象協会予測雨量法

| | | | | |
|--------------|---|-------|-------|--------|
| 北海道全域 (14水系) | 1 | 0.588 | 1.099 | 0.9939 |
| | 2 | 0.550 | 1.156 | 0.9869 |
| | 3 | 0.549 | 1.082 | 0.9363 |

②移動平均予測雨量法

| | | | | |
|--------------------------|---|-------|-------|--------|
| I 地域 (留萌川・石狩川・尻別川・後志利別川) | 1 | 1.115 | 0.793 | 0.9373 |
| | 2 | 1.279 | 0.676 | 0.9313 |
| | 3 | 1.302 | 0.645 | 0.9337 |
| II 地域 (天塩川・渚滑川・湧別川・常呂川) | 1 | 0.866 | 0.928 | 0.9595 |
| | 2 | 1.068 | 0.743 | 0.9202 |
| | 3 | 1.225 | 0.603 | 0.8574 |
| III 地域 (網走川・標津川・釧路川) | 1 | 0.841 | 1.026 | 0.9661 |
| | 2 | 1.087 | 0.839 | 0.9116 |
| | 3 | 1.407 | 0.627 | 0.7739 |
| IV 地域 (鶲川・沙流川・十勝川) | 1 | 0.95 | 0.918 | 0.9759 |
| | 2 | 1.294 | 0.695 | 0.9249 |
| | 3 | 1.794 | 0.44 | 0.6398 |
| 北海道全域 (14水系) | 1 | 1.021 | 0.851 | 0.9561 |
| | 2 | 1.252 | 0.686 | 0.9211 |
| | 3 | 1.394 | 0.585 | 0.8792 |
| | 4 | 1.510 | 0.499 | 0.8494 |
| | 5 | 1.511 | 0.461 | 0.7428 |
| | 6 | 1.521 | 0.418 | 0.6647 |

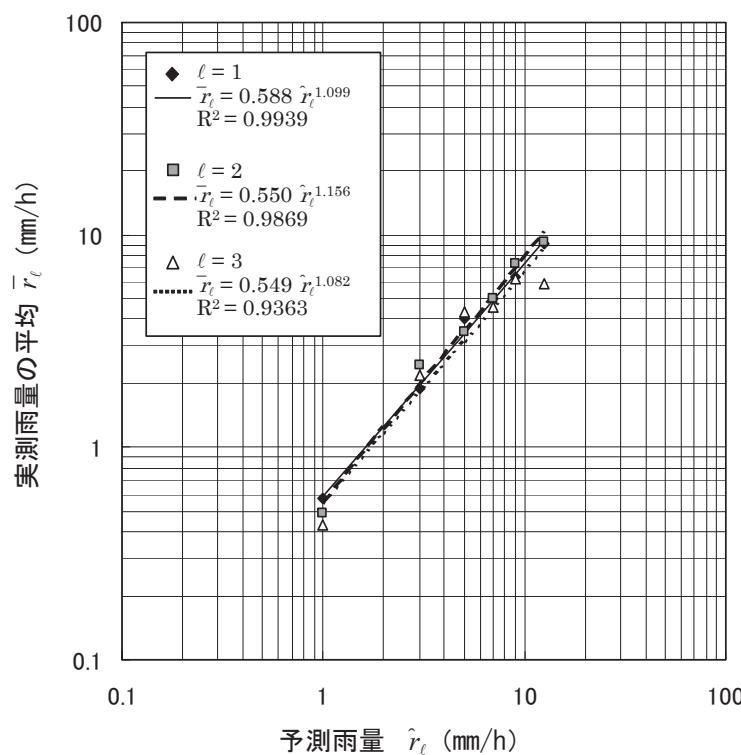


図-9 実測値と予測雨量の関係 北海道全域
(気象協会予測雨量法 リードタイム $\ell = 1 \sim 3$)

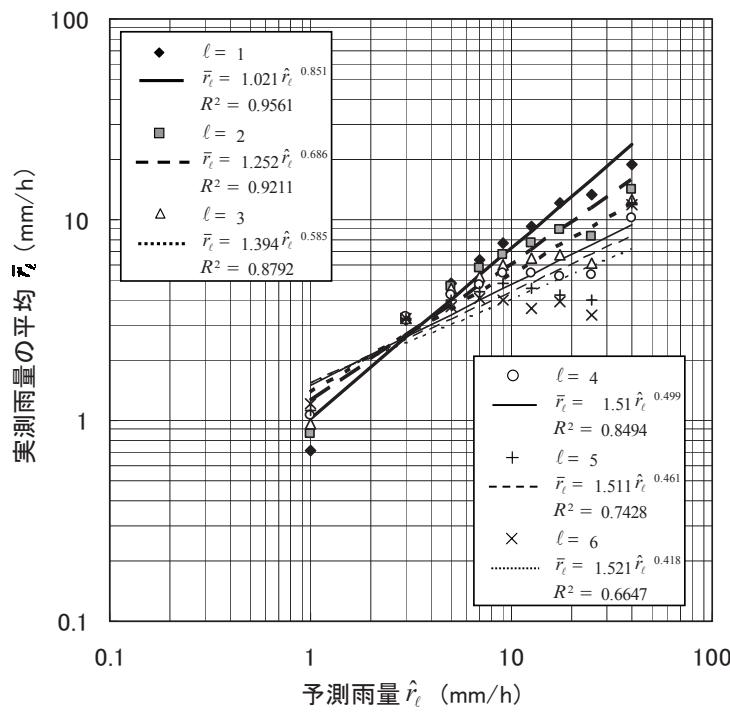


図-10 実測値と予測雨量の関係 北海道全域
(移動平均予測雨量法 リードタイム $\ell = 1 \sim 6$)

表-9 補正式による補正予測雨量値の算定(一例)

| 月 | 日 | 時 | 実測 時間雨量 | 気象協会 予測雨量値 \hat{r}_ℓ | 補正式による 予測雨量値 | 気象協会 予測雨量値 \hat{r}_ℓ | 補正式による 予測雨量値 |
|-------|-----|---|------------|------------------------------|---|------------------------------|---|
| | | | | 9月10日 12時発表 | $\bar{r}_\ell = a_m \hat{r}_\ell^{b_m}$ | 9月10日 15時発表 | $\bar{r}_\ell = a_m \hat{r}_\ell^{b_m}$ |
| 9月10日 | 13時 | 1 | 0 (1時間先) | 0.0 | - | - | - |
| | 14時 | 1 | 2 (2時間先) | 1.2 | - | - | - |
| | 15時 | 0 | 6 (3時間先) | 3.8 | - | - | - |
| | 16時 | 0 | - | - | 2 (1時間先) | 1.3 | - |
| | 17時 | 2 | - | - | 2 (2時間先) | 1.2 | - |
| | 18時 | 8 | - | - | 3 (3時間先) | 1.8 | - |

※補正予測式の係数(a_m, b_m) : 表-8 参照

4. まとめ

本ゼミでは、洪水予測システムにおいて必要条件となる予測雨量が持つ誤差分散について、取りまとめたものであり、以下に結果を要約する。

- (1) 北海道における近年の主要洪水時の降雨データの蓄積を図り、実測雨量と予測雨量の誤差分布に関する統計解析を行い、予測誤差を定量的に評価することを試みた。その結果、気象協会予測雨量法および移動平均予測雨量法とともに、I～IV地域及び北海道全域でそれぞれ、信頼性が高い1～3時間間先までの誤差分散式を算定することが可能となった。
- (2) 予測雨量の階級別に分類された実測雨量のヒストグラムへのガンマ分布の当てはめは、適合度が良好である。
- (3) (1)の結果を踏まえて、データの蓄積が多い移動平均予測雨量法の北海道全域において6時間先までの予測誤差を定量的に評価することを試みた。その結果、定量的に誤差分散式を算定することができた。
- (4) 洪水予測を行う場合、比較的精度の高い数時間先の予測雨量が必要となる。しかしながら、統計結果より予測値はリードタイムが長くなるほど、実測値との差が大きくなる。そこで、予測値をより実測値に近づける方策として、補正式をリードタイムごとに求めた。その結果、予測雨量精度をより向上させることが可能となる。

文責 東海林 勉
星 清

参考文献

- 1) 椎葉充晴・高棹琢馬・中北英一：移流モデルによる短時間降雨予測手法の検討，第28回水理講演会論文集，第28卷，pp. 423-428，1984.
- 2) 椎葉充晴：レーダ雨量計を利用した降雨の実時間予測と実時間流出予測法，第23回水工学に関する夏季研修会講義集，A-1，土木学会，pp. 1-17 1987.
- 3) 上林好之：レーダ雨量情報を用いた洪水流出予測に関する研究，学位論文，早稲田大学，215p.，1990.
- 4) Etoh,T., Kamibayashi,Y., Nakanishi,M. and Yoshida,M. : A study on prediction error in rainfall forecasting and its application to on-line operation of detention storage, Proc. of International Conference on Water Resources & Environment Research : Towards the 21st Century, Vol. I, pp.531-538, 1996.

- 5) 中北英一：レーダー技術の現状と今後，雨水技術資料，Vol. 38, pp. 25-31, 2000.
- 6) 立川康人・椎葉充晴：共分散行列の平方根分解をもとにした正規確率場および対数正規確率場の発生法，土木学会論文集，No. 656/II-52, pp. 39-46, 2000.
- 7) 吉野文雄：レーダ水文学，森北出版，175p., 2002.
- 8) 立川康人・小松良光・寶 錠：移流モデルによる予測降雨場の誤差構造のモデル化と降雨場の発生，京大防災研年報，第45号B, pp. 101-111, 2002.
- 9) 和田一範・川崎将生・富澤洋介：河川の高水管理における予測降雨情報の適用性に関する考察，水文・水資源学会誌，第18巻，6号，pp. 703-709, 2005.
- 10) 東海林 勉・星 清・藤田 曜・橋本識秀：予測降雨の推定誤差評価について(2)，土木学会北海道支部論文報告集，第61号，CD-ROM 概要集，II-8, 2005.
- 11) 星 清・東海林 勉・藤田 曜：短時間予測降雨における誤差指標の総合化，研究所紀要(XVI)，(財)北海道河川防災研究センター，pp. 379-404, 2005.
- 12) 佐山敬洋・立川康人・寶 錠：不確実性を考慮する地上・レーダ雨量の合成法，土木学会論文集，No. 803/II-73, pp. 1-11, 2005.

第17回 流出解析ゼミ

— 単一流域におけるカルマン・フィルター理論を用いた実時間流出予測 —

1. はじめに

洪水生起時に、時々刻々観測される降雨や水位などのテレメータデータを利用して、モデル誤差や観測誤差を考慮し、観測値と予測値の誤差を最小化しながら、洪水予測を繰り返していく方法は実時間流出予測として知られている。前回のゼミでも述べたように、近年多発する集中豪雨による水害に対する施策の一つとして、実時間流出予測システムの整備が急務である。実時間流出予測システムは、オンラインで降雨予測のデータを取り込み、河川水位や流量を実時間で計算するため、予測雨量、流出モデル、モデル定数の総合化が必須条件である。流出モデルや定数の総合化に関しては、これまでのゼミの中で、以下の3種の貯留関数法について詳述してきた。

- (1) 有効雨量を用いた貯留関数法(一般化貯留関数モデル)
- (2) 損失項を含む貯留関数法(1段タンク型貯留関数モデル)
- (3) 地下水流出を含む貯留関数法(2段タンク型貯留関数モデル)

予測雨量については、「第16回ゼミ」において、北海道の近年の洪水時に配信された(財)日本気象協会による降雨予測情報ならびに実測雨量の過去3時間移動平均値を予測雨量とした場合(旧建設省方式)を対象として、降雨予測の誤差の分布特性を考察し、雨量予測値とその誤差分散の関係を求めた。

本ゼミでは、単一流域における実時間流出予測計算を行うため、上記3種の貯留関数法のうち(1)有効雨量を用いた貯留関数法にカルマン・フィルター理論を適用する計算例について述べる。その際、予測精度向上のため、更新すべきモデル定数としてフリクション・ファクター(流域平均粗度) f_c と流出率 f の2個を選択し、新しい流量観測値が1時間ごとに入手されるものとして、これらのモデル定数を自動的に更新(オンライン同定)する。

また、予測雨量誤差の予測水位精度に及ぼす影響を定量的に評価するために、システム入力である降雨量 r を「状態変量」に加えて、システム方程式の拡大を図り、予測雨量の誤差分散を考慮した洪水予測システムを構築する。

なお、本ゼミでの理論展開は、上記(2)と(3)の貯留関数法にも容易に拡張可能である。

2. カルマン・フィルター理論

2.1 カルマン・フィルター理論とは

実時間流出予測手法には、これまでカルマン・フィルター、ファジー推論及びニューラルネットワークが適用されてきたが、どの方法にも一長一短があり、どの手法が最適であるかを確定することは困難である。そのような中、1980年に北海道開発局・石狩川開発建設部において「有効雨量を用いた貯留関数法(一般化貯留関数法)」とカルマン・フィルター理論を組み合わせた洪水予測システムの実運用が開始され、導入以来25年近く、各開発建設部においても広く実運用され、その実績も高く評価されている。とくに、所定の予測精度が得られない場合には、モデル定数の修正が可能など、システムの取り扱いが比較的容易な洪水逐次予測モデルであるという現場からの意見も多い。

カルマン・フィルター理論は、後述するように、システム方程式と観測方程式が完成すれば、あとは一連のカルマン・フィルター公式を機械的に適用していくことにより、逐次予測値とその誤差分散が算出される。また、テレメータ等により新しい観測値が入手されたときに予測値と誤差分散が更新

される。したがって、カルマン・フィルターは実時間流出予測に威力を発揮する一手法と考えられる。カルマン・フィルター理論の特徴を以下に要約して示す。

- (a) 人間の経験的直感による予測に近いことを計算機で自動的に行える。すなわち、洪水予測にあまり熟練を要しない。
- (b) 時々刻々の水文テレメータ情報を予測に組込むことができる。すなわち、オンライン予測に適している。
- (c) 予測値の誤差分散（予測精度）が自動的に算定される。すなわち、予測値の信頼区間を知ることができる。
- (d) 過去の長い水文量情報を必要としない。すなわち、計算機のデータ容量が少なくてすむ。

2.2 カルマン・フィルター理論の基本概念

カルマン・フィルター理論の骨子を理解するために、単純な適用例をとりあげる。今、われわれが流量を知る手段としてどんな方法があるかをまず考えてみる。

(I)なんらかの数学的モデル(たとえば、貯留関数法)を使う方法

(II)水位観測から水位～流量曲線を用いて流量に変換する方法

実は、カルマン・フィルター理論は上記2方法による情報に基づいて流量推定値の最適値を得ようとするものである。換言すれば、上記2つの方法によつても、われわれは流量の“真値”を知ることはできず、必ず誤差を伴う。われわれは“真値”にできるだけ近い推定値を得ようとしているのである。カルマン・フィルター理論においては、(I)をシステム方程式、(II)を観測方程式と呼んでいる。(I)の方法によるシステム方程式は、次のように定式化される。

$$z_1 = x + v_1 \quad (17.1)$$

ここで、 z_1 ：数学的モデルによる流量の推定値、 x ：流量の“真値”（われわれはわからない）、 v_1 ：モデル化による誤差

洪水流出解析に用いられている流出モデルは相当数にのぼる。したがって、採用流出モデルによって流量推定値 z_1 も異なり、それに伴つてモデル誤差 v_1 も変化することがわかる。カルマン・フィルター理論においては、 v_1 の値を知る必要はない代わりにその平均値と分散を次のように規定する必要がある。

$$E(v_1) = 0 \quad (17.2)$$

$$\sigma_v^2 = E(v_1^2) \quad (17.3)$$

ここで、 $E(\cdot)$ は期待値演算子

式(17.2)は不偏推定値であるための条件であり、式(17.3)はモデル誤差の分散である。 (v_1) の平均値がゼロであることに注意する)。

(II)の方法による観測方程式は、次のように定式化される。

$$z_2 = x + v_2 \quad (17.4)$$

ここで、 z_2 ：水位～流量曲線の変換から得られる流量推定値、 x ：式(17.1)と同様に流量の“真値”，

v_2 : 流量観測精度に依存する観測誤差

水位～流量曲線作成にあたっては、低水・高水の広範囲にわたって流量観測がなされていることが望ましい。最近、洪水観測体制が整備されつつあるが、出水時の流量観測には種々の困難が伴う。もし仮に、水位～流量曲線が低水時の流量観測資料のみによって作成されている場合には、洪水ピーク近傍での流量推定精度は相当に低いことを覚悟しなければならない。したがって、洪水ピーク近傍における水位～流量曲線による流量推定値 z_2 とそれに伴う観測誤差 v_2 が大きくなることは容易に想像できよう。式(17.1)のモデル誤差 v_1 と同様に、観測誤差 v_2 についてもその平均値と分散を次のように規定する。

$$E(v_2) = 0 \quad (17.5)$$

$$\sigma_2^2 = E(v_2^2) \quad (17.6)$$

式(17.5)は不偏推定値であるための条件であり、式(17.6)は観測誤差 v_2 の分散を与える式である (v_2 の平均値は式(17.5)に示されるように、ゼロであることに注意)。

式(17.1)及び式(17.4)に示されるように、カルマン・フィルター理論におけるシステム方程式と観測方程式が定義された。次に、流量の最良推定値 \hat{x} をどのように算定したらよいかという議論に進むこととする。この \hat{x} を得るもっと簡単な方法として、誰しも式(17.1)と式(17.4)の重みつき平均値を考えるであろう。すなわち、

$$\hat{x} = k_1 z_1 + k_2 z_2 \quad (17.7)$$

ここで、 k_1 と k_2 は重み係数であり、これらを決定する必要がある。

次に、流量の“真値” x とその推定値 \hat{x} の誤差 \tilde{x} を考えると、

$$\tilde{x} = \hat{x} - x \quad (17.8)$$

前述したように、 \hat{x} が不偏推定値であるためには、 \tilde{x} の平均値がゼロでなければならない。すなわち、次式が成立しなければならない。

$$E(\tilde{x}) = 0 \quad (17.9)$$

式(17.9)に式(17.7)と式(17.8)を代入すると、

$$E(\tilde{x}) = E[(k_1 z_1 + k_2 z_2) - x] = 0 \quad (17.10)$$

さらに、式(17.1)の z_1 と式(17.4)の z_2 を式(17.10)に代入すると、

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}) &= E\{k_1(x + v_1) + k_2(x + v_2) - x\} \\ &= E\{(k_1 + k_2 - 1)x + k_1 v_1 + k_2 v_2\} \end{aligned} \quad (17.11)$$

$$= (k_1 + k_2 - 1)E(x) + k_1 E(v_1) + k_2 E(v_2) = 0 \quad (17.12)$$

式(17.12)の右辺における各項の性質をよく考えてみると、 x は流量の“真値”で、ただ 1 つしか存在

しないので確定値であり、 $E(x) = x$ である。また、式(17.2)と式(17.5)から、 $E(v_1) = E(v_2) = 0$ となる。したがって、式(17.12)が必ずゼロになるためには、次式が成立しなければならない。

$$k_1 + k_2 - 1 = 0 \quad \text{あるいは} \quad k_1 = 1 - k_2 \quad (17.13)$$

式(17.13)の関係式を式(17.11)に代入すると、誤差項 \tilde{x} は次式で与えられる。

$$\tilde{x} = (1 - k_2)v_1 + k_2v_2 \quad (17.14)$$

分散定義式から、 \tilde{x} の分散を計算すると、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(\tilde{x})^2] = E\left\{\left[(1 - k_2)v_1 + k_2v_2\right]^2\right\} \\ &= E\left\{(1 - k_2)^2 v_1^2 + 2(1 - k_2)k_2 v_1 v_2 + k_2^2 v_2^2\right\} \\ &= (1 - k_2)^2 E(v_1^2) + 2(1 - k_2)k_2 E(v_1 v_2) + k_2^2 E(v_2^2) \end{aligned} \quad (17.15)$$

