$$\begin{cases} p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ k_{11} = c_{11} A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \end{cases} \tag{2.4}$$

ここに、A：流域面積[km^2]、$\bar{r}$：平均雨量強度[mm/h]、c_{11}, c_{12}:未知定数

上式より、表面・中間流出成分はc_{11}, c_{12}, k_{13}の３つのパラメータによって表現することができる。

２段目のタンクについては以下の線形モデルを採用した。

$$\begin{cases} s_2 = k_{21} q_2 + k_{22} \dfrac{dq_2}{dt} & (2.5) \\ \dfrac{ds_2}{dt} = f_1 - q_2 & (2.6) \end{cases}$$

ここに、s_2:２段目タンク貯留高[mm]、k_{21}, k_{22}：未知定数、q_2:地下水流出高[mm/h]

１段目（表面・中間流出成分）の流出高q_1と２段目（地下水流出成分）の流出高q_2を合計して全流出高qとする。

$$q = q_1 + q_2 \tag{2.7}$$

2．2　流出成分の分離法

流出成分の分離は、日野・長谷部によって提案された「フィルター成分分離法」を用いて表面・中間流出成分と地下水流出成分に分離する。

日野らはフィルター成分分離法による地下水流出成分を線形方程式で表現可能であるとし、次式で表現した。

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c_1 \frac{dq_2}{dt} + c_0 q_2 = c_0 q \tag{2.8}$$

ここに、c_0, c_1:未知定数、q_2：地下水流出成分流量、q：全流出量

c_0とc_1は次式で与えられる。

$$c_0 = (\delta / T_c)^2 \quad , \quad c_1 = \delta^2 / T_c \tag{2.9}$$

ここに、T_c :地下水流出成分の分離時定数、δ :減衰係数

T_c は、ハイドログラフの低減部より決定される定数である。δ は、通常 2.0〜3.0 の値となるが、本検討では $\delta = 2.1$ とした。

式(2.8)の線形２階微分方程式は式(2.10)のベクトル微分方程式に変換できる。

$$\frac{dY}{dt} = AY + B \tag{2.10}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c_0 q \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

ここに、

$$y_3 = q_2 \quad , \quad y_4 = \frac{dq_2}{dt} \tag{2.12}$$

ここで、$a_1 = -c_0$, $a_2 = -c_1$, $b_2 = c_0 q$ とすると

式(2.11)は

$$Y = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

となる。

式(2.10)は次の差分方程式で表わされる。

$$Y_{k+1} = \Phi Y_k + \Gamma B_k \tag{2.14}$$

ここに、

$$\begin{cases} Y_k = \begin{bmatrix} y_3 & y_4 \end{bmatrix}_k^T \quad , \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \end{bmatrix}^T \\ \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.15}$$

なお、Φ および Γ は次の級数和で求められる。

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{AT} \\ &= I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \cdots + \frac{1}{m!}(AT)^m \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\Gamma = \left(e^{AT} - I\right)A^{-1}$$

$$= T\left(I + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{6}\left(AT\right)^2 + \frac{1}{24}\left(AT\right)^3 + \cdots + \frac{1}{m!}\left(AT\right)^{m-1} \right) \qquad (2.17)$$

ここに、I ：単位行列、T ：計算時間間隔

通常、級数は第５項まで展開すれば十分なので、$m=4$としたときのΦおよびΓの要素を求めると、次の通りである。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + \frac{1}{2}a_1 T^2 + \frac{1}{6}a_1 a_2 T^3 + \frac{1}{24}a_1 a_3 T^4 \\ \phi_{12} = T\left(1 + \frac{1}{2}a_2 T + \frac{1}{6}a_3 T^2 + \frac{1}{24}a_2 a_4 T^3 \right) \\ \phi_{21} = a_1 \phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_2 T + \frac{1}{2}a_3 T^2 + \frac{1}{6}a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{24}\left(a_1 a_3 + a_2^2 a_4\right)T^4 \end{cases} \qquad (2.18)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11} = T\left(1 + \frac{1}{6}a_1 T^2 + \frac{1}{24}a_1 a_2 T^3 \right) \\ \gamma_{12} = T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_2 T + \frac{1}{24}a_3 T^2 \right) \\ \gamma_{21} = a_1 \gamma_{12} \\ \gamma_{22} = \phi_{12} \end{cases} \qquad (2.19)$$

$$a_3 = a_1 + a_2^2 \quad , \quad a_4 = a_1 + a_3 \qquad (2.20)$$

タイム・ステップごとにy_3, y_4が逐次計算される。地下水流出成分q_2は次式より求められる。

$$q_2 = y_3 \qquad (2.21)$$

よって、表面・中間流出成分q_1は、

$$q_1 = q - q_2 \qquad (2.22)$$

となる。

ただし、$q_2 > q$ のときは

$$\begin{aligned} q_2 &= q \\ q_1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

とする。

2．3　1段目タンクの数値解法

１段目のタンクの解法にあたって、次の変数変換を行う。

$$y_1 = q_1^{p_2} \quad , \quad y_2 = \frac{d}{dt}\left(q_1^{\ p_2}\right) \tag{2.24}$$

その結果、式(2.1)～式(2.3)は以下のように表現される。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}}\dfrac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \dfrac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \dfrac{r}{k_{12}} \end{cases} \tag{2.25}$$

ここに、

$$c_{13} = 1 + k_{13} \tag{2.26}$$

上式の未知定数はc_{11}, c_{12}, c_{13}の３つであり、これらの定数の最適化にはニュートン法を用いた。

式(2.25)はさらに式(2.27)のようにベクトル表示できる。

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \tag{2.27}$$

ここに、

$$Y = \left[y_1 \quad y_2\right]^T \tag{2.28}$$

$$F(Y) = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

$$f_1(y_1, y_2) = y_2 \tag{2.30}$$