ただし、$q_2 > q$ のときは

$$\begin{aligned} q_2 &= q \\ q_1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

とする。

2.3　1段目タンクの数値解法

１段目のタンクの解法にあたって、次の変数変換を行う。

$$y_1 = q_1^{p_2} \quad , \quad y_2 = \frac{d}{dt}\left(q_1^{\ p_2}\right) \tag{2.24}$$

その結果、式(2.1)～式(2.3)は以下のように表現される。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2 - 1} y_2 - \dfrac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \dfrac{r}{k_{12}} \end{cases} \tag{2.25}$$

ここに、

$$c_{13} = 1 + k_{13} \tag{2.26}$$

上式の未知定数はc_{11}, c_{12}, c_{13}の３つであり、これらの定数の最適化にはニュートン法を用いた。

式(2.25)はさらに式(2.27)のようにベクトル表示できる。

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \tag{2.27}$$

ここに、

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T \tag{2.28}$$

$$F(Y) = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$f_1(y_1, y_2) = y_2 \tag{2.30}$$

$$f_2(y_1, y_2) = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2 - 1} \; y_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \tag{2.31}$$

２階非線形方程式(2.27)を近似線形化する。１ステップ前における Y の値を Y^* とし、$F(Y)$ を１次の項まで Taylor 級数展開した式(2.32)を用いると、式(2.27)は式(2.33)に変換される。

$$F(Y) = F\left(Y^*\right) + A\left(Y^*\right)\left(Y - Y^*\right) \tag{2.32}$$

$$\frac{dY}{dt} = A\left(Y^*\right)Y + B\left(Y^*\right) \tag{2.33}$$

ここに、

$$A\left(Y^*\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \\ &= -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left(y_1^*\right)^{p_1/p_2 - 2} \left(y_2^*\right) - \frac{c_{13}}{k_{12} p_2} \left(y_1^*\right)^{1/p_2 - 1} \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(y_1^*\right)^{p_1/p_2 - 1} \tag{2.36}$$

$$B\left(Y^*\right) = F\left(Y^*\right) - A\left(Y^*\right)Y^* = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \end{bmatrix}^T \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{k_{11}}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left(y_1^*\right)^{p_1/p_2 - 1} \left(y_2^*\right) \\ &\quad + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) \left(y_1^*\right)^{1/p_2} + \frac{r}{k_{12}} \end{aligned} \tag{2.38}$$

式(2.33)を数値計算の便宜上、離散化方程式に変換する。

$A\left(Y^*\right)$ と $B\left(Y^*\right)$ が定係数行列の時、k を任意のタイム・ステップとして、式(2.33)は差分方程式(2.39)に変換できる。

$$Y_{k+1} = \Phi Y_k + \Gamma B_k \tag{2.39}$$

ここに、

$$
\begin{cases}
Y_k = \left[y_1 \;\; y_2 \right]_k^T \quad , \quad B_k = \left[0 \; b_2 \right]_k^T \\
\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}
\end{cases}
\tag{2.40}
$$

なお、Φ および Γ は次の級数和で求められる。

$$
\begin{aligned}
\Phi &= e^{AT} \\
&= I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \cdots + \frac{1}{m!}(AT)^m
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \left(e^{AT} - I \right) A^{-1} \\
&= T\left(I + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 + \cdots + \frac{1}{m!}(AT)^{m-1} \right)
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

ここに、I ：単位行列、T ：計算時間間隔

通常、級数は第５項まで展開すれば十分なので、$m=4$ としたときの Φ および Γ の要素を求めると、次の通りである。

$$
\begin{cases}
\phi_{11} = 1 + \frac{1}{2}a_1 T^2 + \frac{1}{6}a_1 a_2 T^3 + \frac{1}{24}a_1 a_3 T^4 \\
\phi_{12} = T\left(1 + \frac{1}{2}a_2 T + \frac{1}{6}a_3 T^2 + \frac{1}{24}a_2 a_4 T^3 \right) \\
\phi_{21} = a_1 \phi_{12} \\
\phi_{22} = 1 + a_2 T + \frac{1}{2}a_3 T^2 + \frac{1}{6}a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{24}\left(a_1 a_3 + a_2^2 a_4 \right) T^4
\end{cases}
\tag{2.43}
$$

$$
\begin{cases}
\gamma_{11} = T\left(1 + \frac{1}{6}a_1 T^2 + \frac{1}{24}a_1 a_2 T^3 \right) \\
\gamma_{12} = T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_2 T + \frac{1}{24}a_3 T^2 \right) \\
\gamma_{21} = a_1 \gamma_{12} \\
\gamma_{22} = \phi_{12}
\end{cases}
\tag{2.44}
$$

$$
a_3 = a_1 + a_2^2 \quad , \quad a_4 = a_1 + a_3
\tag{2.45}
$$

所要流出高q_1は、漸化式(2.39)により任意のタイム・ステップkにおける$y_1 = q_1^{p_2}$と$y_2 = \frac{d}{dt}\left(q_1^{p_2}\right)$の値が逐次計算されるので、式(2.24)を用いて次のように求められる。

$$q_1 = y_1^{1/p_2} \tag{2.46}$$

2.4 2段目タンクの数値解法

地下水流出成分の未知定数はk_{21}とk_{22}の２つとなる。これらの定数は、以下の方法により算出される。貯留関数による地下水流出成分を表す式(2.5)と式(2.6)は、以下のように変形される。

$$\frac{ds_2}{dt} = k_{21}\frac{dq_2}{dt} + k_{22}\frac{d^2q_2}{dt^2} = f_1 - q_2 \tag{2.47}$$

すなわち、

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + c_1'\frac{dq_2}{dt} + c_0'q_2 = c_0' f_1 \tag{2.48}$$

ここに、

$$c_1' = \frac{k_{21}}{k_{22}} \quad , \quad c_0' = \frac{1}{k_{22}} \tag{2.49}$$

フィルター成分分離法による線形方程式(2.8)と貯留関数法による線形方程式(2.48)は同じ表現になっており、全流出量qが浸透供給量f_1に置き換わっているだけである。

２式の関係を調べるために、式(2.48)に式(2.3)を代入すると、式(2.50)が得られる。

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + c_1'\frac{dq_2}{dt} + c_0'(1+k_{13})q_2 = c_0'k_{13}q_1 \tag{2.50}$$

式(2.50)の定数項部分に式(2.49)の関係式を代入すると、以下の式が得られる。

$$c_0'(1+k_{13}) = \frac{1+k_{13}}{k_{22}} \quad , \quad c_0'k_{13} = \frac{k_{13}}{k_{22}} \tag{2.51}$$

既往洪水の解析結果によれば、$k_{22} \gg 1$であることから、$1/k_{22} \approx 0$とみなすことができる。したがって、近似的に次式が成り立つと考えられる。