式(17.15)の右辺において、式(17.3)と式(17.6)から、 $E(v_1^2) = \sigma_1^2$ と $E(v_2^2) = \sigma_2^2$ が成立する。 $E(v_1 v_2)$ は式(17.1)のモデル化による誤差 v_1 と式(17.4)の観測誤差 v_2 の共分散である。 v_1 と v_2 が互いに独立であると仮定すれば、 $E(v_1 v_2) = 0$ となる。この独立な条件を考慮すると、式(17.15)は次のようになる。

$$\sigma^2 = E[(\tilde{x})^2] = (1 - k_2)^2 \sigma_1^2 + k_2^2 \sigma_2^2 \quad (17.16)$$

式(17.8)にもどって、 \tilde{x} は流量の“真値” x とその推定値 \hat{x} の差になっており、式(17.16)の σ^2 は推定値の誤差分散を意味する。前述したように、誤差分散は \hat{x} の推定精度に関連する。すなわち、われわれの最大の関心事は流量の推定値 \hat{x} の精度をあげることにある。したがって、精度向上には式(17.16)の分散をできるだけ小さくしてやればよい。先に、式(17.7)の重み係数 k_1 と k_2 (式(17.13)より $k_1 = 1 - k_2$ が成立する)を決定しなければならないと述べた。この k_2 の決定に、式(17.16)の分散を最小にすることを考えればよいことになる。すなわち、次式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial k_2} = -2(1 - k_2)\sigma_1^2 + 2k_2\sigma_2^2 = 0 \quad (17.17)$$

式(17.17)を k_2 について解くと、

$$k_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}} \quad (17.18)$$

式(17.18)を式(17.13)に代入して k_1 を求めると、次式が得られる。

$$k_1 = 1 - k_2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \quad (17.19)$$

式(17.18)を式(17.16)に代入して、流量推定値 \hat{x} の誤差分散を計算すると次式が得られる。

$$\sigma^2 = E[(\hat{x})^2] = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} \quad (17.20)$$

式(17.20)は非常に重要な性質をもっている。それらを要約して、以下に示す。

- (a) σ^2 は流量推定値 \hat{x} の精度(分散)である。したがって、 \hat{x} が計算されたとしても、 σ^2 があまりに大きすぎると、推定値 \hat{x} の信頼度は非常に低いことになる。実際問題を想定すれば、推定値 \hat{x} は信頼おけない値ということになる。
- (b) 流量推定精度 σ^2 は、モデル誤差分散 σ_1^2 と観測誤差分散 σ_2^2 の大きさに依存する。 σ_1^2 と σ_2^2 とともに大きくなると σ^2 も大きくなる。すなわち、流量推定精度は低下してくる。反対に、モデル誤差と観測誤差がともに小さい(σ_1^2 と σ_2^2 が小さい)ときには σ^2 も小さくなり、推定精度があがる。
- (c) (b)の事実を念頭におくと、流量予測計算にあたっては、モデル誤差が小さくなるような流出モデルを選ばなければならない。また、観測誤差を小さくするためには、洪水時の流量観測をできるだけ多く行って、水位～流量曲線の精度向上に努力する必要がある。

式(17.13)から得られる $k_1 = 1 - k_2$ を式(17.7)に代入すると、流量推定値 \hat{x} は次のようにも書換えることができる。

$$\begin{aligned}\hat{x} &= (1 - k_2)z_1 + k_2 z_2 \\ &= z_1 + k_2(z_2 - z_1)\end{aligned}\quad (17.21)$$

式(17.21)もカルマン・フィルターを理解する上で重要な式である。その特徴を以下に列挙する。

- (a) 式(17.21)の右辺第1項の z_1 は、式(17.1)に示されるように、なんらかの流出モデルを用いたときの流量推定値である。したがって、降雨量がわかれば(あるいは降雨予測値でもよい)、流出計算によって推定できる量である。
- (b) 次に式(17.21)の右辺第2項の $(z_2 - z_1)$ は、式(17.4)に示されるように、 z_2 は流量観測値(もちろん、水位～流量曲線から補間して得られるが)であり、 z_1 は流出モデルによる推定値である。したがって、 $(z_2 - z_1)$ は観測値と推定値(予測値)との誤差であり、 k_2 は $(z_2 - z_1)$ の誤差に応じた重みづけ係数であると判断できる。
- (c) 実際に流量予測をしなければならぬ人の立場で、式(17.21)の意味を考えると、 z_1 と z_2 の差が小さければ、実務者は流出モデル計算による z_1 を信用して、その値を流量予測値 \hat{x} とみなすであろう。反対に、 z_1 と z_2 の差が大きければ、実務者は $(z_2 - z_1)$ の大きさに応じて重みづけを行い、 z_1 を補正して流量予測値 \hat{x} を算定しようとする意識が働くはずである。したがって、式(17.21)は人間の直観に近いことができる構造式となっている。先に、カルマン・フィルター理論が人間の経験的直観による予測に近いことを計算機で自動的に行えると述べたのは、式(17.21)の性質による。

式(17.21)の重み係数 k_2 はカルマン・フィルター理論では重要な要素であり、しばしば**カルマン利得**(カルマン・ゲイン)と呼ばれている。このカルマン・ゲイン k_2 がどのような性質をもっているかを式(17.18)から調べると以下のようになる。

- (a) σ_2^2 / σ_1^2 が大きくなる(すなわち、観測誤差が大きく、モデル誤差が小さい)とき、 k_2 は小さくなる。したがって、式(17.21)の右辺第2項の $k_2(z_2 - z_1)$ の影響は非常に小さくなり、流量予測値 \hat{x} はほとんど第1項のモデルによる推定値 z_1 で決まってしまうことになる。
- (b) σ_2^2 / σ_1^2 が小さくなる(すなわち、観測誤差が小さくて、モデル誤差が大きい)とき、 k_2 は大きくなる。したがって、式(17.21)の右辺第2項の $k_2(z_2 - z_1)$ は第1項の z_1 と同じくらい重要な影響をもつことになり、流量予測値 \hat{x} に及ぼす補正効果が大きくなる。

以上、カルマン・ゲインの性質は人間が経験的直観に頼って予測値を補正する方法によく一致しているといえる。

2.3 カルマン・フィルター理論の基礎式

式(17.1)のシステム方程式が非線形の場合、カルマン・フィルター理論を直接適用することは困難である。その理由は、本来、カルマン・フィルター理論は線形システム方程式に基づいて誘導されているからである。近年、非線形フィルター理論もいくつか開発されているが、計算手法が複雑となるので実務者には推奨できない。むしろ、非線形微分方程式を一度線形微分方程式に近似化したのち、カルマン・フィルター理論を適用した方がプログラム化も容易で、実際上得策である。

これまでのゼミで何度も述べてきたように、非線形微分方程式は線形近似化され、次式で表わされる線形差分方程式に変換できる。

$$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}D_{k-1} \quad (17.22)$$

以後、理論展開を容易にするため、状態変量を1個として議論を進める。式(17.22)を式(17.1)に示すカルマン・フィルター理論のシステム方程式の形式で表わすと、以下のようになる。

$$x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}D_{k-1} + w_{k-1} \quad (17.23)$$

この w_k をカルマン・フィルター理論ではシステム誤差(モデリング誤差)と呼んでいる。また、式(17.2)及び式(17.3)は次式で表わされる。

$$E(w_k) = 0 \quad (17.24)$$

$$E(w_k^2) = Q_k \quad (17.25)$$

実際問題として、 w_k の分散である Q_k の値をどの程度に見積るかという疑問が起きる。 Q_k が状態変量の最良推定値に比例すると仮定する「乗算的ノイズ(乗算的誤差)」の考え方も提案されている。この概念は、実運用への応用が比較的容易であり、非常に有効な手段となる。この方法論に関しては後述する。

次に、式(17.4)の観測方程式はカルマン・フィルター理論において、通常次の形式で表現されることが多い。

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (17.26)$$

v_k をカルマン・フィルター理論では観測誤差と呼んでいる。式(17.5)及び式(17.6)は次式で表わされる。

$$E(v_k) = 0 \quad (17.27)$$

$$E(v_k^2) = R_k \quad (17.28)$$

ここで、 R_k は観測誤差 v_k の分散を意味する。 R_k についても、後述する「乗算的ノイズ」の概念を導入する。

式(17.25)の H_k は状態変量を何個とるかによって異なる。もちろん、式(17.4)では $H_k = 1$ である。たとえば、パラメータ f_c を状態変量に加えた場合、観測方程式はどうなるであろうか。流量を状態変量として選定した場合、流量は水位～流量曲線を介して水位から推定可能であり、観測値としてみなすことができるが、パラメータ f_c は観測できない。したがって、式(17.26)を書き換えると次のようになる。

$$z_k = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_k \\ f_c \end{bmatrix} + v_k \quad (17.29)$$

すなわち、 $H_k = [1 \quad 0]$ となる。式(17.29)の結果の意味するところは、カルマン・フィルター理論ではすべての状態変量が観測される量である必要はなく、少なくとも 1 つあればよいということにある。

$(k-1)$ 時刻までの情報量に基づいて、 k 時刻の状態変量 x_k を推定するには式(17.22)が用いられ、この推定値を便宜上、 \hat{x}_k とする（ $\hat{\cdot}$ は以後推定値を表わすものとする）。 k 時刻では新しい観測値 z_k が得られるから、 z_k と \hat{x}_k の差の度合に応じて、状態変量 x_k が修正される。

式(17.23)の両辺において期待値をとると、次式が得られる。

$$\hat{x}_k = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1} D_{k-1} \quad (17.30)$$

ここで、 \hat{x}_k は最良推定値を意味する。式(17.30)はカルマン・フィルター理論では**状態変量の伝達(補間)方程式**と呼ばれている。これが任意の予測時間における流量や水位を予測する基本式となる。

式(17.23)を式(17.30)から引くと、次式が得られる。

$$\{\hat{x}_k - x_k\} = \Phi_{k-1} \{\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}\} - w_{k-1} \quad (17.31)$$

あるいは、

$$\tilde{x}_k = \Phi_{k-1} \tilde{x}_{k-1} - w_{k-1} \quad (17.32)$$

ここで、

$$\begin{cases} \tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k \\ \tilde{x}_{k-1} = \hat{x}_{k-1} - x_{k-1} \end{cases} \quad (17.33)$$

\tilde{x}_k は状態変量の“真値”、 x_k とその推定値 \hat{x}_k の差、すなわち誤差（ \sim は以後誤差を表わすものとする）になっているので、**状態変量推定誤差**と呼ぶ。なお、 \tilde{x}_k と \tilde{x}_{k-1} の平均値はゼロである。すなわち、次式が成立する。

$$E\{\tilde{x}_k\} = E\{\tilde{x}_{k-1}\} = 0 \quad (17.34)$$

式(17.30)による予測値の精度を知る手段としては、推定誤差の分散を式(17.32)から計算すればよい。すなわち、

$$\begin{aligned} P_k &= E\left\{\tilde{x}_k^2\right\} = E\left\{\left(\Phi_{k-1}\tilde{x}_{k-1} - w_{k-1}\right)^2\right\} \\ &= \Phi_{k-1}^2 E\left\{\tilde{x}_{k-1}^2\right\} - 2\Phi_{k-1} E\left\{\tilde{x}_{k-1} w_{k-1}\right\} + E(w_{k-1}^2) \end{aligned} \quad (17.35)$$

推定誤差 \tilde{x}_{k-1} とシステム誤差 w_{k-1} の共分散、 $E\{\tilde{x}_{k-1} w_{k-1}\}$ をゼロとし、式(17.24)及び式(17.25)を式(17.35)に代入すると、次式が得られる。

$$P_k = \Phi_{k-1}^2 P_{k-1} + Q_{k-1} \quad \text{注1)} \quad (17.36)$$

ここで、 P_k は k 時点で新しい観測値が入手される直前の \hat{x}_k の誤差分散を意味する。式(17.36)はカルマン・フィルター理論では誤差共分散の伝達(補間)方程式と呼ばれている。すなわち、式(17.36)は式(17.30)による予測流量や予測水位の推定誤差分散を計算する基本式である。

実時間洪水予測問題では、($k-1$) 時刻までの情報を知って、1時間先、2時間先、3時間先の流量(あるいは水位)予測が必要となる。このため、ここでは x_{k-1} と r_{k-1} をそれぞれ、($k-1$) 時刻での流量および降雨量にみたてることにする。まず、3時間先までの流量予測値は式(17.30)の漸化式を用いて計算される。このとき、 D_{k-1} には降雨量 r_{k-1} が含まれているので、なんらかの方法によって r_k と r_{k+1} の雨量予測値が必要となる。一方、3時間先までの予測値の誤差分散も式(17.36)の漸化式を用いて同時に計算される。今、各予測時点 k での流量推定値の分布が平均値 \hat{x}_k 、分散 P_k をもつ正規分布と仮定すると、90%の信頼区間は次式で与えられる。

$$\hat{x}_k \pm 1.645\sqrt{P_k} \quad (17.37)$$

k 時刻で新しい観測値 z_k が得られたとき、式(17.7)で述べたように、更新値 $\hat{x}_k(+)$ は $\hat{x}_k(-)$ と z_k の重みつき和で求められる。

$$\hat{x}_k(+) = K'_k \hat{x}_k(-) + K_k z_k \quad (17.38)$$

ここで、(−)と(+)はそれぞれ、新しい観測値情報が得られる直前と直後の変量を意味する。 K'_k と K_k は重み係数(ベクトル)であるが、これを決定する必要がある。式(17.12)に示したように、式(17.26)の観測方程式と式(17.33)の状態変量誤差を式(17.38)に代入すると、次式が得られる。

注1) n 個の状態変量がある場合、式(17.36)は次のように行列表示される。

$$P_k = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}$$

ここで、 $P_k, P_{k-1}, \Phi_{k-1}, Q_{k-1}$ ともに $(n \times n)$ 行列になり、 T は行列の転置を意味する。たとえば、 $n=2$ の場合、 P は 2 つの状態変量推定誤差の分散・共分散行列になる。

$$P = E\left(\tilde{x}\tilde{x}^T\right) = E\left[\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^T & \tilde{x}_2^T \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} E\left(\tilde{x}_1\tilde{x}_1^T\right) & E\left(\tilde{x}_1\tilde{x}_2^T\right) \\ E\left(\tilde{x}_2\tilde{x}_1^T\right) & E\left(\tilde{x}_2\tilde{x}_2^T\right) \end{bmatrix}$$

すなわち、 P 行列の対角要素が分散となり、非対角要素が共分散となる。

$$\tilde{x}_k(+) = [K'_k + K_k H_k - 1] x_k + K'_k \tilde{x}_k(-) + K_k v_k \quad (17.39)$$

式(17.13)と同様に、誤差の平均値はすべてゼロでなければならないから、次式が成立する。

$$K'_k + K_k H_k - 1 = 0 \quad \text{あるいは} \quad K'_k = 1 - K_k H_k \quad (17.40)$$

上式を式(17.38)に代入すると、次式が得られる。

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)] \quad (17.41)$$

式(17.41)はカルマン・フィルター理論では**状態変量の更新方程式**といわれ、 K_k がカルマン・ゲインと呼ばれているものである。式(17.14)と同様に、式(17.40)を式(17.39)に代入すると、次式が得られる。

$$\tilde{x}_k(+) = (1 - K_k H_k) \tilde{x}_k(-) + K_k v_k \quad (17.42)$$

したがって、更新した後の推定値誤差分散は次式で計算できる。

$$\begin{aligned} P_k(+) &= E\{\tilde{x}_k^2(+)\} = E\{(1 - K_k H_k) \tilde{x}_k(-) + K_k v_k\}^2 \\ &= (1 - K_k H_k)^2 P_k(-) + K_k^2 R_k \end{aligned} \quad (17.43)$$

最後にカルマン・ゲイン K_k は更新される誤差分散 $P_k(+)$ を最小にするように決定される。すなわち、

$$\frac{\partial P_k(+)}{\partial K_k} = -2(1 - K_k H_k) P_k(-) H_k + 2K_k R_k = 0 \quad (17.44)$$

したがって、 K_k は次式で算定される。

$$K_k = P_k(-) H_k [H_k^2 P_k(-) + R_k]^{-1} \quad \text{注2)} \quad (17.45)$$

式(17.45)を式(17.43)に代入すると次式が得られる。

$$P_k(+) = (1 - K_k H_k) P_k(-) \quad (17.46)$$

式(17.46)はカルマン・フィルター理論では、**推定誤差分散の更新方程式**と呼ばれている。

カルマン・ゲイン K_k の物理的意義を調べるために、式(17.46)を式(17.44)に代入して整理すると、 K_k は次のようにも表現できる。

$$K_k = P_k(+) H_k R_k^{-1} \quad (17.47)$$

^{注2)} n 個の状態変量がある場合、式(17.45)及び式(17.46)は次のように行列表示される。

$$K_k = P_k(-) H_k^T [H_k P_k(-) H_k^T + R_k]^{-1}$$

$$P_k(+) = [I - K_k H_k] P_k(-)$$

$I : (n \times n)$ の単位行列

式(17.47)によれば、観測誤差分散 R_k が増大するにつれて K_k は減少するため、式(17.41)の状態変量の更新方程式から、推定値 $\hat{x}_k(+)$ の値は更新前の値 $\hat{x}_k(-)$ とほぼ同値になってしまふ。したがって、カルマン・ゲイン K_k の $\hat{x}_k(+)$ に及ぼす寄与度を大きくするためには、観測誤差分散をできるだけ小さくすることが望ましい。そのためには、洪水時の流量観測ができるだけ多く行って、水位～流量曲線の精度向上に努める必要がある。

状態変量が n 個の場合のカルマン・フィルター理論公式をまとめて表-1 に示す。

表-1 n 次元カルマン・フィルター理論

| 定義 | 公式 | 式番号 |
|---------------------|--|------|
| システム方程式 | $x_k = \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}D_{k-1} + w_{k-1}$ | (1) |
| 観測方程式 | $z_k = H_k x_k + v_k$ | (2) |
| システム誤差 | $E(w_k) = 0, E(w_k w_k^T) = Q_k$ | (3) |
| 観測誤差 | $E(v_k) = 0, E(v_k^2) = R_k$ | (4) |
| 初期条件 | \hat{x}_0, P_0 | (5) |
| 状態変量の伝達方程式 | $\hat{x}_k = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1}D_{k-1}$ | (6) |
| 状態変量の推定誤差分散共分散伝達方程式 | $P_k = \Phi_{k-1}P_{k-1}\Phi_{k-1}^T$ | (7) |
| 更新前の状態変量推定値 | $\hat{x}_k(-) = \hat{x}_k$ | (8) |
| 更新前の推定誤差共分散 | $P_k(-) = P_k + Q_k$ | (9) |
| カルマン・ゲイン | $K_k = P_k(-)H_k^T [H_k P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1}$ | (10) |
| 状態変量の更新方程式 | $\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)]$ | (11) |
| 状態変量の推定誤差共分散更新方程式 | $P_k(+) = [I - K_k H_k] P_k(-)$ | (12) |

