ドログラフ減水部の標準逓減曲線から得られる流域に固有な値であるが､北海道内の河川における佐藤らの解析結果を基に、本報告では、 $\lambda = 0.019$ に固定した。

モデル定数 p_1 と p_2 に関しては、表面流が卓越する比較的大きな出水を解析対象とする場合、マニング則を想定すると、 $p_1 = 0.6, p_2 = 0.4648$ に近似できることが知られている。

モデル定数 k_{11} と k_{12} については、既往研究成果から次の関数形を仮定する。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11} A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12} k_{11}^2 (\bar{r})^{-0.2648} \end{cases} \tag{1.2}$$

ここに、 A ：流域面積[km^2]、 $\bar{r}$ ：平均雨量強度[mm/h]、 c_{11}, c_{12} ：未知定数

モデル定数 k_{11} は流域特性値に、k_{12} は流域、降雨特性値の双方に依存して変化するので、各定数の流出に及ぼす影響を独立に評価できないことになる。一方、係数 c_{11} と c_{12} は流域・降雨特性に依存しないことが望ましく、互いに無相関であれば、それぞれの効果を独立に評価する事ができる。

この場合、未知パラメータは、 c_{11}, c_{12}, k_{13} の３個となる。

１．１　非線形方程式の数値解法

式(1.1)の貯留関数モデルの解法にあたって、次の変数変換を行う。

$$y_1 = q^{p_2} \quad , \quad y_2 = \frac{d}{dt}\left(q^{p_2}\right) \tag{1.3}$$

式(1.1)と(1.3)より、非線形連立常微分方程式(1.4)を得る。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{k_{11}}{k_{12}} \dfrac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2 - 1} y_2 - \dfrac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \dfrac{1}{k_{12}}\left(r + q_0\right) \end{cases} \tag{1.4}$$

ここに、

$$c_{13} = 1 + k_{13} \tag{1.5}$$

式(1.4)はさらに式(1.6)のようにベクトル表示できる。

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \tag{1.6}$$

ここに、

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T \tag{1.7}$$

$$F(Y) = \begin{bmatrix} f_1(y_1,\ y_2) \\ f_2(y_1,\ y_2) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$f_1(y_1, y_2) = y_2 \tag{1.9}$$

$$f_2(y_1, y_2) = -\frac{k_{11}}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}}(r + q_0) \tag{1.10}$$

２階非線形方程式(1.6)を近似線形化する。1ステップ前における Y の値を Y^* とし、$F(Y)$ を１次の項まで Taylor 級数展開した式(1.11)を用いると、式(1.6)は式(1.12)に変換される。

$$F(Y) = F(Y^*) + A(Y^*)\,(Y - Y^*) \tag{1.11}$$

$$\frac{dY}{dt} = A(Y^*)Y + B(Y^*) \tag{1.12}$$

ここに、

$$A(Y^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \\ &= -\frac{k_{11}}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)\left(y_1^*\right)^{p_1/p_2-2}\left(y_2^*\right) - \frac{c_{13}}{k_{12}p_2}\left(y_1^*\right)^{1/p_2-1} \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -\frac{k_{11}}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}\left(y_1^*\right)^{p_1/p_2-1} \tag{1.15}$$

$$B(Y^*) = F(Y^*) - A(Y^*)Y^* = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \end{bmatrix}^T \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{k_{11}}{k_{12}}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)\left(y_1^*\right)^{p_1/p_2-1}\left(y_2^*\right) \\ &\quad + \frac{c_{13}}{k_{12}}\left(\frac{1}{p_2} - 1\right)\left(y_1^*\right)^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}}(r + q_0) \end{aligned} \tag{1.17}$$

式(1.12)を数値計算の便宜上、離散化方程式に変換する。

$A\left(Y^*\right)$と$B\left(Y^*\right)$が定係数行列の時、kを任意のタイム・ステップとして、式(1.12)は差分方程式(1.18)に変換できる。

$$Y_{k+1} = \Phi Y_k + \Gamma B_k \tag{1.18}$$

ここに、

$$\begin{cases} Y_k = \left[y_1 \;\; y_2\right]_k^T \quad , \quad B_k = \left[0 \; b_2\right]_k^T \\ \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1.19}$$

なお、Φ および Γ は次の級数和で求められる。

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{AT} \\ &= I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \cdots + \frac{1}{m!}(AT)^m \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left(e^{AT} - I\right)A^{-1} \\ &= T\left(I + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 + \cdots + \frac{1}{m!}(AT)^{m-1}\right) \end{aligned} \tag{1.21}$$

ここに、I ：単位行列、T ：計算時間間隔

通常、級数は第５項まで展開すれば十分なので、$m = 4$としたときのΦ およびΓ の要素を求めると、次の通りである。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + \frac{1}{2}a_1 T^2 + \frac{1}{6}a_1 a_2 T^3 + \frac{1}{24}a_1 a_3 T^4 \\ \phi_{12} = T\left(1 + \frac{1}{2}a_2 T + \frac{1}{6}a_3 T^2 + \frac{1}{24}a_2 a_4 T^3\right) \\ \phi_{21} = a_1 \phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_2 T + \frac{1}{2}a_3 T^2 + \frac{1}{6}a_2 a_4 T^3 + \frac{1}{24}\left(a_1 a_3 + a_2^2 a_4\right) T^4 \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\begin{cases} \gamma_{11} = T\left(1 + \frac{1}{6}a_1 T^2 + \frac{1}{24}a_1 a_2 T^3\right) \\ \gamma_{12} = T^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_2 T + \frac{1}{24}a_3 T^2\right) \\ \gamma_{21} = a_1 \gamma_{12} \\ \gamma_{22} = \phi_{12} \end{cases} \tag{1.23}$$

$$a_3 = a_1 + a_2^2 \quad , \quad a_4 = a_1 + a_3 \tag{1.24}$$

所要流出高qは、漸化式(1.18)により任意のタイム・ステップkにおける$y_1 = q^{p_2}$と$y_2 = \frac{d}{dt}\left(q^{p_2}\right)$の値が逐次計算されるので、式(1.3)を用いて次のように求められる。

$$q = y_1^{1/p_2} \tag{1.25}$$

1.2 モデル定数の最適化手法

モデル定数の最適化には一次微係数を用いるニュートン法を採用する。

(1) 感度係数(一次微係数)の算定

今、モデル定数が時間的に変化しないと仮定し、式(1.4)における変数y_1とy_2に関する微分方程式をモデル定数k_{11}, k_{12}, c_{13}で微分すると式(1.26)が得られる。

$$\frac{dU}{dt} = A_1 U + D \tag{1.26}$$

ここに、

$$U = \left[\frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} \frac{\partial y_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial y_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial y_2}{\partial c_{13}} \right]^T \tag{1.27}$$

$$A_1 = \frac{\partial F}{\partial Y} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{array} \right] \tag{1.28}$$

$$D = \left[0\ 0\ 0\ d_1\ \ d_2\ \ d_3 \right]^T \tag{1.29}$$