$$a_3 = a_1 + a_2^2 \quad , \quad a_4 = a_1 + a_3 \tag{1.24}$$

所要流出高 q は、漸化式(1.18)により任意のタイム・ステップ k における $y_1 = q^{p_2}$ と $y_2 = \dfrac{d}{dt}\left(q^{p_2}\right)$ の値が逐次計算されるので、式(1.3)を用いて次のように求められる。

$$q = y_1^{1/p_2} \tag{1.25}$$

1．2　モデル定数の最適化手法

モデル定数の最適化には一次微係数を用いるニュートン法を採用する。

(1)　感度係数（一次微係数）の算定

今、モデル定数が時間的に変化しないと仮定し、式(1.4)における変数 y_1 と y_2 に関する微分方程式をモデル定数 k_{11}, k_{12}, c_{13} で微分すると式(1.26)が得られる。

$$\frac{dU}{dt} = A_1 U + D \tag{1.26}$$

ここに、

$$U = \left[\frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} \frac{\partial y_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial y_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial y_2}{\partial c_{13}} \right]^T \tag{1.27}$$

$$A_1 = \frac{\partial F}{\partial Y} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{array} \right] \tag{1.28}$$

$$D = \left[0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \right]^T \tag{1.29}$$

$$
\begin{cases}
d_1 = \dfrac{\partial f_2}{\partial k_{11}} = -\dfrac{1}{k_{12}} \dfrac{p_1}{p_2} \left(y_1^*\right)^{p_1/p_2-1} \left(y_2^*\right) \\
d_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial k_{12}} = \dfrac{1}{k_{12}} \left\{ k_{11} \dfrac{p_1}{p_2} \left(y_1^*\right)^{p_1/p_2-1} \left(y_2^*\right) + c_{13} \left(y_1^*\right)^{1/p_2} - \left(r + q_0\right) \right\} \\
d_3 = \dfrac{\partial f_2}{\partial c_{13}} = -\dfrac{1}{k_{12}} \left(y_1^*\right)^{1/p_2}
\end{cases}
\tag{1.30}
$$

式(1.27)のベクトルUは、モデル定数$\left(k_{11}, k_{12}, c_{13}\right)$の変化が変数$\left(y_1, y_2\right)$の変化に及ぼす影響と解釈されるので、しばしば「感度係数」といわれ、感度係数に関する方程式(1.26)は「感度方程式」といわれる。

ここで感度方程式は、システム方程式と同一形式になることから、システム方程式(1.12)と同様に、式(1.26)は式(1.31)に変換される。

$$
U_{k+1} = \Phi_1 U_k + \Gamma_1 D_k \tag{1.31}
$$

ここに、

$$
\Phi_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\phi_{11} & 0 & 0 & \phi_{12} & 0 & 0 \\
0 & \phi_{11} & 0 & 0 & \phi_{12} & 0 \\
0 & 0 & \phi_{11} & 0 & 0 & \phi_{12} \\
\hline
\phi_{21} & 0 & 0 & \phi_{22} & 0 & 0 \\
0 & \phi_{21} & 0 & 0 & \phi_{22} & 0 \\
0 & 0 & \phi_{21} & 0 & 0 & \phi_{22}
\end{array}\right] \tag{1.32}
$$

$$
\Gamma_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} & 0 & 0 \\
0 & \gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} & 0 \\
0 & 0 & \gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} \\
\hline
\gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22} & 0 & 0 \\
0 & \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22} & 0 \\
0 & 0 & \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22}
\end{array}\right] \tag{1.33}
$$

係数行列Φ_1およびΓ_1は$\left(6 \times 6\right)$の正方行列であり、式(1.18)と同じ要素で構成されることがわかる。Φ_1とΓ_1の小行列が対角行列になるのは、式(1.28)の行列A_1の小行列が対角行列になっていることによる。また、$\phi_{11} \sim \phi_{22}$及び$\gamma_{11} \sim \gamma_{22}$の要素は、式(1.22)と(1.23)に示される係数と同一である。したがって、感度方程式(1.31)の解法は非常に容易となる。