- x_k : $(n \times 1)$ の状態変量ベクトル v_k : 観測誤差
 Φ_k : $(n \times n)$ の遷移行列 Q_k : $(n \times n)$ のシステム誤差分散・共分散行列
 Γ_k : $(n \times n)$ の係数行列 R_k : 観測誤差分散
 D_k : $(n \times 1)$ の確定変数(強制関数)ベクトル P_k : $(n \times n)$ の推定誤差分散・共分散行列
 w_k : $(n \times 1)$ のシステム誤差ベクトル K_k : $(n \times 1)$ のカルマン・ゲインベクトル
 z_k : (1×1) の観測値(状態変量のうちの1個) I : $(n \times n)$ の単位行列
 H_k : $(1 \times n)$ の係数ベクトル T : 上添字は行列の転置
 \hat{x}_k : 状態変量最良推定値
 $\hat{x}_k(-)$: k 時刻で新しい観測値が入手される直前の状態変量推定値
 $\hat{x}_k(+)$: k 時刻で新しい観測値が入手される直後の状態変量更新値
 $P_k(-)$: 推定値 $\hat{x}_k(-)$ の誤差分散・共分散行列
 $P_k(+)$: 更新値 $\hat{x}_k(+)$ の誤差分散・共分散行列

3. 貯留関数法へのカルマン・フィルター予測理論の適用

3.1 有効雨量を用いた貯留関数法(一般化貯留関数モデル)

このモデルに関しては、「第7回ゼミ」の「5.3 二価の非線形貯留関数法におけるモデル定数 f_c の最適化計算」を参照されたい。一般化貯留関数モデルの基本式を以下に再記する。

$$s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad , \quad \frac{ds}{dt} = fr - q = r_e - q \quad (17.48)$$

$$\begin{cases} k_{11} = \lambda_1 f_c \\ k_{12} = \lambda_1^2 \lambda_2 f_c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2.8235 A^{0.24} \\ \lambda_2 = 0.2835 (\bar{r}_e)^{-0.2648} \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ f_c = (n / \sqrt{i})^{0.6} \end{cases} \quad (17.49)$$

ここに、 s :貯留高(mm), f :流出率, r_e :有効雨量($=fr$)(mm/h), q :直接流出高(mm/h), k_{11} , k_{12} :貯留係数, p_1 , p_2 :貯留指数, A :流域面積(km^2), \bar{r}_e :平均有効雨量強度(mm/h), n :等価粗度, i :斜面勾配, f_c :流域平均粗度(フリクション・ファクター)

式(17.49)中に含まれる f_c の値は、一般的には、流域平均粗度に相当しており、未知定数である。しかしながら、解析対象地点で数個の洪水資料が得られる場合には、実測流量と計算流量の誤差2乗和が最小となるように、 f_c の値を一次元探索によって同定し、その平均値を洪水予測システムに組み込むことが可能である。ちなみに、ピーク比流量 $0.5\text{m}^3/\text{s}/\text{km}^2$ 以上の洪水例 169 ケースにつき f_c を最適同定した結果、その平均値は 1.56、分散 0.43 の値を得ている。

式(17.49)に示されるモデル定数 k_{12} には平均有効雨量強度 \bar{r}_e が含まれている。 \bar{r}_e の値は本来、洪水終了後に決定される性質のものであり、洪水期間中には推定不可能である。しかしながら、テレメータ等の活用により、雨量情報は1時間毎に入手可能であることから、 \bar{r}_e には現時刻までの累加雨量の平均値を用いる。すなわち、

$$\bar{r}_e = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} r_i}{N_t} \quad (17.50)$$

ここで、 N_t :ゼロ雨量を含まない現時刻までの雨量系列 r_i の標本数

したがって、本洪水予測システムにおいても、定数 k_{12} を式(17.50)により 1 時間毎に更新する。また、洪水生起時に流出率 f を正確に算定することは困難であることから、流出率の初期値を既往洪水の解析結果から最大値近傍に設定しておくとよい。

3.2 システム方程式の定式化

本報告で採用する式(17.48)一般化貯留関数法を解くために、次の変数を「状態変量」に選定する。

$$\begin{cases} x_1 = q^{p_2} \\ x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (17.51)$$

カルマン・フィルター理論の特徴の1つとして、すべての「状態変量」が観測されなくてもよいこと

が挙げられる。モデル定数 f と f_c は観測不可能であるが、カルマン・フィルター理論における状態変量の更新方程式を介して、モデル定数のオンライン同定も可能である。また、予測雨量の誤差は予測時間に対応して大きく変化し、予測水位の誤差にも影響を及ぼす。したがって、 f と f_c および予測雨量 r も「状態変量」に加えてシステム方程式の拡大を図り、推定値及びその誤差分散を伝達・更新する手法を導入する。

すなわち、状態変量をベクトル表示すると、以下のように定義される。

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f \\ f_c \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (17.52)$$

ここで、

$$X_1 = [x_1 \ x_2]^T, \quad X_2 = [f \ f_c]^T, \quad X_3 = r \quad (17.53)$$

3.3 状態変量の伝達方程式

洪水予測では、 ℓ 時間先の流量と水位をいかに精度よく予測するかが最重要課題である。この問題は、カルマン・フィルター理論においては、状態変量の伝達方程式に対応しているので、「状態変量の伝達方程式」について定式化を行う。

$\hat{x}_k = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1} D_{k-1}$

表-1における式(6) 状態変量の伝達方程式を参照

まず、式(17.48)を式(17.51)の状態変量で表すと次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, f, f_c, r) = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, f, f_c, r) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{1}{k_2} x_1^{1/p_2} + \frac{fr}{k_{12}} \end{cases} \quad (17.54)$$

なお、 x_1 と x_2 の初期条件は以下のように設定する。

$$x_1(0) = q_0^{p_2}, \quad x_2(0) = 0 \quad (q_0 : \text{初期流出高}) \quad (17.55)$$

一般的に、カルマン・フィルター理論を用いてモデル定数のオンライン同定を行う際、モデル定数は時間的に変動しないものとして、次式を仮定する。

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{df_c}{dt} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0 \quad (17.56)$$

したがって、状態変量に関する微分方程式は式(17.54)と式(17.56)を組み合わせると、拡大システム方

程式の基礎式は式(17.57)で表現される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f \\ f_c \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{fr}{k_{12}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.57)$$

上式を行列表示すると、

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (17.58)$$

ここで、

$$F(X) = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5]^T \quad (17.59)$$

カルマン・フィルター理論は、元来線形システムの状態変量推定として導かれているために、式(17.57)を線形化して、拡張カルマン・フィルター(Extended Kalman Filter)を適用する。

そこで、式(17.58)の $F(x)$ をあらかじめ既知な $X = X^*$ において、1次の項までテーラー級数展開すると、次の線形近似式が得られる。

$$\frac{dX}{dt} = A(X^*)X + D(X^*) \quad (17.60)$$

ここで、

$$A(X^*) = \begin{bmatrix} A_1 & | & A_2 & | & A_3 \\ \hline 0_{21} & | & 0_{22} & | & 0_{23} \\ \hline 0_{31} & | & 0_{32} & | & 0_{33} \end{bmatrix} \quad (17.61)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{25} \end{bmatrix} \quad (17.62)$$

$$0_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.63)$$

$$0_{31} = [0 \ 0], \quad 0_{32} = [0 \ 0], \quad 0_{33} = [0] \quad (17.64)$$

式(17.62)の行列 A_1 と A_2 および A_3 の要素は次式で計算される。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left(x_1^* \right)^{p_1/p_2-2} \left(x_2^* \right) - \frac{1}{k_{12}} \frac{1}{p_2} \left(x_1^* \right)^{1/p_2-1} \\ a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(x_1^* \right)^{p_1/p_2-1} \\ a_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial f} = \frac{r}{k_{12}} \\ a_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial f_c} = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial f_c} + \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial f_c} \\ = \frac{1}{f_c} \left[\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(x_1^* \right)^{p_1/p_2-1} \left(x_2^* \right) + \frac{2}{k_{12}} \left(x_1^* \right)^{1/p_2} - \frac{2fr}{k_{12}} \right] \\ a_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial r} = \frac{f}{k_{12}} \end{array} \right. \quad (17.65)$$

また、式(17.60)のベクトル $D(X^*)$ は次式で与えられる。

$$D(X^*) = F(X^*) - A(X^*)X^* \\ = \begin{bmatrix} x_2^* \\ f_2^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ f \\ f_c \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.66)$$

$$d_2 = f_2(x_1^*, x_2^*, f, f_c, r) - a_{21}x_1^* - a_{22}x_2^* - a_{23}f - a_{24}f_c - a_{25}r \\ = \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 2 \right) \left(x_1^* \right)^{p_1/p_2-1} \left(x_2^* \right) + \frac{1}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 3 \right) \left(x_1^* \right)^{1/p_2} + \frac{fr}{k_{12}} \quad (17.67)$$

なお、 X^* の決定には次の手段を用いればよい。すなわち、任意の時刻、 $(k+1)$ 時点での X の値、 X_{k+1} を計算しようとすれば、 k 時点での X_k の値はすでに既知であるから、実用上、 $X^* = X_k$ としてよからう。

式(17.60)は線形常微分方程式であり、 $A(X^*)$ と $D(X^*)$ が定係数行列の場合、 k を任意のタイム・ステップとして、次の差分方程式に変換できる。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (17.68)$$

式(17.68)を行列表示すると、次式が得られる。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_{k+1} = \left[\begin{array}{c|c|c} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (17.69)$$

ここで、 I ：単位行列

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}_k \quad (17.70)$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17.71)$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17.72)$$

上式における Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 および Γ_1 の要素を以下に示す。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + a_{21}T\beta_1 \\ \phi_{12} = T\beta_2 \\ \phi_{21} = a_{21}\phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_{22}T + \frac{1}{2}a_1T^2 + \frac{1}{6}a_2T^3 + \frac{1}{24}(a_{21}a_1 + a_{22}a_2)T^4 \end{cases} \quad (17.73)$$

$$\phi_{13} = a_{23}T\beta_1, \quad \phi_{14} = a_{24}T\beta_1, \quad \phi_{23} = a_{23}T\beta_2, \quad \phi_{24} = a_{24}T\beta_2 \quad (17.74)$$

$$\phi_{15} = a_{25}T\beta_1, \quad \phi_{25} = a_{25}T\beta_2 \quad (17.75)$$

$$\gamma_{12} = T\beta_1, \quad \gamma_{22} = \phi_{12} \quad (17.76)$$

ここで、 T ：計算時間間隔

$$a_1 = a_{21} + a_{22}^2, \quad a_2 = 2a_{21}a_{22} + a_{22}^3 \quad (17.77)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{6}a_{22}T^2 + \frac{1}{24}a_1T^3, \quad \beta_2 = 1 + \frac{1}{2}a_{22}T + \frac{1}{6}a_1T^2 + \frac{1}{24}a_2T^3 \quad (17.78)$$

また、式(17.68)を行列要素で表すと次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f \\ \frac{f_c}{r} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24} & \phi_{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f \\ \frac{f_c}{r} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (17.79)$$

式(17.79)の行列を展開すると、「状態変量の伝達方程式」は式(17.80)で記述される。

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = \phi_{11}x_{1,k} + \phi_{12}x_{2,k} + \phi_{13}f_k + \phi_{14}f_{c,k} + \phi_{15}r_k + \gamma_{12}d_{2,k} \\ x_{2,k+1} = \phi_{21}x_{1,k} + \phi_{22}x_{2,k} + \phi_{23}f_k + \phi_{24}f_{c,k} + \phi_{25}r_k + \gamma_{22}d_{2,k} \end{cases} \quad (17.80)$$

$$\begin{cases} f_{k+1} = f_k \\ f_{c,k+1} = f_{c,k} \\ r_{k+1} = r_k \end{cases} \quad (17.81)$$

すなわち、式(17.80)は基本式である式(17.54)の漸化式であり、モデルパラメータ f 、 f_c 及び r を状態変量に加えたときの状態変量 $x_1 = q^{p_2}$ 、 $x_2 = (d(q^{p_2})/dt)$ の伝達方程式となる。式(17.80)の右辺に含まれる d_2 に予測雨量を入れることで、状態変量 $x_{1,k+1}$ と $x_{2,k+1}$ の予測値を求めることができる。また、モデルパラメータは式(17.81)により、テレメータなどからの新しい観測値(たとえば、水位ないし流量)が入手されるまでは、時間的に変化していないことを意味している。

流出高は式(17.51)の逆変換により、次式で表現される。

$$q_k = x_{1,k}^{1/p_2} \quad (17.82)$$

ここで、 q_k ：流出高(mm/h)、 $x_{1,k}$ ：式(17.80)から計算される状態変量、 $p_2=0.4648$ (固定値)

したがって、流量と流出高の関係式から、状態変量 $x_{1,k}$ を用いたときの流量予測式が次式によって与えられることになる。

$$Q_k = \frac{A}{3.6}q_k = \frac{A}{3.6}(x_{1,k}^{1/p_2}) \quad (17.83)$$

ここで、 Q_k ：離散時刻 k における流量予測値、 $x_{1,k}$ ：時刻 k における状態変量 x_1 の値

次に、水位を予測する場合、状態変量 $x_{1,k}$ の予測値と水位予測値 H_k との関係を示す。一般に、流量観測資料に基づいて、次の水位～流量曲線 ($H \sim Q$ 関係式) が予め設定されている。

$$Q_k = a(H_k + b)^2 \quad (17.84)$$

式(17.84)を水位に関して表現すると、以下のようになる。

$$H_k = -b + \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{Q_k} \quad (17.85)$$

すなわち、

$$b_0 = -b, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (17.86)$$

$$H_k = b_0 + b_1\sqrt{Q_k} \quad (17.87)$$

式(17.83)を式(17.87)に代入すれば、状態変量 $x_{1,k}$ を用いたときの水位予測式が得られる。

$$H_k = b_0 + b_1 \sqrt{\frac{A}{3.6} (x_{1,k})^{1/p_2}} \quad (17.88)$$

ここで、 H_k ：離散時刻 k における水位予測値、 $x_{1,k}$ ：時刻 k における状態変量 x_1 の値

3.4 状態変量の推定誤差分散・共分散伝達方程式の定式化

カルマン・フィルター理論における状態変量の推定誤差分散・共分散伝達方程式は、洪水予測においては ℓ 時間先の流量及び水位の予測誤差(分散)を算定することに対応している。すなわち、予測値の精度を評価する意味でも「推定誤差分散・共分散伝達方程式」の定式化は重要となる。

$P_k = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}^T$ 表-1 における式(7) 推定誤差分散・共分散伝達方程式を参照

そこで、まず次式を定義する。

$$\tilde{X}_k = X_k - \hat{X}_k \quad (17.89)$$

\tilde{X}_k は、状態変量の真値 X_k と最良推定値 \hat{X}_k の差、すなわち誤差(～は以後誤差を表わすものとする)になっているので、状態変量推定誤差と呼ぶ。

また、 \tilde{X}_k は式(17.68)の $\Gamma_k D_k$ を確定変量とすると、次式で表される。

$$\tilde{X}_{k+1} = \Phi_k \tilde{X}_k \quad (17.90)$$

この \tilde{X}_k の分散・共分散(P_k)を計算すると、 P_k は式(17.91)で表される。

$$\begin{aligned} P_k &= E[\tilde{X}_k \tilde{X}_k^T] = E\left\{\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_1^T & \tilde{X}_2^T & \tilde{X}_3^T \end{bmatrix}_k\right\} \\ &= \begin{bmatrix} E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2^T)_k & E(\tilde{X}_1 \tilde{X}_3^T)_k \\ E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_2^T)_k & E(\tilde{X}_2 \tilde{X}_3^T)_k \\ E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_1^T)_k & E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_2^T)_k & E(\tilde{X}_3 \tilde{X}_3^T)_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} & P_{3,k} \\ P_{2,k}^T & U_{1,k} & 0 \\ P_{3,k}^T & 0 & U_{2,k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17.91)$$

ここで、 $P_{1,k}$: X_1 に関する (2×2) の分散・共分散行列、 $P_{2,k}$: X_1 と X_2 に関する (2×2) の共分散行列、 $P_{3,k}$: X_1 と X_3 に関する (2×1) の共分散行列、 $U_{1,k}$: X_2 に関する (2×2) の分散・共分散行列、 $U_{2,k}$: X_3 に関する (1×1) の分散

式(17.90)を式(17.91)に代入すると、 \tilde{X}_{k+1} の分散・共分散行列 P_{k+1} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= E \left[\tilde{X}_{k+1} \tilde{X}_{k+1}^T \right] \\
&= \Phi_k P_k \Phi_k^T \\
&= \begin{bmatrix} \Phi_1 & | & \Phi_2 & | & \Phi_3 \\ \hline 0 & | & I & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 & | & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,k} & | & P_{2,k} & | & P_{3,k} \\ \hline P_{2,k}^T & + & U_{1,k} & + & 0 \\ \hline P_{3,k}^T & + & 0 & + & U_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & | & 0 & | & 0 \\ \hline \Phi_2^T & + & I & + & 0 \\ \hline \Phi_3^T & + & 0 & + & I \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{17.92}$$

また、 $P_{1,k}$ の行列を要素展開すると、式(17.93)で与えられることが分かる。

$$P_{1,k} = \begin{bmatrix} Var(x_{1,k}) & Cov(x_{1,k}, x_{2,k}) \\ Cov(x_{2,k}, x_{1,k}) & Var(x_{2,k}) \end{bmatrix} \tag{17.93}$$

ここで、 $Var(x_{1,k})$: $x_{1,k}$ の分散、 $Cov(x_{1,k}, x_{2,k})$: $x_{1,k}$ と $x_{2,k}$ の共分散

流量を予測する場合、式(17.83)により計算される流量予測値の精度(分散)は、次式で求められる。

$$Var(Q_k) = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial x_{1,k}} \right)^2 Var(x_{1,k}) = \left(\frac{A}{3.6} \right)^2 \left(\frac{1}{p_2} x_{1,k}^{1/p_2 - 1} \right)^2 Var(x_{1,k}) \tag{17.94}$$

すなわち、 $Var(x_{1,k})$ は式(17.93)から求められる。

また、水位を予測する場合、式(17.87)により計算される水位予測値の精度(分散)は、次式で求められる。

$$Var(H_k) = \left(\frac{\partial H_k}{\partial Q_k} \right)^2 Var(Q_k) = \frac{b_1^2}{4} Q_k^{-1} Var(Q_k) \tag{17.95}$$

すなわち、上式に含まれる Q_k の値には式(17.83)を、また、 $Var(Q_k)$ には式(17.94)を用いればよい。

要約すると、 ℓ 時間先の予測流量(Q_ℓ)および予測水位(H_ℓ)の推定誤差分散は、式(17.94)と式(17.95)を順次適用していくべきだ。

式(17.37)にあるように、各予測時点 ℓ における流量ないし水位の予測値が、平均値 \hat{y}_ℓ と分散 $Var(\hat{y}_\ell)$ をもつ正規分布に従うと仮定すれば、その 90% 信頼区間は次式で計算される。

$$\hat{y}_\ell \pm 1.645 \sqrt{Var(\hat{y}_\ell)} \tag{17.96}$$

式(17.92)の行列 $\Phi_k P_k \Phi_k^T$ を展開すると、小行列の分散・共分散行列は次式で整理される。

$$\begin{aligned}
P_{1,k+1} &= \Phi_1 P_{1,k} \Phi_1^T + \Phi_2 P_{2,k} \Phi_1^T + \Phi_3 P_{3,k} \Phi_1^T + \Phi_1 P_{2,k} \Phi_2^T \\
&\quad + \Phi_2 P_{1,k} \Phi_2^T + \Phi_1 P_{3,k} \Phi_3^T + \Phi_3 P_{2,k} \Phi_3^T
\end{aligned} \tag{17.97}$$

$$P_{2,k+1} = \Phi_1 P_{2,k} + \Phi_2 P_{1,k} \tag{17.98}$$

$$P_{3,k+1} = \Phi_1 P_{3,k} + \Phi_3 P_{2,k} \tag{17.99}$$

$$U_{1,k+1} = U_{1,k} \quad (17.100)$$

$$U_{2,k+1} = U_{2,k} \quad (17.101)$$

式(17.97)は統計的にも重要な意味を持つ。 $P_{1,k+1}$ は状態変量 x_1 と x_2 の推定誤差分散・共分散行列であり、モデル定数及び予測雨量の誤差分散・共分散(不確定性)、すなわち、 $U_{1,k}$ と $U_{2,k}$ が反映されていることがわかる。

$U_{1,k}$ は、 f (流出率) と f_c (流域平均粗度) の分散・共分散行列であり、これらの定数が互いに独立であると仮定すれば、以下のように表すことができる。

$$U_{1,k} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (17.102)$$

ここで、 σ_{11}^2 と σ_{22}^2 はそれぞれモデル定数 f と f_c の分散の初期値であり、 $(\alpha_3 f)^2$ と $(\alpha_3 f_c)^2$ 程度とする ($\alpha_3 = 0.1 \sim 0.2$)。この $U_{1,k}$ は、式(17.97)と式(17.98)において使用される。

予測雨量の誤差分散 $U_{2,k}$ は、「第16回ゼミ」における「3. 北海道における予測降雨の推定誤差」で示した予測値と実現値の平均二乗誤差のモデル式を使用する。以下に基本式のみを再掲する。

$$U_{2,\ell} = \text{Var}(\hat{r}_\ell) = S_\ell^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{r}_{\ell,i} - \bar{r}_\ell)^2 = a_s^2 \ell \bar{r}_\ell^{2b_s} \quad (17.103)$$

ここで、 $r_{\ell,i}$: 実現値、 \bar{r}_ℓ : 実測雨量の平均値、 N : データ数、 $\hat{r}_{\ell,i}$: 予測値、 S_ℓ^2 : 予測値と実現値の平均二乗誤差、 a_s , b_s : 誤差分散定数 (表-2 を参照)、 ℓ : リードタイム(h)

また、予測雨量を補正するための回帰式を以下に示す。

$$\bar{r}_\ell = a_m \hat{r}_\ell^{b_m} \quad (17.104)$$

ここに、 \bar{r}_ℓ : 実測雨量の平均値、 \hat{r}_ℓ : 予測値、 a_m , b_m : 表-2 より得られる補正定数

表-2 補正式定数と誤差分散算定式 (北海道全域(14水系))

| リードタイム ℓ (h) | 補正式 : $\bar{r}_\ell = a_m \hat{r}_\ell^{b_m}$ | | 誤差分散式 : $\text{Var}(\hat{r}_\ell) = a_s^2 \ell \bar{r}_\ell^{2b_s}$ | |
|----------------------|---|-------|---|-------|
| | a_m | b_m | a_s | b_s |
| 気象協会予測雨量法 | | | | |
| 1 | 0.588 | 1.099 | | |
| 2 | 0.550 | 1.156 | 1.156 | 0.54 |
| 3 | 0.549 | 1.082 | | |
| 過去3時間移動平均雨量法 | | | | |
| 1 | 1.021 | 0.851 | | |
| 2 | 1.252 | 0.686 | 1.135 | 0.88 |
| 3 | 1.394 | 0.585 | | |

このとき、予測雨量 \hat{r}_ℓ を式(17.67)と式(17.80)に代入し、 $U_{2,l}$ を式(17.97)～式(17.99)と式(17.101)で使用する。また、式(17.103)と式(17.104)の適用にあたって、予測雨量の値が 0 のときは、 \hat{r}_ℓ に 0.1mm/h を与える。

任意のリードタイムまでの水位を予測する手順を以下に示す。

- (a) 洪水予測においては、式(17.49)における平均雨量強度 \bar{r}_e は予測時間を含むため未知量である。

そこで、 ℓ 時間先の洪水予測を行う際には、 ℓ 時間先予測雨量 \bar{r}_ℓ も含めた累加雨量平均値 \bar{R}_ℓ を次式で算出して、平均雨量強度 \bar{r}_e の代用とする。すなわち、リードタイム毎に \bar{R}_ℓ を \bar{r}_e に代入して、モデル定数 k_{12} を更新する。

$$\bar{R}_\ell = \frac{1}{N_t + \ell} \left(\sum_{i=1}^{N_t} r_i + \sum_{j=1}^{\ell} \bar{r}_j \right) = \frac{N_t}{N_t + \ell} \bar{r} + \frac{1}{N_t + \ell} \sum_{j=1}^{\ell} \bar{r}_j \quad (\ell = 1, 2, 3) \quad (17.105)$$

ここで、 \bar{r}_ℓ : リードタイム ℓ の予測雨量、 \bar{r} : 現時刻までの平均雨量強度、 N_t : 現時刻までの観測雨量のデータ数

なお、計算開始段階では累加雨量平均値 \bar{R}_ℓ を算出できないので、 $\bar{R}_\ell \geq 1.0\text{mm/h}$ とする。

- (b) ℓ 時間先予測雨量 \bar{r}_ℓ を式(17.80)における r_k の項に代入し、任意のリードタイムまでの状態変量 $x_{1,l}$ を算出する。
- (c) (b) で計算された $x_{1,l}$ を用い、式(17.88)によって水位予測値を計算する。
- (d) 同時に、予測雨量の誤差分散である $U_{2,l}$ (式(17.103)を参照)を式(17.97)～式(17.99)に代入し、状態変量の推定誤差分散・共分散を求める。
- (e) (d) で計算された状態変量 $x_{1,l}$ の誤差分散 $Var(x_{1,l})$ を式(17.94)に代入し、式(17.95)を用いて水位予測値の分散を算出する。

3.5 乗算的ノイズによるシステム誤差の定式化

式(17.92)にはシステム誤差分散・共分散行列 Q_k が含まれておらず、「状態変量の推定誤差分散・共分散伝達方程式」の条件を満たすためには、実際の計算上、システム誤差分散・共分散行列 Q_k をどのように組み込んだらよいかという課題が残る。

式(17.68)はカルマン・フィルター理論における観測値間、 $t_k \leq t < t_{k+1}$ での状態変量の伝達方程式に相当しており、この間システム誤差を考慮しない。その代り、図-1 に示すように、 $t = t_{k+1}$ において瞬間にシステムノイズが付加されると考える。すなわち、この時点でシステムノイズの誤差分散・共分散 Q_{k+1} を作用させることになる。このとき、ノイズの大きさは状態変量推定値に比例すると仮定する。以上の理論展開が京大グループによって提案された「乗算的ノイズ」の導入である。今、式(17.68)の解より得られる $t = t_{k+1}$ における状態変量を $x_1(t_{k+1})$ 及び $x_2(t_{k+1})$ とする。また、図-1 の(-)、(+)の記号はそれぞれ流量観測値情報入手直前と直後を意味する。したがって、乗算的ノイズを導入することにより、次の定式化を行うことができる。

$$\begin{aligned} X_{1,k+1}(-) &= X_1(t_{k+1})(1 + W_{k+1}) \\ &= X_1(t_{k+1}) + B_{k+1}W_{k+1} \end{aligned} \quad (17.106)$$

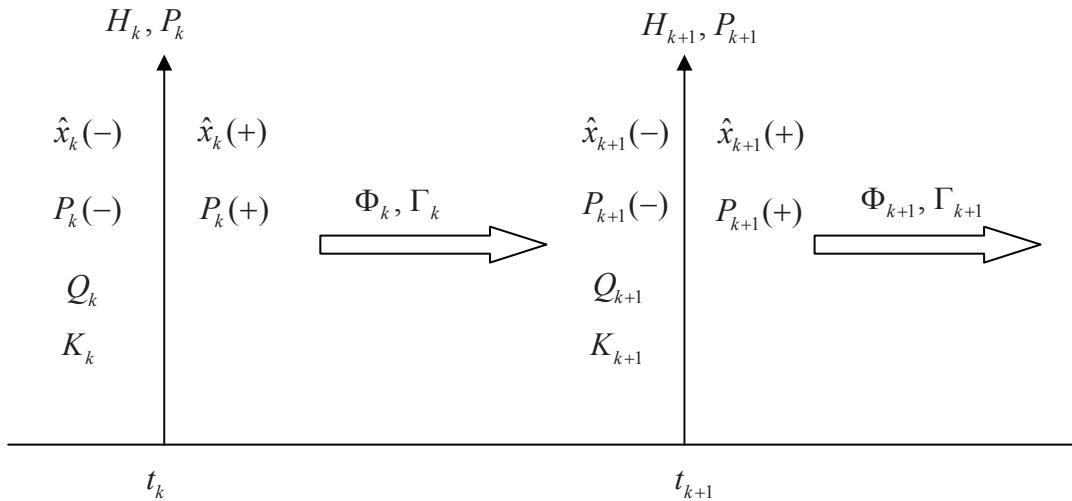


図-1 状態変量・誤差共分散行列の伝達・更新概念図

ここで、

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{1,k+1}(-) = \begin{bmatrix} x_{1,k+1}(-) \\ x_{2,k+1}(-) \end{bmatrix} \\ B_{k+1} = \begin{bmatrix} b_{1,k+1} & 0 \\ 0 & b_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t_{k+1}) & 0 \\ 0 & x_2(t_{k+1}) \end{bmatrix} \\ W_{k+1} = \begin{bmatrix} w_{1,k+1} \\ w_{2,k+1} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (17.107)$$

式(17.106)と式(17.107)にも示されるように、システム誤差は状態変量に比例している。システム誤差ベクトル W_{k+1} は次の統計的性質をもつものとする。

$$\left\{ \begin{array}{l} E(W_{k+1}) = 0 \\ E(W_{k+1}W_{k+1}^T) = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (17.108)$$

システム誤差として状態変量の $100\alpha_1\%$ ($\alpha_1 = 0.1 \sim 0.2$ が適当) の大きさを想定している。 W_{k+1} は式(17.108)の性質を有しているので、 $X_{1,k+1}(-)$ の推定値は式(17.106)から次式で与えられる。

$$\hat{X}_{1,k+1}(-) = E[X_{1,k+1}(-)] = \hat{X}_1(t_{k+1}) \quad (17.109)$$

すなわち、 $\hat{X}_{1,k+1}(-)$ は式(17.68)の伝達方程式を解いたときの $t = t_{k+1}$ における最良推定値に等しい。式(17.109)から式(17.106)を引くと、次式が得られる。

$$\{\hat{X}_{1,k+1}(-)\} - \{X_{1,k+1}(-)\} = \{\hat{X}_1(t_{k+1})\} - \{X_1(t_{k+1})\} - B_{k+1}W_{k+1} \quad (17.110)$$

すなわち、

$$\tilde{X}_{1,k+1}(-) = \tilde{X}_1(t_{k+1}) - B_{k+1}W_{k+1} \quad (17.111)$$

式(17.111)を用いることにより、推定誤差分散・共分散は次式で計算できる。

$$\begin{aligned} P_{1,k+1}(-) &= E[\tilde{X}_{1,k+1}(-)\tilde{X}_{1,k+1}^T(-)] \\ &= P_{1,k+1} + B_{k+1}E(W_{k+1}W_{k+1}^T)B_{k+1}^T \\ &= P_{1,k+1} + Q_{k+1} \end{aligned} \quad (17.112)$$

ここで、

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= B_{k+1}E(W_{k+1}W_{k+1}^T)B_{k+1}^T = B_{k+1}(\alpha_1^2 I)B_{k+1}^T \\ &= \begin{bmatrix} (b_{1,k+1}\alpha_1)^2 & 0 \\ 0 & (b_{2,k+1}\alpha_1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_1(t_{k+1})\alpha_1\}^2 & 0 \\ 0 & \{x_2(t_{k+1})\alpha_1\}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17.113)$$

式(17.112)の右辺第1項の $P_{1,k+1}$ は式(17.97)で計算される。式(17.113)においては、行列 B_{k+1} は状態変量推定値に依存して観測値入手直前まで変化するので、 α_1 が一定値であっても Q_{k+1} は時間的に変化していることになる。すなわち、システムノイズに非定常性が考慮されていることになる。しかも、計算が非常に容易であり、実際の運用にあたっても困難を生じない。

なお、 B_{k+1} の要素は式(17.109)に示されるように、観測値情報が入手される直前の $\hat{x}_{1,k+1}(-)$ と $\hat{x}_{2,k+1}(-)$ を用いればよい。また、式(17.113)の Q_{k+1} は前述した通り(図-1を参照)、観測値情報が入手される直前に作用させる。すなわち、予測計算期間中は式(17.97)と式(17.98)及び式(17.99)の伝達方程式を用い、予測時間 ℓ 毎に瞬間的に Q_{k+1} を作用させることに留意すべきである。

3.6 観測方程式の定式化

カルマン・フィルター理論を適用するために、「観測方程式」の定式化を行う必要がある。流出高を観測値とすると、式(17.82)で流量を流出高に変換した値と状態変量 x_i の間には式(17.51)の関係が成立するので、「乗算的ノイズ」を導入して、観測方程式を次のように定義する。

$$z_k = c_k(1 + v_k) = x_i^{1/p_2}(1 + v_k) \quad (17.114)$$

z_k : サンプリング時刻 k における流出高観測値、 v_k : 観測誤差

表-1 に示されるように、カルマン・フィルター理論は、元来線形システム方程式と線形観測方程式に関して理論展開がなされている。このため、式(17.114)の非線形観測方程式は直接カルマン・フィルター理論に適用することができない。このため、式(17.114)の線形化を行う。

$$\begin{aligned}
h(x_1) &= x_1^{1/p_2} \\
&= h(x_1^*) + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)_{x_1^*} (x_1 - x_1^*) \\
&= h_1 x_1 + h(x_1^*) - h_1 x_1^* \\
&= H_k X_k + h_3
\end{aligned} \tag{17.115}$$

ここで、

$$H_k = [H_1 : H_2] \quad , \quad H_1 = [h_1 \ 0] \quad , \quad H_2 = [0 \ 0] \tag{17.116}$$

$$h_1 = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right)_{x_1^*} = \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2 - 1} \tag{17.117}$$

$$X_k = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \tag{17.118}$$

$$h_3 = h(x_1^*) - \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \right) x_1^* = (x_1^*)^{1/p_2} - \frac{1}{p_2} (x_1^*)^{1/p_2} = \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) (x_1^*)^{1/p_2} \tag{17.119}$$

なお、上式に含まれている x_1^* の値として $\hat{x}_{1,k}(-)$ の値を用いればよい。また、表-1 に示されるカルマン・ゲインの実際上の計算にあたっては、式(17.116)の H_k のみが用いられ、確定値として扱われる式(17.119)で計算される h_3 の値は使用されないように注意する。

3.7 状態変量の更新方程式

観測値として流出高 z_k が得られれば、「状態変量の更新方程式」は、次式で定義される。

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k [z_k - H_k \hat{x}_k(-)] \quad \text{表-1 における式(11) 状態変量の更新方程式を参照}$$

$$\hat{X}_k(+) = \hat{X}_k(-) + K_k [z_k - \hat{x}_{1,k}^{1/p_2}(-)] \tag{17.120}$$

上式中の $z_k - \hat{x}_{1,k}^{1/p_2}(-)$ は流出高の観測値と流出モデルによる計算値との差を表わしている。ベクトル $\hat{X}_k(-)$ は次式のように要素展開される。

$$\hat{X}_k(-) = \begin{bmatrix} \hat{X}_1(-) \\ \hat{X}_2(-) \end{bmatrix}_k \tag{17.121}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1(-) \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(-) \\ \hat{x}_2(-) \end{bmatrix}_k \tag{17.122}$$

$$\left[\hat{X}_2(-) \right]_k = \begin{bmatrix} \hat{f}(-) \\ \hat{f}_c(-) \end{bmatrix}_k \quad (17.123)$$

式(17.120)を状態変量に関して要素展開すると、「状態変量の更新方程式」は次式で表現される。

$$\begin{cases} \left[\hat{x}_1(+) \right]_k = \left[\hat{x}_1(-) \right]_k + K_{1,k} \left\{ z_k - \hat{x}_{1,k}^{1/p_2}(-) \right\} \\ \left[\hat{x}_2(+) \right]_k = \left[\hat{x}_2(-) \right]_k + K_{2,k} \left\{ z_k - \hat{x}_{1,k}^{1/p_2}(-) \right\} \end{cases} \quad (17.124)$$

$$\begin{cases} \left[\hat{f}(+) \right]_k = \left[\hat{f}(-) \right]_k + K_{3,k} \left\{ z_k - \hat{x}_{1,k}^{1/p_2}(-) \right\} \\ \left[\hat{f}_c(+) \right]_k = \left[\hat{f}_c(-) \right]_k + K_{4,k} \left\{ z_k - \hat{x}_{1,k}^{1/p_2}(-) \right\} \end{cases} \quad (17.125)$$

式(17.124)と式(17.125)の $K_{i,k}$ ($i=1,2,3,4$) は、カルマン・ゲイン K_k の要素である。式(17.125)によれば、モデル定数 f と f_c は新しい観測値が入手されたのち更新されることになる。ここで注意すべき点は、予測雨量は別途レーダー雨量計などを用いた予測雨量モデルにより与えられるものであり、式(17.120)によって更新される性質のものではない。

3.8 乗算的ノイズによる観測誤差の定式化

カルマン・フィルターを実行するには「観測誤差分散」が必要となる。 R_k は式(17.114)より次式で与えられる。

$$\begin{cases} R_k = E[(c_k v_k)^2] = c_k^2 E[v_k^2] = c_k^2 \alpha_2^2 \\ \alpha_2^2 = E[v_k^2] (\alpha_2 = 0.1 \sim 0.2) \end{cases} \quad (17.126)$$

すなわち、 α_2 については $c_k = x_{1,k}^{1/p_2}$ (最新流出高推定値) の 10%ないし 20%の誤差を仮定するものとする。このとき、式(17.114)で定義される c_k に含まれる x_1 の値として、 $\hat{x}_{1,k}(-)$ を用いればよい。

3.9 カルマン・ゲインの算定

「カルマン・ゲイン」 K_k は、以下の手順で計算される。まず、分散・共分散行列 $P_k(-)$ は式(17.91)に示されるように、以下の小行列で定義される。なお、予測雨量 r は別途与えられるので $U_{2,k}$ は $P_k(-)$ に含める必要がない。

$$K_k = P_k(-) H_k^T \left[H_k P_k(-) H_k^T + R_k \right]^{-1} \quad \text{表-1 における式(10) カルマン・ゲインを参照}$$

$$P_k(-) = \left[\begin{array}{c|c} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ \hline P_{2,k}^T(-) & U_{1,k} \end{array} \right] \quad (17.127)$$

K_k には逆行列が含まれているが、観測方程式が一次元(スカラー量)である場合には、この項はその逆数をとればよい。カルマン・ゲインに含まれる行列演算を式(17.116)の定係数ベクトル H_1 と式

(17.91)の小行列を用いて行うと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} P_k(-)H_k^T &= \left[\begin{array}{c|c} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ \hline P_{2,k}^T(-) & U_{1,k}(-) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} H_1^T \\ 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c} P_{1,k}(-)H_1^T \\ \hline P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{array} \right] \end{aligned} \quad (17.128)$$

式(17.116)に示されるように、ベクトル H_1 の要素は h_1 と 0 である。式(17.128)の演算は行列 $P_{1,k}(-)$ と $P_{2,k}^T(-)$ のうち、第1列目の要素に h_1 を乗じた値となる。

$$\begin{aligned} H_k P_k(-)H_k^T + R_k &= [H_1 \mid 0] \left[\begin{array}{c} P_{1,k}(-)H_1^T \\ \hline P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{array} \right] + R_k \\ &= H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k \end{aligned} \quad (17.129)$$

式(17.129)の $H_k P_k(-)H_k^T$ は、行列 $P_{1,k}(-)$ の1行1列目の要素 $p_{11}(-)$ に h_1^2 を乗じた値に等しい。したがって、

$$S = H_1 P_{1,k}(-)H_1^T + R_k = h_1^2 p_{11}(-) + R_k \quad (17.130)$$

カルマン・ゲイン K_k は、式(17.128)をスカラー量となる式(17.130)の値で除すればよいので、次式で与えられる。

$$K_k = \left[\begin{array}{c} K_1 \\ \vdots \\ K_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} P_{1,k}(-)H_1^T \\ \hline P_{2,k}^T(-)H_1^T \end{array} \right] S^{-1} \quad (17.131)$$

3.10 状態変量の推定誤差分散・共分散更新方程式

$$P_k(+) = [I - K_k H_k] P_k(-) \quad \text{表-1 における式(12) 推定誤差分散・共分散の更新方程式を参照}$$

「推定誤差分散・共分散の更新方程式」は次のように変形される。

$$\begin{aligned} I - K_k H &= \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} K_{1,k} \\ \vdots \\ K_{2,k} \\ \hline K_{3,k} \\ K_{4,k} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|ccc} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c|cc} h_1 K_{1,k} & 0 & 0 & 0 \\ \hline h_1 K_{2,k} & 0 & 0 & 0 \\ h_1 K_{3,k} & 0 & 0 & 0 \\ \hline h_1 K_{4,k} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} M_1 & 0 \\ M_2 & I \end{array} \right] \end{aligned} \quad (17.132)$$

ここで、

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 - h_1 K_{1,k} & 0 \\ -h_1 K_{2,k} & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -h_1 K_{1,k} & 0 \\ -h_1 K_{2,k} & 0 \end{bmatrix} \quad (17.133)$$

の行列を定義すると、誤差分散・共分散行列は式(17.134)で更新される。

$$\begin{aligned} P_k(+) &= \left[\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline M_2 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} P_{1,k}(-) & P_{2,k}(-) \\ \hline P_{2,k}^T(-) & U_{1,k}(-) \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} M_1 P_{1,k}(-) & M_1 P_{2,k}(-) \\ \hline M_2 P_{1,k}(-) + P_{2,k}^T(-) & M_2 P_{2,k}(-) + U_{1,k}(-) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (17.134)$$

すなわち、 $P_k(+)$ の小行列は次式で計算される。

$$\begin{cases} P_{1,k}(+) = M_1 P_{1,k}(-) \\ P_{2,k}(+) = M_1 P_{2,k}(-) = P_{1,k}^T(-) M_2^T + P_{2,k}(-) \\ U_{1,k}(+) = M_2 P_{2,k}(-) + U_{1,k}(-) \end{cases} \quad (17.135)$$

式(17.135)によれば、新しい観測値が入手される毎に、状態変量ベクトル X_1 と X_2 の分散・共分散が更新される。同様に、モデル定数 f と f_c の分散・共分散行列も更新されることに着目すべきである。

文責 片山 直樹
宮武 真由子
星 清

参考文献

- 1) Kalman, R. E. : A new approach to linear filtering and prediction problems, J. of Basic Engineering, Trans. of ASME. Vol.82, No.2, pp.35-45, 1960.
- 2) Jazwinski, A.H. : Stochastic Process and Filtering Theory, Academic Press, 1970.
- 3) 日野幹雄 : Kalman の予測推定理論の平易な説明について, 東京工業大学土木工学科研究報告, No.15, pp. 91-99, 1973.
- 4) Hino, M.: On-line prediction of hydrologic system, Proc. of the 15th Conference of IAHR, Istanbul, Vol.4, pp.121-129, 1973.
- 5) 日野幹雄 : 水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用, 土木学会論文報告集, 第 221 号, pp. 39-47, 1974.
- 6) 高橋安人 : システムと制御, 岩波書店, 1974.
- 7) Chiu, C.L.(Ed.): Application of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics and Water Resources, Proc. of the AGU Chapman Conference, University of Pittsburgh, 1978.
- 8) 神田 徹・藤田睦博 : 水文学—確率論的手法とその応用一, 新体系土木工学 26, 技報堂, 1981.

- 9) 高棹琢磨・椎葉充晴・寶 馨：貯留モデルによる実時間流出予測に関する基礎的研究，京都大学防災研究所年報，第 25 号 B-2, pp. 245-267, 1982.
- 10) 宝 馨・高棹琢磨・椎葉充晴：洪水流出の確率予測における実際的手法，第 28 回水理講演会論文集，土木学会，pp. 415-422, 1984.
- 11) 日野幹雄・金 治弘：フィルター分離 AR 法とカルマン・フィルターによる洪水予測法に関する研究，土木学会論文集，第 351 号 / II-2, pp. 155-162, 1984.
- 12) 星 清：洪水予測システムの基礎的検討(2)，北海道開発局土木試験所月報，No. 386, pp. 48-68, 1985.
- 13) 星 清：カルマン・フィルターの話，北海道開発局試験所月報，No. 409, pp. 26-30, 1987.
- 14) 星 清：流出予測法の実際例，第 24 回水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会，A-3, pp. 1-20, 1988.
- 15) 橋本識秀・俞 朝夫・星 清：洪水流出予測における実際的課題とその解決法，水工学論文集，第 36 卷，土木学会，pp. 567-572, 1992.
- 16) 北海道開発局建設部河川管理課監修：北海道開発局の洪水予測システム，432p., 1995.
- 17) 立川康人・市川 溫・椎葉充晴：貯留関数法のモデルパラメータの不確定性を考慮した実用的な実時間流出予測手法，水文・水資源学会誌，Vol. 10, No. 6, pp. 617-626, 1997.
- 18) 河村 明：貯留関数法を用いたカルマン・フィルターによる洪水流出の実時間予測(例題 1-11), pp. 1-24, 第 1 編 水文編, CD-ROM 水理公式集例題プログラム集, 平成 13 年版, 土木学会, 2002.
- 19) (財) 北海道河川防災研究センター・研究所編集・発行: 実時間洪水予測システム理論解説書, 396p., 2004.
- 20) 東海林 勉・星 清・藤田 曜・橋本識秀：予測降雨の推定誤差評価について(2)，土木学会北海道支部論文報告集，第 61 号，CD-ROM 概要集，II-8, 2005.
- 21) 星 清・東海林 勉・藤田 曜：短時間予測降雨における誤差指標の総合化，研究所紀要(XVI), (財) 北海道河川防災研究センター, pp. 379-404, 2005.
- 22) 片山直樹・星 清・橋本識秀：一般化貯留関数法を用いた洪水予測手法の改良，土木学会北海道支部論文報告集，第 61 号，CD-ROM 概要集，II-11, 2005.
- 23) 星 清・片山直樹：一般化貯留関数法を用いた洪水予測手法の改良，研究所紀要(XVI), (財) 北海道河川防災研究センター, pp. 407-438, 2005.

第18回 流出解析ゼミ

— 複合流域におけるカルマン・フィルター理論を用いた実時間流出予測 —

1. はじめに

「第17回ゼミ」においては、單一流域における実時間流出予測計算を行うために、「有効雨量を用いた貯留関数法」にカルマン・フィルター理論を適用した計算例について詳述してきた。その際、予測精度向上のため、更新すべきモデル定数としてフリクション・ファクター(流域平均粗度) f_c と流出率 f の2個を選択し、新しい流量観測値が1時間ごとに入手されるものとして、これらのモデル定数を自動的に更新(オンライン同定)した。また、予測雨量誤差の予測水位精度に及ぼす影響を定量的に評価するために、システム入力である降雨量 r を「状態変量」に加えて、システム方程式の拡大を図り、予測雨量の誤差分散を考慮した洪水予測システムを構築した。

本ゼミでは、流域分割や河道追跡を必要とする大きな流域やダムによる洪水調節後の人工的な流況の影響を受ける地点での流出予測を可能にするために、「第14回ゼミ」で述べた分割流域における流出解析と河道追跡を行う複合流域モデルとカルマン・フィルター理論を組み合わせた流域・河道系における洪水予測システムを構築する。

また、このような複合流域における流出予測を行うためには、分割流域と河道のネットワークに合致するようにシステム方程式と観測方程式を定式化し、それらをプログラムコーディングする必要があるが、本ゼミでは、後述する「流域・河道ネットワーク識別データ」によって、この定式化をプログラム内で自動的に行う手法について述べる。

なお、分割流域での流出モデルには「第17回ゼミ」と同様に、「有効雨量を用いた貯留関数法」を用い、モデル定数 f_c と f 及び降雨量 r を「状態変量」に加えてシステム方程式の拡大を図る。

2. 複合流域の流出モデルについて

2.1 有効雨量を用いた貯留関数法(一般化貯留関数モデル)

このモデルに関しては、「第7回ゼミ」の「5.3 二価の非線形貯留関数法におけるモデル定数 f_c の最適化計算」を参照されたい。分割小流域における一般化貯留関数モデルの基本式は、次式で表わされる。

$$s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad , \quad \frac{ds}{dt} = fr - q \quad (18.1)$$

$$\begin{cases} k_{11} = \lambda_1 f_c \\ k_{12} = \lambda_1^2 \lambda_2 f_c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2.8235 A^{0.24} \\ \lambda_2 = 0.2835 (\bar{r}_e)^{-0.2648} \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ f_c = (n / \sqrt{i})^{0.6} \end{cases} \quad (18.2)$$

ここに、 s :貯留高(mm), f :流出率, r :観測雨量(mm/h), q :直接流出高(mm/h), k_{11} , k_{12} :貯留係数, p_1 , p_2 :貯留指数, A :流域面積(km²), \bar{r}_e :平均有効雨量強度(mm/h), n :等価粗度, i :斜面勾配, f_c :流域平均粗度(フリクション・ファクター)

$x_1 = q^{p_2}$, $x_2 = d(q^{p_2})/dt$ を状態変量に選定すると、式(18.1)は次式で表わされる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} x_1^{p_1/p_2-1} x_2 - \frac{1}{k_{12}} x_1^{1/p_2} + \frac{fr}{k_{12}} \end{bmatrix} \quad (18.3)$$

なお、 f 及び f_c は分割小流域で同一値をとるものとする。また、 \bar{r}_e の値は本来、洪水終了後に決定される性質のものであり、洪水期間中には推定不可能である。既往洪水例における実測平均雨量強度は 5.0mm/h であり、流出率 $f=0.6$ と仮定すれば、 $\bar{r}_e=3.0\text{mm/h}$ 程度が妥当と考えられる。そこで、本ゼミでは一定値 3.0mm/h を与えるものとする。

2.2 河道追跡モデル

このモデルに関しては、「第13回ゼミ」の「3. 実領域における貯留関数法」を参照されたい。任意の河道区間での貯留関数モデルの基礎式は次式で表わされる。

$$s_s = k_3 q_s^{p_3} + k_4 \frac{d}{dt} (q_s^{p_4}) \quad (18.4)$$

$$\frac{ds_s}{dt} = q_o - q_s \quad (18.5)$$

$$a_s = \alpha q_s^m \quad (18.6)$$

ここに、 s_s : 河道貯留量(m^3)、 q_o : 河道上流端境界条件(m^3/s)、 q_s : 河道流出量(m^3/s)、 a_s : 河道断面積(m^2)、 t : 時間(s)、 k_3, k_4 : 貯留係数、 p_3, p_4 : 貯留指数、 α, m : 河道定数(秒とメートル単位)

すなわち、式(18.1)の流出モデルと式(18.4)の河道追跡モデルは同一形式の貯留方程式から成るため、プログラムコーディングの定式化を自動的に行うことが容易となる。

$y_1 = q_s^{p_4}$ 、 $y_2 = d(q_s^{p_4})/dt$ において式(18.4)及び式(18.5)を整理すると次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\frac{k_3}{k_4} \frac{p_3}{p_4} y_1^{p_3/p_4-1} y_2 - \frac{1}{k_4} y_1^{1/p_4} + \frac{q_o}{k_4} \end{bmatrix} \quad (18.7)$$

一般に、複合流域における洪水追跡問題において、分割流域の流出計算では、[mm]と[h]の単位を用い、河道区間での洪水追跡には [m^3] と [sec] の単位が用いられることが多い。流出計算と河道追跡での計算において単位が異なることは、とくに洪水予測計算を行うときに不便であるため、河道追跡計算上の単位を次式の関係式を用いて [mm] と [h] に変換する(詳細については「第13回ゼミ」を参照)。

$$\begin{cases} s_s (\text{m}^3) \rightarrow s_h (\text{mm}) & s_s = (A_r \times 10^3) s_h \\ q_s (\text{m}^3/\text{s}) \rightarrow q_h (\text{mm}/\text{h}) & q_s = (A_r / 3.6) q_h \\ t (\text{s}) \rightarrow t_h (\text{h}) & t = (3.6 \times 10^3) t_h \end{cases} \quad (18.8)$$

ここに、 A_r : 当該河道上流域での全流域面積(km^2)

このとき、単位変換に伴う貯留係数 k_{h3} と k_{h4} は次式で表現される。

$$k_{h3} = \frac{K_3 \alpha L_h}{A_r} \left(\frac{A_r}{3.6} \right)^m \left(\bar{q}_{ho} \right)^{m-p_3} \quad (18.9)$$

$$k_{h4} = \frac{K_4}{K_3^2} k_{h3}^2 \left(\bar{q}_{ho} \right)^{2p_3-p_4-1} \quad (18.10)$$

ここに、 K_3, K_4 ：無次元貯留係数（「第13回ゼミ」を参照）

式(18.9)と式(18.10)が貯留高 s_h を[mm]で、流出高 q_h を[mm/h]で表したときの河道追跡用の貯留関数モデル定数である。注意すべき点は、 A_r ：当該河道上流域の流域面積(km²)、 L_h ：河道長(km)、 \bar{q}_{ho} ：河道上流端平均流入高(mm/h)となることである。

複合流域における実時間洪水予測問題では、平均有効雨量強度 \bar{r}_e と同様に、河道の上流端平均流入量 \bar{q}_0 を前もって指定しておかなければならない。本ゼミでは、 \bar{q}_0 の比流量値として 0.5m³/s/km² の一定値を与えることとする。

3. 貯留関数法へのカルマン・フィルター予測理論の適用

3.1 システム方程式

実時間洪水予測においては多くの場合、モデル定数は洪水毎に変化するために、不確実性が大きい。また、雨量も完全な予測はできないことから誤差を有している。したがって、これらの誤差を考慮に入れた洪水予測を行うために、モデル定数と予測雨量を前出の状態変量に加えてシステム方程式の拡大を図る。

また、複合流域の場合、分割流域数を N 、河道数を M とすると、流域のシステム方程式である式(18.3)は N 個、河道のシステム方程式である式(18.7)は M 個必要である。

以上より、 $i=1, \dots, N$ 、 $j=1, \dots, M$ としてシステム方程式全体を記述すると、次式で表わされる。

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (18.11)$$

ここに、 X_1 は流出モデルの状態変量であり、式(18.3)を拡大すれば式(18.12)で表わされる。

$$\frac{dX_1}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{1,N} \\ x_{2,N} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{2N-1} \\ f_{2N} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ -\frac{k_{11,1}}{k_{12,1}} \frac{p_1}{p_2} (x_{1,1})^{p_1/p_2-1} (x_{2,1}) - \frac{1}{k_{12,1}} (x_{1,1})^{1/p_2} + \frac{fr_1}{k_{12,1}} \\ \vdots \\ x_{2,N} \\ -\frac{k_{11,N}}{k_{12,N}} \frac{p_1}{p_2} (x_{1,N})^{p_1/p_2-1} (x_{2,N}) - \frac{1}{k_{12,N}} (x_{1,N})^{1/p_2} + \frac{fr_N}{k_{12,N}} \end{bmatrix} \quad (18.12)$$

ここに、 X_2 は河道モデルの状態変量で、式(18.7)を拡大すれば式(18.13)で表わされる。なお、式(18.7)

で関数を g_1 及び g_2 で表記したが、関数 f での表記に統一し、流出モデルの式(2N本)の続きになるよう添え字を付した。

$$\frac{dX_2}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{1,M} \\ y_{2,M} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_{2N+1} \\ f_{2N+2} \\ \vdots \\ f_{2N+2M-1} \\ f_{2N+2M} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_{2,1} \\ -\frac{k_{3,1}}{k_{4,1}} \frac{p_{3,1}}{p_{4,1}} (y_{1,1})^{p_{3,1}/p_{4,1}-1} (y_{2,1}) - \frac{1}{k_{4,1}} (y_{1,1})^{1/p_{4,1}} + \frac{q_{o,1}}{k_{4,1}} \\ \vdots \\ y_{2,M} \\ -\frac{k_{3,M}}{k_{4,M}} \frac{p_{3,M}}{p_{4,M}} (y_{1,M})^{p_{3,M}/p_{4,M}-1} (y_{2,M}) - \frac{1}{k_{4,M}} (y_{1,M})^{1/p_{4,M}} + \frac{q_{o,M}}{k_{4,M}} \end{bmatrix} \quad (18.13)$$

X_3 をモデル定数、 X_4 を雨量に関する状態変量として、 dt の単位時間内で変化しないものと仮定すれば、これらは式(18.14)及び式(18.15)で表わされる。ただし、モデル定数の個数を $K (=2)$ とする。

$$\frac{dX_3}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f \\ f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{2N+2M+1} \\ f_{2N+2M+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.14)$$

$$\frac{dX_4}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{2N+2M+K+1} \\ \vdots \\ f_{2N+2M+K+N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18.15)$$

河道 j への流入高 $q_{o,j}$ は、当該地点より上流に位置する分割流域及び上流河道からの流出量累計値(指定状態変量の非線形和)を用いて表わされる。 $q_{o,j}$ の記述手法については、後述の「4. 流域・河道系における洪水予測式の自動定式化」を参照されたい。

式(18.11)をあらかじめ既知である $X = X^*$ のまわりで 1 次の項までテーラー級数展開し、線形化する。なお、実際の計算においては、 X^* の値として、前の計算ステップでの値を採用すればよい。

$$\frac{dX}{dt} = F(X) = A(X^*)X + D(X^*) \quad (18.16)$$

ここで、

$$A(X^*) = \left(\frac{\partial F(X)}{\partial X} \right)_{X=X^*} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \hline A_{21} & A_{22} & 0_{23} & 0_{24} \\ \hline 0_{31} & 0_{32} & A_{33} & 0_{34} \\ \hline 0_{41} & 0_{42} & 0_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{流域に対応}(2N\text{行}) \\ \rightarrow \text{河道に対応}(2M\text{行}) \\ \rightarrow \text{モデル定数に対応}(K\text{行}) \\ \rightarrow \text{予測雨量に対応}(N\text{行}) \end{array} \quad (18.17)$$

↓ ↓ ↓ ↓
(2N列) (2M列) (K列) (N列)

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{2N-2N-1} & a_{2N-2N} \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} : (2N \times 2N) \text{ 行列} \quad (18.18)$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{2-2N+2M+1} & a_{2-2N+2M+2} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ a_{2N-2N+2M+1} & a_{2N-2N+2M+2} \end{bmatrix} : (2N \times K) \text{ 行列} \quad (18.19)$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2-2N+2M+K+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ & & a_{2N-2N+2M+K+N} \end{bmatrix} : (2N \times N) \text{ 行列} \quad (18.20)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} A_{11}^{21} & \cdots & A_{1N}^{21} \\ \ddots & & \vdots \\ \vdots & A_{ji}^{21} & \vdots \\ A_{M1}^{21} & \cdots & A_{MN}^{21} \end{bmatrix} : (2M \times 2N) \text{ 行列} \quad (18.21)$$

$$A_{ji}^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{2N+2j-2i-1} & 0 \end{bmatrix} : j=1 \cdots M, i=1 \cdots N \quad (18.22)$$

A_{ji}^{21} の要素 $a_{2N+2j-2i-1}$ は、流域・河道ネットワークによって変わるので、具体的な式を記述するのは困難であるが、ゼロでないものが必ず存在する。

$$A_{22} = \begin{bmatrix} A_{11}^{22} & \cdots & 0 \\ \ddots & & \vdots \\ \vdots & A_{jj}^{22} & \vdots \\ A_{M1}^{22} & \cdots & A_{MM}^{22} \end{bmatrix} : (2M \times 2M) \text{ 行列} \quad (18.23)$$

$$A_{ji}^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{2N+2j-2N+2i-1} & 0 \end{bmatrix} : i, j = 1 \cdots M \quad j > i \quad (18.24)$$

$$A_{ji}^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : i, j = 1 \cdots M \quad j < i \quad (18.25)$$

$$A_{ji}^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{2N+2j-2N+2j-1} & a_{2N+2j-2N+2j} \end{bmatrix} : i, j = 1 \cdots M \quad j = i \quad (18.26)$$

A_{jj}^{22} は、河道単独の要素で構成されるので確定可能であるが、 $A_{ji}^{22} (j > i)$ は流域・河道ネットワークによって要素が変化するため、具体的な式を記述するのは困難である。ただし、河道は上流端に配置されることはないので、上流端流入量と河道だけのネットワークでない限り、ゼロでない要素が必ず存在する。

$$\begin{cases} A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & : (K \times K) のゼロ行列 \\ A_{44} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & : (N \times N) のゼロ行列 \end{cases} \quad (18.27)$$

$$\begin{cases} 0_{12} : (2N \times 2M) のゼロ行列 \\ 0_{23} : (2M \times 2K) のゼロ行列 \\ 0_{24} : (2M \times N) のゼロ行列 \\ 0_{31} : (K \times 2N) のゼロ行列 \\ 0_{32} : (K \times 2M) のゼロ行列 \end{cases} \quad \begin{cases} 0_{34} : (K \times N) のゼロ行列 \\ 0_{41} : (N \times 2N) のゼロ行列 \\ 0_{42} : (N \times 2M) のゼロ行列 \\ 0_{43} : (N \times K) のゼロ行列 \end{cases} \quad (18.28)$$

式(18.18)の行列の要素は、流出モデルのシステム方程式から次式で表わされる。 $(i = 1 \cdots N)$

$$\begin{cases} a_{2i-2i-1} = \frac{\partial f_{2i}}{\partial x_{1,i}} = \frac{\partial}{\partial x_{1,i}} \left(\frac{dx_{2,i}}{dt} \right) = -\frac{k_{11,i}}{k_{12,i}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left(x_{1,i}^* \right)^{p_1/p_2-2} \left(x_{2,i}^* \right) - \frac{1}{k_{12,i}} \frac{1}{p_2} \left(x_{1,i}^* \right)^{1/p_2-1} \\ a_{2i-2i} = \frac{\partial f_{2i}}{\partial x_{2,i}} = \frac{\partial}{\partial x_{2,i}} \left(\frac{dx_{2,i}}{dt} \right) = -\frac{k_{11,i}}{k_{12,i}} \frac{p_1}{p_2} \left(x_{1,i}^* \right)^{p_1/p_2-1} \end{cases} \quad (18.29)$$

式(18.19)の行列の要素は、次式で表わされる。 $(j = 1 \cdots M, \quad i = 1 \cdots N)$

$$\begin{cases} a_{2i-2N+2M+1} = \frac{\partial f_{2i}}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{dx_{2,i}}{dt} \right) = \frac{r_i}{k_{12,i}} \\ a_{2i-2N+2M+2} = \frac{\partial f_{2i}}{\partial f_c} = \frac{\partial}{\partial f_c} \left(\frac{dx_{2,i}}{dt} \right) = \frac{1}{f_c} \left\{ \frac{k_{11,i}}{k_{12,i}} \frac{p_1}{p_2} \left(x_{1,i}^* \right)^{p_1/p_2-1} \left(x_{2,i}^* \right) + \frac{2}{k_{12,i}} \left(x_{1,i}^* \right)^{1/p_2} - \frac{2fr_i}{k_{12,i}} \right\} \end{cases} \quad (18.30)$$

$x_{1,i}^*$ と $x_{2,i}^*$ の値は、既述したように、前の計算ステップでの値を用いて算定される。

式(18.20)の行列の要素は、次式で表わされる。 $(i = 1 \cdots N)$

$$a_{2i \ 2N+2M+K+i} = \frac{\partial f_{2i}}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{dx_{2,i}}{dt} \right) = \frac{f}{k_{12,i}} \quad (18.31)$$

式(18.29)～式(18.31)の展開式は、「第 17 回ゼミ」の「3.3 状態変量の伝達方程式」で算定した微係数と基本的に同一である。大きな相違点は分割流域数 N 及び河道数 M の増加に伴って、式(18.16)に示される係数行列 $A(X^*)$ 及び $D(X^*)$ の次元が増大することである。

式(18.22)の行列の要素は、次式で表わされる。 $(j=1 \cdots M, i=1 \cdots N)$

$$a_{2N+2j \ 2i-1} = \frac{\partial f_{2N+2j}}{\partial x_{1,i}} = \frac{\partial}{\partial x_{1,i}} \left(\frac{dy_{2,j}}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{1,i}} \left(\frac{q_{o,j}}{k_{4,j}} \right) \quad (18.32)$$

式(18.24)の行列の要素は、次式で表わされる。 $(i, j=1 \cdots M)$

$$\begin{aligned} a_{2N+2j \ 2N+2i-1} &= \frac{\partial f_{2N+2j}}{\partial y_{1,i}} = \frac{\partial}{\partial y_{1,i}} \left(\frac{dy_{2,j}}{dt} \right) \\ &= -\frac{k_{3,j}}{k_{4,j}} \frac{p_{3,j}}{p_{4,j}} \left(\frac{p_{3,j}}{p_{4,j}} - 1 \right) \left(y_{1,j} \right)^{p_{3,j}/p_{4,j}-2} \left(y_{2,j} \right) - \frac{1}{k_{4,j}} \frac{1}{p_{4,j}} \left(y_{1,j} \right)^{1/p_{4,j}-1} + \frac{\partial}{\partial y_{1,i}} \left(\frac{q_{o,j}}{k_{4,j}} \right) \end{aligned} \quad (18.33)$$

式(18.32)及び式(18.33)に示される河道 j への流入高 $q_{o,j}$ は、前述したように、当該地点より上流に位置する分割流域及び上流河道からの流出量累計値で与えられる。この上流端流入高は解析対象河川流域の流域・河道ネットワークが決定されれば、後述するように自動定式化される。

式(18.26)の行列の要素は、河道モデルのシステム方程式から次式で表わされる $(j=1 \cdots M)$ 。

$$\begin{cases} a_{2j \ 2j-1} = \frac{\partial f_{2N+2j}}{\partial y_{1,j}} = -\frac{k_{3,j}}{k_{4,j}} \frac{p_{3,j}}{p_{4,j}} \left(\frac{p_{3,j}}{p_{4,j}} - 1 \right) \left(y_{1,j}^* \right)^{p_{3,j}/p_{4,j}-2} \left(y_{2,j}^* \right) - \frac{1}{k_{4,j}} \frac{1}{p_{4,j}} \left(y_{1,j}^* \right)^{1/p_{4,j}-1} \\ a_{2j \ 2j} = \frac{\partial f_{2N+2j}}{\partial y_{2,j}} = -\frac{k_{3,j}}{k_{4,j}} \frac{p_{3,j}}{p_{4,j}} \left(y_{1,j}^* \right)^{p_{3,j}/p_{4,j}-1} \end{cases} \quad (18.34)$$

$y_{1,j}^*$ と $y_{2,j}^*$ の値として、前の計算ステップでの値を用いればよい。

なお、ベクトル $D(X^*)$ は次式で与えられる。

$$D(X^*) = F(X^*) - A(X^*)X^* \quad (18.35)$$

$A(X^*)$ と $D(X^*)$ が定数行列の場合、 k を任意のタイムステップとして次の差分方程式に変換できる。これが状態変量の伝達方程式である。

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k D_k \quad (18.36)$$

ここに、 $\Phi_k = e^{AT}$ ， $\Gamma_k = (e^{AT} - I)A^{-1}$ で計算され、 T は計算時間間隔 ($T < 1$ [h]) である。

なお、係数行列 Φ_k と Γ_k の次元は、 $\{(2N+2M+K+N) \times (2N+2M+K+N)\}$ の大きさとなる。

3.2 観測方程式

観測地点の流出高 q は次式で表わされる。

$$q = h(X) = \left\{ (y_{1,j})^{1/p_{4,j}} A_j + \Sigma (y_{1,j'})^{1/p_{4,j'}} A_{j'} + \Sigma (x_{1,i})^{1/p_2} A_i + \Sigma (x_{1,i'})^{1/p_2} A_{i'} \right\} / A \quad (18.37)$$

ここに、

$y_{1,j}$: 観測地点の上流側における観測地点に最も近い本川の河道の状態変量

A_j : $y_{1,j}$ 河道上流域面積

$y_{1,j'}$: 観測地点と $y_{1,j}$ 河道との間に流入する支川の最下流の河道の状態変量

$A_{j'}$: $y_{1,j'}$ 河道上流域面積

$x_{1,i}$: 観測地点と $y_{1,j}$ 河道との間に流入する本川の残流域の状態変量

A_i : $x_{1,i}$ 河道上流域面積

$x_{1,i'}$: $y_{1,j'}$ 河道と本川合流点までの間に流入する支川の残流域の状態変量

$A_{i'}$: $x_{1,i'}$ 河道上流域面積

A : 観測地点の流域面積 (A_j , $A_{j'}$, A_i , $A_{i'}$ の合計)

p_2 : 流出モデルの貯留指数 ($p_2 = 0.4648$)

$p_{4,j}$, $p_{4,j'}$: それぞれ、 j 河道と j' 河道の貯留指数

サンプリング時刻 k における流出高観測値 z_k の観測方程式は、次式で表わされる。

$$z_k = q_k (1 + v_k) = h(X)(1 + v_k) \quad (18.38)$$

上式を $X = X^*$ においてテーラー展開し、線形化すると式(18.39)が得られる。

$$h(X) = H(X^*)X + G(X^*) \quad (18.39)$$

ここに、

$$\begin{cases} H(X^*) = \frac{\partial h}{\partial X} = [H_1 \mid H_2 \mid H_3 \mid H_4] \\ H_1 = \frac{\partial h}{\partial X_1} = [h_1 \cdots h_{2N}] & : (1 \times 2N) \text{ 行列} \\ H_2 = \frac{\partial h}{\partial X_2} = [h_{2N+1} \cdots h_{2N+2M}] & : (1 \times 2M) \text{ 行列} \\ H_3 = \frac{\partial h}{\partial X_3} = [0 \ 0] & : (1 \times 2) \text{ のゼロ行列} \\ H_4 = \frac{\partial h}{\partial X_4} = [0 \ \cdots \ 0] & : (1 \times N) \text{ のゼロ行列} \end{cases} \quad (18.40)$$

3.3 水位予測式と精度(分散)

予測地点の予測流量 Q_k は、式(18.37)を用いて次式で計算される。

$$Q_k = \frac{A}{3.6} q_k \quad (18.41)$$

一般的には流量観測資料に基づいて次の水位～流量曲線($Z \sim Q$ 関係式)が予め設定されている。

$$Q_k = a(Z_k + b)^2 \quad (18.42)$$

式(18.42)を水位に関して表現すると、予測水位 Z_k は次式で表わされる。

$$Z_k = b_0 + b_1 \sqrt{Q_k} \quad \left(b_0 = -b, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \quad (18.43)$$

式(18.37)及び式(18.41)を式(18.42)に代入すれば、予測地点の流量に関する状態変量を用いたときの水位予測式が得られる。

本報告では、予測計算は流出高で行い、式(18.42)を用いて水位に変換したものを予測水位として出力している。予測流量及び予測流出高の誤差分散式は、式(18.37)及び式(18.41)の関係から次式で計算される。

$$Var(Q_k) = \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_k} \right)^2 Var(q_k) = \left(\frac{A}{3.6} \right)^2 Var(q_k) \quad (18.44)$$

$$Var(q_k) = H_k P_k H_k^T \quad (18.45)$$

ここに、係数ベクトル H_k の要素は式(18.40)で与えられる。

また、予測水位の誤差分散式は、式(18.44)を用いて次式で計算される。

$$\sigma^2 = Var(Z_k) = \left(\frac{\partial Z_k}{\partial Q_k} \right)^2 Var(Q_k) = \frac{b_1^2}{4} Q_k^{-1} Var(Q_k) \quad (18.46)$$

式(18.45)中の P_k は、「第 17 回ゼミ」の「3.4 状態変量の推定誤差分散・共分散伝達方程式」により、自動計算される。

4. 流域・河道系における洪水予測式の自動定式化

4.1 洪水予測式の自動定式化の考え方

一般化貯留関数法とカルマン・フィルター理論を組み合わせた流域・河道系における洪水流出予測を行うためには、分割流域と河道のネットワークに合致するようにシステム方程式と観測方程式を定式化し、それをプログラムコーディングしなければならない。この作業はかなり面倒で、しかも間違いを犯し易い。ここでは、以下に示す「流域・河道ネットワーク識別データ」を利用して、システム方程式と観測方程式をプログラム内で自動定式化する手法を示す。

システム方程式のうち、流域モデル式は他の全てから独立しているので、流域の番号を指定するだけでシステム方程式が記述可能である。河道モデル式も、上流端流入高 $q_{o,j}$ が与えられれば、河道番号を指定するだけで記述できる。残された課題は、河道の流入高 $q_{o,j}$ を自動的に記述する方策である。

例えば、図-1に示す湧別川の流域・河道網図から、C 河道の流入高 $q_{o,C}$ (=丸瀬布地点流出高) は、次式で表される。

$$q_{o,C} = \left\{ y_{1,1}^{1/p_{4,1}} A_A + x_{1,3}^{1/p_2} A_3 + y_{1,2}^{1/p_{4,2}} A_B + x_{1,5}^{1/p_2} A_5 + x_{1,6}^{1/p_2} A_6 \right\} / \Sigma A \quad (18.47)$$

ここに、 $A_A = A_1 + A_2$, $A_B = A_4$, $\Sigma A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$

$P_{4,A}$ と $P_{4,B}$ は、それぞれ、A 河道と B 河道の貯留指数である。

式(18.47)の構成式を見ると、河道の流入量はその河道の上流にある本・支川において、それぞれ最初に河道が出現するまでの間に合流する分割流域(流域3、5及び6)、上流端流出量(河道A)及び最初に出現した河道(河道B)の流出量の合計で表されることがわかる。したがって、河道Aより上流及び河道Bより上流に位置する分割流域の状態変量に関する情報は必要ない。

以上の規則に従い、流域・河道・上流端のそれぞれについて、何番目の要素であるかを特定できれば式(18.47)を作成することは容易となる。後述する「流域・河道ネットワーク識別データ」を利用すれば、式(18.47)を作成するために必要な流域・河道の状態変量と流域面積及び貯留指数を抽出することができる。

式(18.47)から河道への流出高が決定されると、式(18.32)及び式(18.33)を計算することができる。式(18.47)のC 河道の流入高 $q_{o,C}$ (=丸瀬布地点流出高)を、式(18.32)及び式(18.33)に代入すると次式が得られる。ただし、 $i=1 \cdots N$, $j=1 \cdots M$ とする。

$$\begin{aligned} a_{2N+2j-2i-1} &= \frac{\partial}{\partial x_{1,i}} \left(\frac{q_{o,C}}{k_{4,j}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{1,i}} \left(\frac{\left\{ y_{1,1}^{1/p_{4,1}} A_A + x_{1,3}^{1/p_2} A_3 + y_{1,2}^{1/p_{4,2}} A_B + x_{1,5}^{1/p_2} A_5 + x_{1,6}^{1/p_2} A_6 \right\} / \Sigma A}{k_{4,j}} \right) \quad (18.48) \\ a_{2N+2j-2N+2i-1} &= -\frac{k_{3,2}}{k_{4,2}} \frac{p_{3,j}}{p_{4,j}} \left(\frac{p_{3,j}}{p_{4,j}} - 1 \right) \left(y_{1,j} \right)^{p_{3,j}/p_{4,j}-2} \left(y_{2,j} \right) - \frac{1}{k_{4,j}} \frac{1}{p_{4,j}} \left(y_{1,j} \right)^{1/p_{4,j}-1} + \frac{\partial}{\partial y_{1,i}} \left(\frac{q_{o,j}}{k_{4,j}} \right) \\ &= -\frac{k_{3,2}}{k_{4,2}} \frac{p_{3,j}}{p_{4,j}} \left(\frac{p_{3,j}}{p_{4,j}} - 1 \right) \left(y_{1,j} \right)^{p_{3,j}/p_{4,j}-2} \left(y_{2,j} \right) - \frac{1}{k_{4,j}} \frac{1}{p_{4,j}} \left(y_{1,j} \right)^{1/p_{4,j}-1} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y_{1,i}} \left(\frac{\left\{ y_{1,1}^{1/p_{4,1}} A_A + x_{1,3}^{1/p_2} A_3 + y_{1,2}^{1/p_{4,2}} A_B + x_{1,5}^{1/p_2} A_5 + x_{1,6}^{1/p_2} A_6 \right\} / \Sigma A}{k_{4,j}} \right) \quad (18.49) \end{aligned}$$

丸瀬布地点では、 $i=1 \sim 6$, $j=1 \sim 2$ として式(18.48)と式(18.49)の要素を求める。

また、カルマン・ゲイン K や推定誤差共分散行列 P を表すためには、観測方程式の係数ベクトル H が必要である。観測方程式は予測地点の流量を表わす式であるから、予測地点において上記と同じ手

順で加算する地点を抽出していけば、 H も自動記述できる。

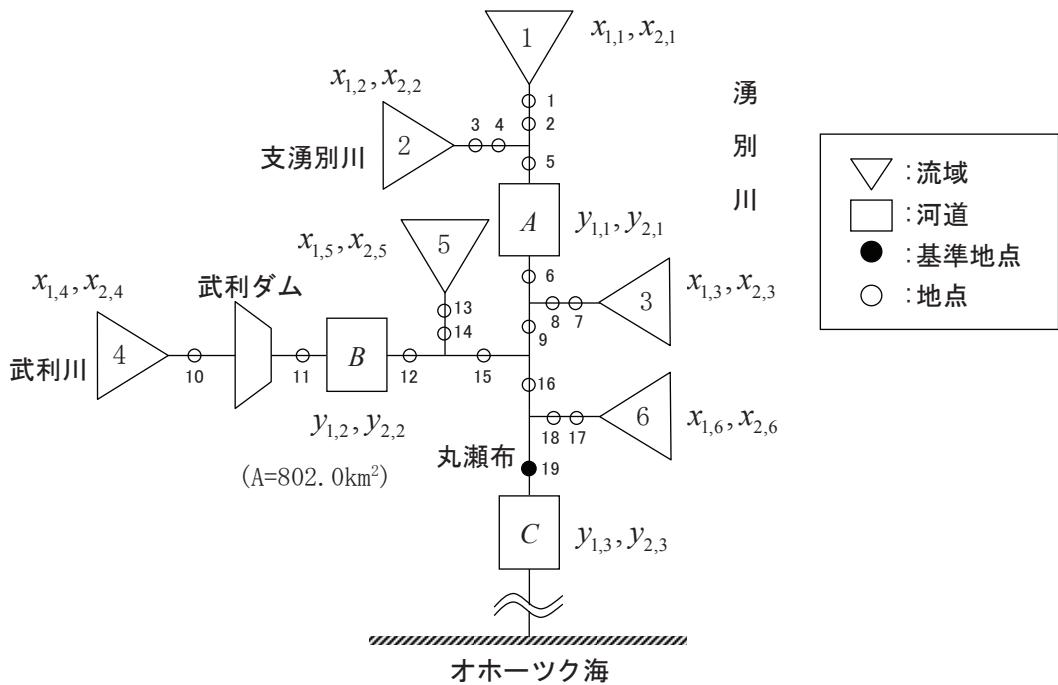


図-1 流域・河道ネットワーク（湧別川・丸瀬布）

4.2 流域・河道ネットワーク識別データの作成

流域・河道ネットワークは以下に示す4種類の要素の組み合わせで構成される。

1. 流域：雨量を与えて流量を計算する。
2. 上流端：強制的に流入量を与える。
3. 河道：河道追跡計算を行う。
4. 合流点：流域、河道、本川・支川などの流量を合計する場所で直下流が河道でないもの。

(直下流が河道の場合、河道への流入量計算と合流点としての合計計算とが重複することになるので、河道への流入量計算の方で済ませるものとする)

構成要素の判別は識別番号を行い、識別番号は表-1のように与え、識別番号の1の位で流域・河道などを判別し、10の位で本・支川の別及び支川の場合の次数を判別する。

ネットワーク構成要素を配置するにあたって、合流は2地点の合流までとする。3地点以上の合流の場合は、図-2のように合流点を増やして2地点ずつの合流になるように配置し直す。

「支川」の定義は、以下のように考える。

ア. 後述の「(2)計算順序と識別データ」に示す計算順序が1番の要素は本川であると定義する。

イ. 合流点において2系統の接続のうち、未だ次数が設定されていない系統の側のパートが1つしかない場合は、既に設定されているパートと同じ次数であるとし、複数からなる場

表-1 識別番号の付け方

| | | | | | |
|------|-----|-----|-----|----|-----|
| 流域: | 1 | 11 | 21 | 31 | ... |
| 上流端: | 2 | 12 | 22 | 32 | ... |
| 河道: | 3 | 13 | 23 | 33 | ... |
| 合流点: | 4 | 14 | 24 | 34 | ... |
| | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | |
| 本川 | 一 | 二 | 三 | | |
| 次支川 | 次支川 | 次支川 | 次支川 | | |

合は、次数を1つ上げて支川であるとする。

(1) 地点番号

流域や河道の接続状態を上記で定義した**識別番号**と、以下で定義する**地点番号**によって表現する。地点番号は図-3の●と○の場所に上流から順に大きくなるように付ける。○のところにはひとつだけ番号を付ける。

なお、図-4のようなケースは、下流側の流入点と上流側の流出点と同じ場所として点の数を節約し、下流側のパートを含めて連続番号を付ける。

(2) 計算順序と識別データ

ネットワークの4種類の構成要素は計算地点であるので、それに計算順序を付け、識別番号と地点番号を使って識別データを作成する。そのとき各構成要素の属性データも与えるものとする。すなわち、識別データとして以下を与える。

ア. 計算順序：最上流を1として、順次連続

番号を付ける。

イ. 識別番号：表-1の識別番号

ウ. 入力地点番号：(1)のルールに従って付
けた入力地点の地点番号

エ. 加える地点数：入力地点の入力データを
上流の出力地点の値やその合計値を
使って表わすとき、その合計する地点
数(≤ 2)。

オ. 加える地点番号1：上記エ. で使う一つ目の地点番号

カ. 加える地点番号2：上記エ. で使う二つ目の地点番号 (加える地点数=2のときのみ)

これら流域、河道及び上流端の識別データと一緒に以下の諸元も同時に設定する

キ. 流域面積：流域又は上流端の場合に入力する

ク. 河道延長：河道の場合に入力する

ケ. 河道定数 α ：河道の場合に入力する

コ. 河道定数 m ：河道の場合に入力する

湧別川丸瀬布を例にとり、具体的に番号を付け、識別データを作成していくと以下のようになる。

- ① まず、流域・河道ネットワーク図を描き(図-1)、(1)に述べた方法にしたがって、流域、河道、合流点に上流から地点番号を付ける。図-1の○印が「地点」である。
- ② 次に、表-2を作り、計算地点を上流から順に並べる。(図-1の場合、19地点ある)
- ③ 識別番号を表-1の規則にしたがって設定し、入力地点番号を指定する。
- ④ 入力地点の流量をどの地点のデータを使って求めるかを指定する。

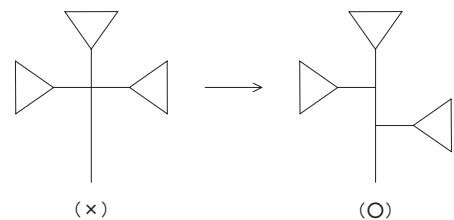


図-2 流域の配置方法

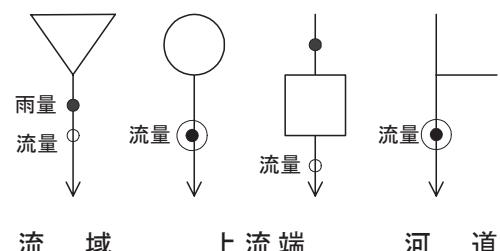


図-3 入・出力地点

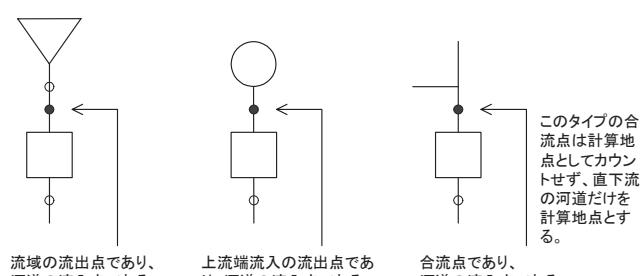


図-4 地点数の節約

表-2 図-1に示す流域・河道ネットワークの識別データ

| ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | コ | 備考 |
|----|----|----|---|----|----|-------|-------|--------|--------|--------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 130.2 | 0 | 0 | 0 | 1-Ryu |
| 2 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 143.8 | 0 | 0 | 0 | 2-Ryu |
| 3 | 3 | 5 | 2 | 2 | 4 | 0.0 | 20500 | 1.3834 | 0.6765 | A-Kado |
| 4 | 1 | 7 | 0 | 0 | 0 | 82.9 | 0 | 0 | 0 | 3-Ryu |
| 5 | 4 | 9 | 2 | 6 | 8 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 1-Gou |
| 6 | 11 | 10 | 0 | 0 | 0 | 280.3 | 0 | 0 | 0 | 4-Ryu |
| 7 | 13 | 11 | 1 | 11 | 0 | 0.0 | 7300 | 1.5532 | 0.6642 | B-Kado |
| 8 | 11 | 13 | 0 | 0 | 0 | 44.2 | 0 | 0 | 0 | 5-Ryu |
| 9 | 14 | 15 | 2 | 12 | 14 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 2-Gou |
| 10 | 4 | 16 | 2 | 9 | 15 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 3-Gou |
| 11 | 1 | 17 | 0 | 0 | 0 | 120.6 | 0 | 0 | 0 | 6-Ryu |
| 12 | 4 | 19 | 2 | 16 | 18 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 丸瀬布 |

4.3 洪水予測式の記述例

流域と河道はその数(出現順位)を変数として、拡大システム方程式の係数行列をプログラム上に記述する。ただし、状態変量を確定するためには、河道の流入量は流域と河道の数だけでなく、その接続の仕方も決める必要がある。**表-2**に示す流域・河道ネットワーク識別データは、流域や河道の接続の仕方も表しているので、これを使えば j 番目の河道の流入高 $q_{o,j}$ を既知の状態変量を用いて算出できる。

湧別川丸瀬布地点においては、図-1に示すように、この流域は 6 流域($N=6$)と 2 河道($M=2$)から成り、各河道流入高は次式で表わされる。

$$\text{河道 } A \text{ の流入高 : } q_{o,1} = (x_{1,1}^{1/p_2} A_1 + x_{1,2}^{1/p_2} A_2) / (A_1 + A_2)$$

$$\text{河道 } B \text{ の流入高 : } q_{o,2} = x_{1,4}^{1/p_2}$$

また、湧別川丸瀬布地点における流出高は、次式で表される。

$$q_{\text{丸瀬布}} = \left\{ y_{1,1}^{1/p_{4,1}} A_A + x_{1,3}^{1/p_2} A_3 + y_{1,2}^{1/p_{4,2}} A_B + x_{1,5}^{1/p_2} A_5 + x_{1,6}^{1/p_2} A_6 \right\} / \Sigma A \quad (18.50)$$

ここで、 $A_A = A_1 + A_2$, $A_B = A_4$, $\Sigma A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$

したがって、観測方程式の係数ベクトル H は式(18.51)と式(18.52)で表される。

$$H = [h_i], i = 1, \dots, 16$$

(6 流域 2 河道なので $2 \times (6+2) = 16$ の要素となる)

$$H_{\text{流域}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ h_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ h_9 \ 0 \ h_{11} \ 0]$$

$$h_5 = \frac{\partial h}{\partial x_{1,3}} = \frac{1}{p_2} x_{1,3}^{1/p_2-1} \frac{A_3}{\Sigma A}$$

$$h_9 = \frac{\partial h}{\partial x_{1,5}} = \frac{1}{p_2} x_{1,5}^{1/p_2-1} \frac{A_5}{\Sigma A}$$

$$h_{11} = \frac{\partial h}{\partial x_{1,6}} = \frac{1}{p_2} x_{1,6}^{1/p_2-1} \frac{A_6}{\Sigma A} \quad (18.51)$$

$$\begin{aligned}
 H_{\text{河道}} &= [h_{13} \quad 0 \quad h_{15} \quad 0] \\
 h_{13} &= \frac{\partial h}{\partial y_{1,1}} = \frac{1}{p_{4,1}} y_{1,1}^{1/p_{4,1}-1} \frac{A_1 + A_2}{\Sigma A} \\
 h_{15} &= \frac{\partial h}{\partial y_{1,2}} = \frac{1}{p_{4,2}} y_{1,2}^{1/p_{4,2}-1} \frac{A_4}{\Sigma A}
 \end{aligned} \tag{18.52}$$

流域・河道ネットワーク識別データを用いて、式(18.51)と式(18.52)の係数ベクトル H を自動設定するには、以下に示す手順に従えばよい。表-2 に示される計算順序 19 の地点は丸瀬布であり、そこから上流に向かって最初に出てくる本川河道が計算順序 3 の A 河道である。この間に出てくる本川流域(流域 3 と 6)と、その間に合流する支川において最初に出てくる B 河道ならびに支川流域(流域 5)の状態変量を抽出することにより、係数ベクトル H が記述される。

文責 宮武 真由子
星 清

参考文献

- 1) (財) 北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行: 単一流域を対象とした貯留関数法の精度比較, 189p., 2002.
- 2) (財) 北海道河川防災研究センター・研究所編集・発行: 実時間洪水予測システム理論解説書, 396p., 2004.
- 3) 星 清・片山直樹: 一般化貯留関数法を用いた洪水予測手法の改良, 研究所紀要(XVI), (財) 北海道河川防災研究センター, pp. 407-438, 2005.
- 4) (財) 北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行: 一般化貯留関数法による流域流出解析・河道洪水追跡実用計算法, 152p., 2001.
- 5) (財) 北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行: 対話式洪水流出計算マニュアル(第2版), 119p., 2005.
- 6) 星 清・東海林 勉・藤田 晓: 短時間予測降雨における誤差指標の総合化, 研究所紀要(XVI), (財) 北海道河川防災研究センター, pp. 379-404, 2005.

塾長・塾生プロファイル

塾生ゼミ参加感想文

塾 長

星 清

KIYOSHI
HOSHI

氏 名：星 清（ほし きよし）
生 年：1943年
最終学歴：北海道大学大学院工学研究科
土木工学専攻修士課程 工学博士
勤 务 先：(財)北海道河川防災研究センター
研究所長・理事



塾 生

櫻庭 哲也

TETSUYA
SAKURABA



氏 名：櫻庭 哲也（さくらば てつや）
生 年：1963年
最終学歴：室蘭工業大学工学部化学工学科
勤 务 先：(株)トライム

臼谷 友秀

TOMOHIDE
USUTANI



氏 名：臼谷 友秀（うすたに ともひで）
生 年：1968年
最終学歴：室蘭工業大学大学院工学研究科
土木工学専攻修士課程
勤 务 先：(財)日本気象協会 北海道支社

谷瀬 敦

ATSUSHI
TANISE



氏 名：谷瀬 敦（たにせ あつし）
生 年：1968年
最終学歴：北海道大学大学院工学研究科
土木工学専攻修士課程
勤 务 先：(独)北海道開発土木研究所

川口 貴

TAKASHI
KAWAGUCHI



氏 名：川口 貴（かわぐち たかし）
生 年：1973年
最終学歴：室蘭工業大学工学部材料物性工学科
勤 务 先：(株)北開水工コンサルタント

三田村 一弘

KAZUHIRO
MITAMURA



氏 名：三田村 一弘（みたむら かずひろ）
生 年：1974年
最終学歴：北海学園大学工学部土木工学科
勤 务 先：(株)北開水工コンサルタント

宮武 真由子

MAYUKO
MIYATAKE



氏 名：宮武 真由子（みやたけ まゆこ）
生 年：1974年
最終学歴：室蘭工業大学大学院工学研究科
建設システム工学専攻修士課程
勤 务 先：(財)北海道河川防災研究センター

須藤 哲寛

NORIHIRO
SUDO



氏名：須藤 哲寛（すどう のりひろ）
生年：1975年
最終学歴：北海道大学大学院工学研究科
環境資源工学専攻修士課程
勤務先：(財)日本気象協会 北海道支社

秋田 大輔

DAISUKE
AKITA



氏名：秋田 大輔（あきた だいすけ）
生年：1975年
最終学歴：北海学園大学工学部土木工学科
勤務先：(株)リブテック

佐藤 嘉昭

YOSHIAKI
SATOH



氏名：佐藤 嘉昭（さとう よしあき）
生年：1976年
最終学歴：弘前大学大学院農学研究科
農業システム工学専攻修士課程
勤務先：(独)北海道開発土木研究所

仙庭 真司

SHINJI
SENBA



氏名：仙庭 真司（せんば しんじ）
生年：1980年
最終学歴：北海道大学工学部土木工学科
勤務先：(株)リブテック

伊賀 久晃

HISAACI
IGA



氏名：伊賀 久晃（いが ひさあき）
生年：1975年
最終学歴：北見工業大学大学院工学研究科
土木開発工学専攻修士課程
勤務先：(株)北開水工コンサルタント

片山 直樹

NAOKI
KATAYAMA



氏名：片山 直樹（かたやま なおき）
生年：1976年
最終学歴：北海学園大学工学部土木工学科
勤務先：(株)リブテック

東海林 勉

TSUTOMU
TOHKAIRIN



氏名：東海林 勉（とうかいりん つとむ）
生年：1976年
最終学歴：北海学園大学工学部土木工学科
勤務先：(株)シン技術コンサル

※所属は、平成18年3月31日時点のものです。

塾生ゼミ参加感想文

櫻庭 哲也

昨年4月より始まった流出解析ゼミにおいて、我々は洪水再現計算および予測計算に必要となる様々な概念・計算手法・モデルを学んだ。

最初は行列の概念から始まり、コレスキイ法を始めとする逆行列の解法、有効雨量を用いたハイドログラフの再現、未知パラメータの最適化手法、貯留関数法及びタンクモデルを用いたハイドログラフの最適化、カルマン・フィルターの理論を学んできた。

しかしながら、自分に限って言えば、これから仕事のためとは言え20年近く遠ざかっていた数学の世界および土木・水理学を学び直すことはかなりの苦痛を伴うことであり、決して平坦な道程ではなく、ドロップアウトしそうになったことも度々あった。このような自分を支えてくれたのは家族であり、同僚であり、会社であり、ゼミ出席の諸兄であり、とりわけ星所長である。今この場を借りて関係各位に深い感謝の意を表するものである。

今、このレポートを記述しつつ感じていることは、我々は洪水に関してある程度学んだ。ある程度なのである。すなわち、まだ知らないことが多くあるということである。確かに、我々は洪水に関して様々なことをこのゼミを通じて学んだ。洪水の再現計算や予測もある程度出来るようになった。しかし、これらは先人が苦労の上に苦労を重ねて築き上げた物の模倣でしかない。現在の我々の置かれている状況は、洪水というある意味で理論では予測不能な自然現象を磐石ではない理論によって防ごうとしている、または予想しようとしているという一見、矛盾している世界なのである。

すなわち、真に我々が行うべきことは、現在使用されているこの磐石ではない洪水予測理論をより磐石に近づけるために、より多くを学び、検討し、発見し、実践し、後進に対して伝えて行くことである。その先にある目標は、洪水による災害をゼロにするという崇高なものである。

これはまさに現在、星所長が我々に教えていることに他ならない。現在の我々(とりわけ自分)は、星所長の姿勢にこそ多くの学ぶべきである。

臼谷 友秀

平成16年4月に第1回目の流出解析ゼミが行われ、約40回の講義で貯留関数型流出モデルとカルマン・フィルター理論を組み合わせた洪水予測手法まで到達した。ゼミが開始した当初は聞き慣れない言葉・見慣れない数式が次々に現れ、何度も“分からぬ”といった顔をしていたると、その都度説明をいただき、どうにか講義についていくことができた。また、講義に加え、毎回出題していただいた課題も、途中で消化不良を起こさず2段タンク型貯留関数モデルの最適化までたどり着けた一因となっていた。

ゼミでは、貯留関数法の最適化に関する内容に留まらず、最近の論文を取り上げた講義、大学の先生を招いての講義など、最新の話題にまで触れる機会があり、充実した内容であった。特に印象に残るのは、星モデルの導出に関する講義である。このゼミを受ける前は、「貯留関数法はブラックボックスなのだから、流量が再現できればどんな式でも良いだろう。」などと考えていた。また、いくつもの貯留関数法があることからもそのように考えていた。しかし、ゼミ資料をもとに、kinematic wave式

を変換しその結果が星モデルになったとき、星モデルは集中型モデルであり、ブラックボックスではないということに気が付いた。集中型＝ブラックボックスと混同していた私にとって、この点に気づけたことも、ゼミでの大きな収穫であった。

最後に、平成 15 年台風 10 号による日高地方での大雨や平成 17 年台風 14 号など、大きな災害が毎年発生し、一方では、地球温暖化に伴う自然災害の頻発が予想されている。加えて防災に対する意識が高まりつつある状況にあっては、災害に関する予測情報の必要性は更に高まるものと考えられる。これまで学んだことを、実時間洪水予測の局面で活用することを次の目標としたい。

谷瀬 敦

本流出解析ゼミには第 11 回目から参加しました。どんな内容のゼミをやっているのかも解らなく、また、途中からの参加でありゼミについて行けるかなと心配でしたが、案の定、よく分からぬままゼミの終わりを迎ってしまいました。業務上、オンラインの洪水予測を行うことや、河川計画検討のための流出再現計算を行うことが多かったため、少しは流出解析も身近なものとしてあったはずですが、今考えると、当時は流出解析の基礎知識もほとんどないままに洪水予測を行っていたのだなと思い起こされます。本ゼミで、流出解析の手法を学び、その難しさを実感しました。ゼミはこれで終わってしまいますけど、まだ、ゼミ当初の資料全てを勉強したわけではなく、かなりの部分が手付かずになっていますので、少しずつでもやって行きたいと考えています。

短い間でしたけど、楽しくゼミを受けることが出来ました。学生時代以来、久しぶりに勉強をさせてもらい、いい経験になりました。ありがとうございました。

川口 貴

平成 17 年 8 月からと、ゼミとしては終盤に差し掛かるところからの途中参加となりましたが、幸いにもカルマン・フィルター理論や複合流域における洪水予測など本ゼミの肝となるところをなんとか受講する事が出来ました。

途中参加ということもあり講義についていくことで精一杯ではありましたが、普段から洪水等河川にかかわる仕事をしていながらも、洪水予測理論等に触れる機会がなかったため大変参考になりました。今後業務に生かすべく更なる精進に努めたいと思います。

三田村 一弘

「流出解析ゼミ」が始まる前は、星モデルによる流出解析やプログラムについての知識や経験がほとんどなく、多少の戸惑いを覚えながらのスタートでした。初回のゼミで、コレスキーフィルタのプログラムを自分で作るという宿題が出たときには、かなり困惑しました。単に答えを出すだけならば、さほどの問題はないのですが、理論の流れを理解し、それをプログラム化するのにかなり苦労したことを覚えています。

その後、有効雨量による貯留関数法、1 段タンク型貯留関数法、2 段タンク型貯留関数法(単流域・複合流域の流出計算・最適化)の計算へと進んできましたが、全体的にあまり出来のいい方ではなかつ

たような気がしています。中でも数学的最適化を理解するのにかなり苦労しました。

流出解析あるいは数値計算全般についても言えることだと思いますが、必要なのは数学とプログラム能力です。ゼミの中でも大量の数式が出てきましたが、なるべく自分で展開してみて、理論を理解することには努めたつもりです。しかし、当たり前かもしれません、たとえ式の展開とその意味を理解しても、プログラムを使って求める答えを導けなければ、数値計算自体をマスターしたとは言えないということを実感できたのは大変貴重な経験でした。今後は、ゼミで学んだ知識を業務やさまざまな数値計算に生かし取り組んでいければ幸いです。

最後に、解説書を読むだけではなかなか理解できない理論を私たちにもわかるよう平易に解説してください、また熱心にご指導いただいた星研究所長に深く感謝いたします。

宮武 真由子

いよいよ「流出解析ゼミ；通称星ゼミ」を取りまとめたテキストが発刊されます。約1年8ヶ月間に亘って行われたゼミの取り纏めを、ゼミ参加者の皆さんのご協力を仰ぎながら、無事成し遂げられたことに安堵しております。

私は、ゼミが開始されてから約2ヶ月遅れて参加することになりました。（財）北海道河川防災研究センターに丁度出向してきたばかりで、何をやるのかあまり分からずに参加したのですが、手渡された「第1回ゼミ」の行列式を見るなり、学生時代から微分・積分・行列が大の苦手であったため大変当惑しました。

実際のゼミでは、星所長が難解な理論を、厳しくもひとつひとつ丁寧に教えてくださいました。しかしながら、自分の努力が至らず、たびたび宿題を家に持ち帰ってプログラムと格闘しなくてはなりませんでした。挫折しそうにもなりましたが、星所長がいまなお、様々な工夫を取り入れながら、新しい可能性に挑戦し続けておられる姿を見て、自分はもっと頑張らなくてはならないという気持ちになり、なんとか踏みとどまることができました。

また、このテキストの参考文献となっている「現場のための水文学」を読んだ際に、20年前にその本の作成に携わった技術者の方々と自分とを比較し、自分の力不足を感じると同時に、改めてこの方々のご努力で、今の私たちは仕事をしているのだと実感しました。

新しい貯留閑数法の習得以外にも、得るものが多く充実したゼミでした。社会人になってこのような講義を受けることができ、とても幸せに思います。このような機会を与えてくださった方々、また、ご指導くださいました星所長にこの場をお借りして感謝申し上げます。ありがとうございました。

最後に、このテキストがたくさんの河川技術者の方々に使ってもらえるよう願っています。

須藤 哲寛

私は、昔から『川』というものに、どこか惹かれるところがあり、大学では、河川工学を専攻していました。また、休みの日には、大河に釣り糸を垂れ、太公望となっています（実際には、そんな、優雅な響きからはほど遠く、一日中歩き回るハードワークですが…）。

現在の職場では、流量観測や気象観測のフィールドワークからレーダー雨量解析や洪水予測などの気象や水文現象を対象とした業務に携っています。

洪水予測に携る人間として、流出解析というのは、基本だと思っています。しかし、日々業務の中では、詳細な内容を理解することなく、完成されたプログラムを編集するのがほとんどで、自分も、まさにそんなふうでした。

そんな中、今回の星先生による流出解析ゼミが開かれるとのことでの基礎から勉強するまたとない機会だと思い、参加させて頂きました。ゼミにおいては、数学や流出解析の基本的なことから、実際に現場で使われている1段・2段タンク型貯留関数法とカルマン・フィルターを組合せた手法まで本当に丁寧に教えて頂きました。

自分としては、教えて頂くという身ながら反省すべき点も多々あり、難解なところではうつらうつらしてしまい、なんか怒られることもありました(すいませんでした)。また、欠席の遅れ分を取り戻すのに非常に苦労し、結局、全ての内容をこのゼミで理解できたとは言い難いのかかもしれません。しかし、いままで全くのブラックボックスだった流出解析が、身近な存在に感じられたことは事実で、ゼミ自体が終わっても、ここが終わりではなく、ゼミで勉強したことが、これから基礎になっていくだろうと思っています。

今回のゼミは、技術力の向上という面もありますが、会社の枠組みを超えたゼミということで、コンサルタント・研究機関・役所等で同じような調査研究業務に取組んでいる人の顔が見えたということも非常に良かったと思います。ゼミでは、星先生だけではなく、他の先輩方からも多数ご指導頂きました。また、一緒にゼミに参加した方を通じて、河川・防災への取組みを知る良い機会となり、また、同じような年代の方からいろいろ教えて頂いたりしたことが、いまでも日々の業務に対する刺激となり、励みとなっています。

現在は、先人の苦労により、社会基盤も整備され、昔に比べると水害も起りにくくなつたと思います。しかし、地下を含めた生活が当たり前となつたり、地球温暖化などの気候の変化が指摘されたりと、新しい発想や柔軟な考えも必要となつています。これからは、ここで勉強したことを糧にして、洪水災害の減少に少しでも役に立てればと思います。

最後に、星先生以下、北海道河川防災研究センターの方々、河川工学の諸先輩方には、非常に御世話になりました。また、一緒にゼミに参加した皆さんにもお世話になりました。ありがとうございます。

伊賀 久晃

(財)北海道河川防災研究センターに出向して2年目の4月からゼミが始まりましたが、気付くと次回が最後のゼミとなります。

第1回目のゼミは顔見せということもあり、自己紹介と軽い講義で終わるかと思いつや、いきなり講義に入り、連立方程式の解法であるクラウト法やコレスキーフ分解などの説明があり、いきなりパニックに陥った気がします。さらに、学生気分で講義を聞いていたところ、星所長から「伊賀！ 1回目と2回目のゼミの内容を講義ノートに取り纏めるように」という矢が突然飛んできました。何度も何度も手直しを受け、OKサインをもらうまでの1ヶ月余りは生きた心地がしなかつたのを思い出します。

その後、約1年8ヶ月間ゼミが続きましたが、私が最も苦労したのは、やはり行列演算でした。皆勤賞を目指していたのですが、出張でゼミをしばしば欠席していました。出張から戻ると机の上にはどさつと大量のゼミ資料が置かれており、移動の疲れがさらに…という事もありました。

センターの調査研究業務を通じた耳学問として、「一般化貯留関数法」、「損失項を含む貯留関数法」および「地下水流出を含む貯留関数法」が現場での洪水解析やカルマン・フィルター理論と組み合わせた洪水予測に使われていることは知っていました。しかし、なぜ3種類もの貯留関数法があるのか、どのような場合にどのモデルを使つたらいいのかの疑問がゼミの経過とともに少しづつ解けていきました。いずれの貯留関数法を実際に使うにしても、数学的最適化手法を用いてモデル定数を決定する方法をゼミで学ぶことができました。

單一流域及び分割流域と河道から成る複合流域における洪水流出解析に3種類の貯留関数法を適用して、モデルの検証を行う論文を土木学会の北海道支部と年次学術講演会で発表できたことは、ゼミを受けた成果の最大の収穫であったと考えています。約40回ものゼミの最中、良きにつけ悪しきにつけいろんな経験に遭遇しました。これからは建設コンサルタントの技術者として、ゼミで学んだことを現場で大いに応用していくように努力していきたいと思います。星所長、ありがとうございます。

秋田 大輔

星モデルとの付き合いは卒業論文からのなので、かれこれ8年になります。卒論をはじめた時は、星モデル？流出解析？貯留関数法？といった感じでしたが、時間の経過というのは恐ろしいもので、今では遠くから「ダイスケ～～！！」と星所長に呼ばれることに慣れてしまっている自分がいます。

とくに、(財)北海道河川防災研究センターに出向していた3年間では、「文章が全然ダメだ」、「よくわからないプログラムだな」と言われ続けました。現在、会社に復帰して2年目になりますが、今となってはあんなに親身に指導を受けることはなく、自分との戦いなので、その鍛えられた3年間は幸せな時間だったな～と痛感しています。この経験を今後の人生の宝物として大切にしていきたいです。

また、平成12年度の星ゼミに続き、今回の星ゼミにも参加させていただいたことにより、他の技術者とのつながりを持てたのも、素晴らしいことだったと思います。

今後、星モデルユーザーが増え、多くの河川計画や洪水予測に反映されることを望みます。星所長にはこれからもご迷惑おかけすると思いますが、ご指導よろしくお願ひします。

片山 直樹

(財)北海道河川防災研究センターの星所長の号令のもとに始まった「流出解析ゼミ」も、約1年8ヶ月に亘る長丁場を経て終わりを告げようとしている。ここで、このゼミへの参加意義などを自分なりに少し振り返ってみようと思う。

私は入社以来、「流出解析」をベースとして仕事をしてきたことから、このゼミも”一から学ぶ”のではなく、”理解を深める”というスタンスで講義に参加しようと軽く考えていた。しかしながら、この考えが”甘かった”と気づくのにそう時間は要しなかったことは、この本に掲載されている数々の数式、計算例、プログラムを見てもらえば容易に想像できることと思う。初耳であった数々の専門用語に戸惑い、多岐にわたる解析手法に悪戦苦闘しながら解答を導き出している自分を客観的に見て、学生時代を思い出さずにはいられなかったものです。

穴だらけだった知識に満足していた今までの自分が恥ずかしく思うようになったのはゼミも終わり

に近づく頃であった。今では、このゼミで得た知識とテクニックを今後の業務に生かすべく虎視眈々と狙っている毎日である。このように思えるのも、一人の河川技術者として成長し自信をつけた証であると確信している。

最後に、このゼミに参加する上でお世話になった数々の人達に感謝の意を表すると共に、ゼミ参加者の皆様、そして毎月欠かさず講義を行って頂いた星所長、大変お疲れ様でした。

佐藤 嘉昭

2004年4月、私が新人として北海道開発土木研究所に赴任して数日後、当時の上司に「星先生の流出解析ゼミに参加する気はあるか?」と聞かれたことがこのゼミに参加するきっかけだった。私は私で「新人には選択肢はないのだろう、まあ何事も勉強だ」と思い、このゼミを受けるに至った次第である。

正直、私は現職場に来るまでは水文学・水理学との縁は非常に浅かった。大学時代にもそれらの講義はあったが、殆ど基本的なものであったこと、大学院ではなおさら水関係に触れる機会がなかったことから、水に関する知識が非常に乏しいのがゼミを受けた当初の実情であった。また、学生・院生時代に数学をやっていなかった(というより特に必要としていなかった)こともここにきて災いした。今まで聞いたことのなかった数学用語(行列の転置など)を耳にしたときは「え? 何じゃそりや?」と慌てたものである。プログラミングにしても、学生時代にごく簡単なものは作ったことはあったがそれはBasicであり、Fortran言語自体ゼミに参加して初めて耳にした言葉である。

このように、ゼミを受けた当初は前途多難な状態であったが、逆に新鮮な一面もあった。水文・水理学の話を聞いているときは、「そういえば6~7年前にも同じ話を聞いた気がするが、こういうことだったのか」という思いにとらわれたものである。数学の話にしても、今まで知らなかつたテクニック(行列の三角化法や非線型方程式のニュートン法による数値解法)を知るにつけ、数学の奥深さを感じたものである。プログラムについては、一緒にゼミを受けている臼谷さんに相談しつつ覚えていき、初めて自作のプログラムができたときはプログラミングの喜びを感じたものである。当時水分野に不安のあった私にとって、ある意味荒療治だったのかもしれない。

ところが、回を重ねるごとに内容は濃密・複雑化し、宿題として出されるプログラム計算もうまくいかないことが多くなった。原因不明のプログラムのエラーが生じたり、プログラムが作動したと思ったら不自然な値が出まくったり…。正直なところ、このゼミの内容を十分に理解し、フォローできたかどうか自分でも疑問を感じている。

ゼミを受けたこの1年8ヶ月を振り返って見るに、習得できたことと理解できなかつたことが半々であったように思う。今後も河川の現場で仕事をする機会が多くなるにつれて、このゼミで学んだ事例に遭遇するだろう。今は理解できなかつたことも実務経験を積むことで実際問題を解決しつつ、今後の調査研究業務に役立てていきたいと思う。

東海林 勉

星ゼミが開催されることになった当時、私は(財)北海道河川防災研究センター・研究所、すなわち星所長の下で仕事をしていました。しかし、私は星所長が考案した「星モデル」なる洪水流出解析手法がいかなるものであるか全くわかつていませんでした。勉強しようとして、研究所がこれまで発行

してきた報告書を開いてみましたが、難しい数式ばかりで、さっぱり理解できず、どうしようかと悩んでいました。そんなとき、星所長が突然、「ゼミをやるぞ」と言ったのです。突然のことで一瞬驚きましたが、悩んでいた私にとっては一種の救いの神であったことを思い出します。

洪水流出に関する講義が1ヶ月に2回ペースで星ゼミが始まりました。始まってそうそう、私は大きな壁にぶつかったのです。それまで、私は Fortran プログラムを作った経験もなく、まったくの素人でした。洪水流出に関する理論を理解するだけでも一苦労なのに、プログラムも合わせて理解し、作成することを余儀なくされました。しかし、ゼミではそんなことはお構いなしに毎回、理論の講義が行われ、そしてプログラムで解かざるを得ない数題の宿題が出されました。そのため毎回宿題1つを解くにも多くの時間を費やしました。幸い、星所長が隣にいましたので、分からぬところは質問し、叱咤激励を受けながらも(叱咤が多くあった)、自分で一つ一つ問題を解いたことにより、理論を理解し、またプログラムも作ることができるようにになっていました。ゼミが始まった当初は、何が何だか分からぬことだらけでしたが、今そのゼミを終えて、1年8ヶ月間を振り返ってみると、大変充実したゼミがありました。

これも全て星所長のおかげであり、感謝の気持ちでいっぱいです。今までありがとうございました。これからも色々お世話になりますが、宜しくお願ひ致します。

仙庭 真司

この流出解析ゼミに出席し始めてから、早1年8ヶ月が経過しました。私が(株)リブテックへの入社と同時にこのゼミへ参加することになりました。学生時代は沿岸海洋の研究室であり、同じ土木工学科といえども、洪水流出解析に関しては全くの無知でした。

1回目のゼミでは逆行列の算定方法が出てきて、水文システムの同定とどんな関係があるかもわからず、疑問に思っていました。また、非線形方程式の数値解法は、大学の授業で習った覚えはありましたがあとほとんど忘れており、思い出しながらでした。また、Fortran プログラムも大学で少しだけ経験した覚えがありましたが、そのときはほとんど理解していなかったため、プログラムを作るのは大変でした。しかし、ゼミの内容が本格的に洪水流出解析となって、簡単な貯留関数法から段階的に複雑な手法へと移行するにつれて、自分でプログラムを作れるようになっていきました。また、ゼミの内容を取りまとめる講義ノートを分担作成することで、いくつかの貯留関数法とその数学的最適化手法を覚え、現在ではゼミで習得した貯留関数法とそれらの最適化手法についての論文を作成することができるまでになりました。とくに、二階ニュートン法やダビドン法による最適化に不可欠な二次微係数の算定方法に関しても、一般式を誘導することができ、貯留関数法のモデル定数最適化の研究に少なからず貢献できたと思っています。

今後は、カルマン・フィルター理論による洪水予測手法に関する講義を糧として、調査研究テーマを流出解析から予測問題へと移行して、より一層知識を深めていきたいと思います。

実践流出解析ゼミ [講義テキスト編]

【発 行 日】 平成 18 年 7 月

【発 行 所】 財団法人 北海道河川防災研究センター・研究所

〒060-0807 札幌市北区北 7 条西 4 丁目 伊藤 110 ビル

TEL (011) 729-8141 FAX (011) 729-3380

<http://www.bousai.or.jp>

【印 刷 所】 株式会社 アイワード